

О ПОВЕРХНОСТНО-ВОЛНОВОМ МЕХАНИЗМЕ ФОРМИРОВАНИЯ СУБВОЛНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ПЛОСКОЙ ЛЕВОСТОРОННЕЙ СУПЕРЛИНЗЕ

А. А. Жаров^а, Н. А. Жарова^{б*}, Р. Е. Носков^а

^а Институт физики микроструктур Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия

^б Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 27 апреля 2009 г.

Построена теория, описывающая динамику и взаимодействие поверхностных электромагнитных волн, резонансно возбуждаемых сторонним источником в слое левостороннего метаматериала, который характеризуется одинаковыми отрицательными (равными -1) значениями относительных диэлектрической и магнитной проницаемостей и образует так называемую совершенную линзу, или «суперлинзу». Показано, что возможность получения субволновых изображений с помощью суперлинзы связана с вырождением спектра собственных поверхностных электромагнитных мод на границах слоя метаматериала, а динамический отклик суперлинзы полностью определяется динамикой соответствующих мод и дисперсионными свойствами метаматериала. Проведенный анализ позволяет сформулировать условия, при выполнении которых суперлинза дает субволновые изображения стороннего источника. Рассмотрены примеры стационарного, импульсного, движущегося с постоянной скоростью и осциллирующего в пространстве источников.

PACS: 42.30.Wb, 73.20.Mf

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение электродинамики левосторонних метаматериалов (ЛСМ) привлекает в последние годы значительное внимание теоретиков и экспериментаторов. Этот интерес стимулируется уникальными электромагнитными свойствами ЛСМ, недостижимыми у природных сред, а так же рядом многообещающих возможных приложений. В настоящее время развиты технологии изготовления объемных ЛСМ для микроволн [1, 2] и наблюдается заметный прогресс в создании ЛСМ для более коротковолновых диапазонов, таких как терагерцевый [3], ИК [4–6] и оптический [7–10]. С точки зрения макроскопического описания ЛСМ характеризуются одновременно отрицательными значениями диэлектрической (ε) и магнитной (μ) проницаемостей, следствием чего тройка векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} оказывается левой (откуда и возник термин «ЛСМ»), а электромагнитные волны — обратными, т. е. такими, в которых вектор плотности потока энергии

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$$

и волновой вектор \mathbf{k} противоположно направлены.

Вероятно, одним из важнейших свойств ЛСМ, обусловленных возбуждением в них обратных электромагнитных волн, является так называемая отрицательная рефракция, имеющая место на границе раздела обыкновенной, правосторонней среды (ПСС) и ЛСМ. В случае отрицательной рефракции падающий и прошедший лучи лежат по одну и ту же сторону от нормали к границе раздела, проведенной в точке преломления луча. Интересно заметить, что впервые возможность существования обратных волн обсуждалась более века назад Шустером в книге [11] и позднее Мандельштамом в тридцатых годах прошлого века [12]. Позже Веселаго сформулировал электродинамику левосторонних сред [13] и предсказал новые эффекты, которые могли бы наблюдаться при взаимодействии электромагнитных волн с левосторонней средой. В частности, было показано, что плоскопараллельная пластинка ЛСМ может фокусировать излучение точечного источника, а при

*E-mail: zhani@appl.sci-nnov.ru

определенных условиях [14] даже формировать так называемое «совершенное» изображение источника с субволновым разрешением, что впоследствии было неоднократно подтверждено в микроволновых экспериментах [15–17].

Стационарное решение в отсутствие диссипации энергии дает идеальное изображение монохроматического источника, создаваемое «совершенной» линзой, вне зависимости от его пространственного спектра. Формально данный результат объясняется усилением в слое ЛСМ ближних полей, ответственных за реконструкцию мелких деталей изображения. В то же время использование данного решения может приводить к некоторым неверным результатам и даже к «парадоксам» [18], что, в принципе, характерно для любых резонансных сред и может быть связано с неограниченным (секулярным) ростом отклика при резонансном возбуждении собственных мод соответствующей среды, либо просто свидетельствовать об отсутствии стационарного решения. Для правильного описания системы в этом случае необходима та или иная регуляризация задачи, например, введение конечных потерь энергии или учет нестационарности процесса.

В случае совершенной линзы резонансный отклик возникает из-за вырождения спектра поверхностных электромагнитных волн (ПЭВ), направляемых границами раздела образующего линзу слоя ЛСМ с относительными проницаемостями $\bar{\epsilon} = -1$, $\bar{\mu} = -1$, при этом существуют ПЭВ любой поляризации (ТЕ и ТМ) и любыми поперечными волновыми числами. Влияние диссипации энергии в линзе в рамках стационарной задачи анализировалось, например, в работе [19]. В ней было показано, что потери обрезают пространственный спектр пропускания слоя ЛСМ, что и дает фундаментальный предел разрешения. Однако остается открытым вопрос о пространственно-временной динамике формирования изображений как при наличии потерь, так и без них, в частности, изображений нестационарных источников, что до сих пор не обсуждалось вовсе. Также важно обсудить роль резонансно возбуждаемых ПЭВ в слое ЛСМ, которые определяют эту динамику.

Динамическая картина формирования изображений в суперлинзе изучалась к настоящему времени, главным образом, на основе прямого численного исследования уравнений Максвелла с помощью FDTD или других коммерческих кодов [20, 21]. Предпринятая попытка построения физической модели [22] сводилась к моделированию динамики ПЭВ на основе связанных уравнений гармонических осцилляторов,

причем не было каких-либо указаний на область их применимости, а коэффициенты в уравнениях подбирались, фактически, из эмпирических соображений.

В настоящей работе мы ставим своей целью показать, что основным механизмом формирования субволновых изображений суперлинзой является резонансное возбуждение ПЭВ на границах слоя ЛСМ ближними полями стороннего источника. Предлагаемое исследование опирается на последовательную теорию, основанную на так называемом «методе расщепления поля», впервые развитом для расчета закона самофокусировки [23], а впоследствии для изучения динамики вытекающих нелинейных поверхностных волн разной природы [24–26]. Данный подход позволяет получить динамическую картину структуры электромагнитного поля стороннего источника во всем пространстве в присутствии слоя ЛСМ и, в том числе, картину формирования изображений суперлинзой с учетом малых потерь энергии. Все это, в свою очередь, дает возможность сформулировать условия, при выполнении которых суперлинза дает субволновое изображение. Как уже отмечалось, это невозможно сделать в рамках стационарной бездиссипативной задачи, на основе решения которой делались многочисленные противоречивые выводы о фокусирующих свойствах суперлинзы.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 сформулирована постановка задачи; в разд. 3 из уравнений Максвелла выводятся укороченные уравнения, описывающие динамику пространственных фурье-гармоник амплитуд ПЭВ на границах слоя ЛСМ и определяющие электромагнитное поле во всем пространстве; разд. 4 посвящен исследованию стационарных решений полученных уравнений; в разд. 5 решается начальная задача о динамике формирования изображений стационарного и импульсного источников. В разд. 6 изучаются особенности изображений движущихся источников; в Заключение формулируются основные выводы работы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим расположенный в вакууме¹⁾ плоский слой ЛСМ толщины d , занимающий пространство

¹⁾ Данное предположение никоим образом не ограничивает общность задачи и просто соответствует описанию слоя ЛСМ в терминах относительных проницаемостей, т. е. диэлектрической и магнитной проницаемостей слоя, нормированных на соответствующие проницаемости окружающего пространства.

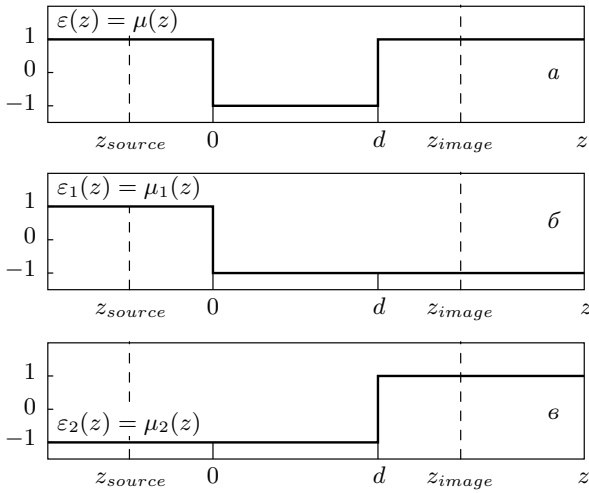


Рис. 1. *a* — Пространственное распределение диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей в рассматриваемой постановке задачи; слой метаматериала толщиной d , представляющий собой совершенную линзу расположен в области $0 \leq z \leq d$. Схематически показаны также положение сечения источника $z = z_s$ и сечения изображения $z = z_I$, о котором речь пойдет ниже. *б* — Вспомогательные распределения $\varepsilon_1(z)$ и $\mu_1(z)$ с локализацией поверхностных волн в сечении $z = 0$. *в* — Вспомогательные распределения $\varepsilon_2(z)$ и $\mu_2(z)$ с локализацией поверхностных волн в сечении $z = d$

$0 < z < d$ (см. рис. 1), с диэлектрической и магнитной проницаемостями $\bar{\varepsilon}(\omega)$ и $\bar{\mu}(\omega)$. Электромагнитное поле в системе возбуждается квазигармоническим во времени ($\propto \exp(i\omega t)$) сторонним электрическим током с круговой частотой ω . Для простоты и без ущерба для общности будем считать, что сторонний ток является поверхностным, локализован на расстоянии a от левой границы слоя ЛСМ и имеет единственную компоненту вдоль оси x

$$\mathbf{j}_s = j_s(x)\delta(z + a) \exp(i\omega t) \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

где \mathbf{x}_0 — единичный вектор вдоль оси x , $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака. Эквивалентный поверхностный ток вида (1) (описывающий, в частности, призмный способ возбуждения ПЭВ в геометрии нарушенного полного внутреннего отражения в так называемой конфигурации Отто) порождает электромагнитное поле ТМ-поляризации, описываемое уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -ik_0\mu(z, \omega)\mathbf{H}, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= ik_0\varepsilon(z, \omega)\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s, \end{aligned} \quad (2)$$

где под $\varepsilon(z, \omega)$ и $\mu(z, \omega)$ понимаются следующие величины:

$$\varepsilon(z, \omega), \mu(z, \omega) = \begin{cases} \bar{\varepsilon}(\omega), \bar{\mu}(\omega), & 0 < z < d, \\ 1, & 0 \geq z; z \geq d, \end{cases} \quad (3)$$

$k_0 = \omega/c$ — волновое число свободного пространства, c — скорость света, а компоненты электрического и магнитного полей E_x, E_z, H_y не зависят от координаты y ($\partial/\partial y = 0$). Ниже мы не будем отдельно рассматривать случай ТЕ-поляризации, поскольку он не содержит новых решений или эффектов, а с формальной точки зрения описывается единообразно рассматриваемому случаю ТМ-поляризации. Для дальнейшего удобно сделать преобразование Фурье по x ($\propto \exp(-ihx)$) и записать систему уравнений (2) в матричном виде:

$$\hat{\sigma}\psi = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s^{(h)}\delta(z + a). \quad (4)$$

Здесь вектор ψ представляет собой столбец, составленный из тангенциальных (непрерывных на границах раздела) фурье-компонент магнитного и электрического полей, а $\mathbf{j}_s^{(h)}$ — фурье-компонента стороннего поверхностного тока:

$$\psi = \begin{pmatrix} H_y \\ E_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}_s^{(h)} = \begin{pmatrix} 0 \\ j_s^{(h)} \end{pmatrix},$$

а оператор $\hat{\sigma}$ имеет следующий вид:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -i \left[k_0\mu(z, \omega) - \frac{h^2}{k_0\varepsilon(z, \omega)} \right] & -\frac{d}{dz} \\ -\frac{d}{dz} & -ik_0\varepsilon(z, \omega) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В дальнейшем мы будем интересоваться не только решениями стационарного уравнения (4) в среде, описываемой формулами (3), но, главным образом, изучением динамических процессов, приводящих к установлению стационарных состояний. Как уже отмечалось, наибольший интерес для нас представляет динамика ближних (т.е. медленных, с фазовыми скоростями меньшими скорости света в окружающем свободном пространстве) пространственных

гармоник поля, которые ответственны за разрешение мелких (меньше длины волны) масштабов в суперлинзе. Ниже будет показано, что уравнение (4) позволяет на основе метода расщепления поля получить укороченные уравнения для медленных амплитуд (огibaющих) ПЭВ, направляемых границами слоя ЛСМ при $z = 0$ и $z = d$, которые, в конечном счете, определяют структуру ближних электромагнитных полей во всем пространстве. Необходимым условием возможности описания взаимодействия ПЭВ в терминах укороченных уравнений является слабое перекрытие соответствующих мод, когда поле одной волны экспоненциально мало в области локализации другой, что приводит к условию

$$\exp\left(-d\sqrt{h^2 - k_0^2\bar{\epsilon}(\omega)\bar{\mu}(\omega)}\right) \ll 1.$$

На рис. 1 показаны распределения диэлектрической $\epsilon(z, \omega)$ и магнитной $\mu(z, \omega)$ проницаемостей (3) (рис. 1а), а также два вспомогательных распределения $\epsilon_1(z, \omega)$, $\mu_1(z, \omega)$ (рис. 1б) и $\epsilon_2(z, \omega)$, $\mu_2(z, \omega)$ (рис. 1в). В отсутствие взаимодействия структура ПЭВ на границах слоя и их дисперсионные характеристики в точности совпадают со структурой и дисперсией волн, распространяющихся вдоль границ раздела, показанных на рис. 1б, в. Соответствующее дисперсионное уравнение для ПЭВ ТМ-поляризации записывается в виде (см., например, [27])

$$\sqrt{h^2 - k_0^2} = -\frac{\sqrt{h^2 - k_0^2\bar{\epsilon}\bar{\mu}}}{\bar{\epsilon}}, \quad (6)$$

где в $\bar{\epsilon}(\omega)$, $\bar{\mu}(\omega)$ опущены обозначения зависимости от частоты для сокращения записи. Области существования ПЭВ обеих (ТЕ и ТМ) поляризаций на границе вакуума и ЛСМ показаны на рис. 2. Напомним, что ниже мы будем рассматривать только поле ТМ-поляризации, поскольку соответствующие результаты для ТЕ-поляризации могут быть получены путем простого переобозначения $\bar{\epsilon} \rightarrow \bar{\mu}$ и $\bar{\mu} \rightarrow \bar{\epsilon}$. Обратим внимание на вырожденный случай $\bar{\epsilon} = -1$, $\bar{\mu} = -1$, отвечающий суперлинзе, при котором уравнение (6) удовлетворяется при любых h . На диаграмме (рис. 2) этому вырожденному случаю соответствуют точка с координатами $(-1, -1)$. Очевидно, что дисперсионное уравнение (6) одинаково для ПЭВ на обеих границах слоя, а поперечные структуры полей ПЭВ зеркально симметричны. Итак, на основе исходного (стационарного) уравнения (4) мы хотим изучить динамику ПЭВ, возбуждаемых за-

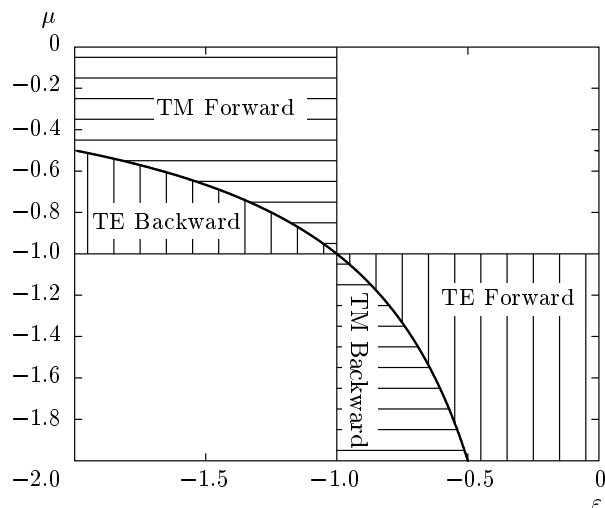


Рис. 2. Области существования поверхностных (прямых и обратных) электромагнитных волн ТМ- и ТЕ-поляризации на плоскости параметров (ϵ, μ) . Точка $\epsilon = -1$, $\mu = -1$, соответствующая параметрам совершенной линзы, является вырожденной

данным источником в слое ЛСМ, в терминах медленно меняющихся амплитуд, предполагая перекрытие соответствующих мод экспоненциально слабым.

3. МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ПОЛЯ. УКРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим собственные ПЭВ ψ_1 и ψ_2 , которые поддерживаются границами раздела ($z = 0$) и ($z = d$) (см. рис. 1б, в). В отсутствие источника эти моды ни с чем не взаимодействуют; выделим их

$$\hat{\sigma}_1 \psi_1^{(0)} = 0, \quad \hat{\sigma}_2 \psi_2^{(0)} = 0, \quad (7)$$

где $\psi_{1,2}^{(0)}$ — поперечные структуры стационарных ПЭВ, поддерживаемых профилями проницаемостей $\epsilon_{1,2}(z, \omega)$ и $\mu_{1,2}(z, \omega)$, соответственно:

$$\hat{\sigma}_{1,2} = \hat{\sigma}(\epsilon_{1,2}(z, \omega), \mu_{1,2}(z, \omega)), \quad (8)$$

а $\hat{\sigma}$ в выражении (8) дается формулой (5) при чисто действительных $\epsilon_{1,2}(z, \omega)$ и $\mu_{1,2}(z, \omega)$. В явном виде выражения для $\psi_{1,2}^{(0)}$ записываются следующим образом:

$$\psi_1^{(0)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{i\sqrt{(h/k_0)^2 - 1}} \right) \exp\left(z\sqrt{h^2 - k_0^2}\right), & z < 0, \\ \left(\frac{1}{-i\sqrt{(h/k_0\bar{\varepsilon})^2 - \bar{\mu}/\bar{\varepsilon}}} \right) \exp\left(-z\sqrt{h^2 - k_0^2\bar{\varepsilon}\bar{\mu}}\right), & z > 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\psi_2^{(0)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{i\sqrt{(h/k_0\bar{\varepsilon})^2 - \bar{\mu}/\bar{\varepsilon}}} \right) \exp\left[(z-d)\sqrt{h^2 - k_0^2\bar{\varepsilon}\bar{\mu}}\right], & z < d, \\ \left(\frac{1}{-i\sqrt{(h/k_0)^2 - 1}} \right) \exp\left[-(z-d)\sqrt{h^2 - k_0^2}\right], & z > d. \end{cases} \quad (10)$$

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1\psi_1 &= -(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_2)\psi_2 \equiv \mathbf{F}_1, \\ \hat{\sigma}_2\psi_2 &= -(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_1)\psi_1 \equiv \mathbf{F}_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где операторы $\hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}_{1,2}$ даются выражениями (5), (8); $\psi_{1,2}$ — возмущенные поперечные структуры поля на границах раздела $z = 0$ и $z = d$. Система уравнений (11) эквивалентна исходному уравнению (4) в том смысле, что содержит решение системы (4) для свободных (без источника) ПЭВ, направляемых слоем (рис. 1а)²⁾. Действительно, после сложения уравнений (11) получаем

$$\hat{\sigma}(\psi_1 + \psi_2) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, сумма $\psi = \psi_1 + \psi_2$ дает решение исходной задачи без источника³⁾ при $\mathbf{j}_s^{(h)} = 0$. Запись в форме системы уравнений (11) удобна в случае слабого перекрытия ПЭВ, когда $\mathbf{F}_{1,2}$ экспоненциально малы, что дает возможность применить теорию возмущений и получить укороченные уравнения для медленно меняющихся в пространстве и во времени амплитуд ПЭВ. Действительно, как видно из определения $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$, $\mathbf{F}_1 \neq 0$ при $z < 0$, а $\mathbf{F}_2 \neq 0$ при $z > d$, что и обеспечивает их экспоненциальную малость во всем пространстве, благодаря экспоненциальному спадаанию ψ_1 и ψ_2 от границ раздела $z = 0$ и $z = d$ соответственно.

Следующим этапом построения уравнений для ПЭВ, направляемых слоем ЛСМ, является включение в теорию поля источника. Поле источника (ψ_3) мы будем описывать уравнением

$$\hat{\sigma}_3\psi_3 = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s^{(h)}\delta(z+a), \quad (13)$$

где оператор $\hat{\sigma}_3$ относится к среде, в которой расположен источник, т. е. к вакууму:

$$\hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}(\varepsilon(z, \omega) = 1, \mu(z, \omega) = 1).$$

Уравнение (13) имеет строгое решение. В интересующей нас области пространства $z > -a$ оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_3 &= \left(\frac{1}{-i\sqrt{(h/k_0)^2 - 1}} \right) \times \\ &\times A(h) \exp\left(-(z+a)\sqrt{h^2 - k_0^2}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$A(h) = \frac{2\pi}{c}j_s^{(h)}.$$

Добавим в правые части уравнений (11) поле источника ψ_3 , которое в дальнейшем также будет рассматриваться как возмущение, поскольку пространственные гармоники ближнего поля источника экспоненциально убывают по мере удаления от него и в области локализации ПЭВ являются экспоненциально малыми. Поле источника ψ_3 должно учитываться таким образом, чтобы сумма всех парциальных полей

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \quad (15)$$

давала полное решение задачи и удовлетворяла исходному уравнению (4). Итак, формально имеем

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1\psi_1 &= -(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_2)\psi_2 + \hat{X}_1\psi_3, \\ \hat{\sigma}_2\psi_2 &= -(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_1)\psi_1 + \hat{X}_2\psi_3, \end{aligned} \quad (16)$$

²⁾ Система (11) имеет порядок выше, чем исходное уравнение (4), т. е. кроме решения (4) содержит еще и другие решения. Имея в виду построение в дальнейшем теории возмущений относительно решений, даваемых уравнениями (7), все прочие решения, не относящиеся к данной задаче, будут автоматически проигнорированы.

³⁾ Вопрос о включении поля источника в теорию обсуждается немного ниже.

где операторы $\hat{X}_{1,2}$ пока неизвестны и требуют определения из сформулированного выше условия. Сложив уравнения (16) и (13), получаем соотношение

$$\hat{\sigma}(\psi_1 + \psi_1) + (\hat{\sigma}_3 - \hat{X}_1 - \hat{X}_2)\psi_3 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s^{(h)} \delta(z+a),$$

которое совпадает с уравнением (4) при выполнении равенства

$$\hat{X}_1 + \hat{X}_2 = \hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}. \quad (17)$$

Уравнение (17) показывает, что возникла неоднозначность в определении \hat{X}_1 и \hat{X}_2 , поскольку определена только их сумма. Учитывая экспоненциальную малость воздействия поля источника на ПЭВ на дальней по отношению к источнику границе слоя ($z = d$) по сравнению с его воздействием на ПЭВ на ближней ($z = 0$) границе, можно было бы, в принципе, положить $\hat{X}_2 = 0$, $\hat{X}_1 = \hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}$, не выходя при этом за область применимости теории. Однако мы остановимся на более симметричном выборе $\hat{X}_{1,2}$:

$$\hat{X}_1 = \hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}_1, \quad \hat{X}_2 = \hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}. \quad (18)$$

Как будет видно ниже, обе приведенные альтернативы в определении вклада поля источника приводят, естественно, к одному и тому же конечному результату, с точностью до малого параметра, определяющего перекрытие взаимодействующих ПЭВ в слое ЛСМ. Из выражений (16) видно, что $\hat{X}_1 = 0$ при $z < 0$, а $\hat{X}_2 = 0$ при $z < d$. Перепишем систему (9) с учетом возмущений со стороны источника:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1 \psi_1 &= -(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_2) \psi_2 + (\hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}_1) \psi_3 \equiv \mathbf{F}_1, \\ \hat{\sigma}_2 \psi_2 &= -(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_1) \psi_1 + (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}) \psi_3 \equiv \mathbf{F}_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Итак, учитывая экспоненциальную малость правых частей уравнений (19), ниже мы будем развивать теорию возмущений, позволяющую из исходных стационарных уравнений получить динамическую систему для медленно меняющихся в пространстве и во времени амплитуд ПЭВ. Учитывая идентичность дисперсионных характеристик ПЭВ на границах раздела слоя ЛСМ, будем игнорировать фазовую расстройку между ними. Будем принимать в расчет только возможную расстройку между источником и ПЭВ. В нулевом порядке теории возмущений ($\mathbf{F}_{1,2} = 0$) уравнения (19) описывают невзаимодействующие ПЭВ и дают их невозмущенную поперечную структуру:

$$\hat{\sigma}_1^{(0)} \psi_1^{(0)} = 0, \quad \hat{\sigma}_2^{(0)} \psi_2^{(0)} = 0,$$

где $\hat{\sigma}_1^{(0)}$, $\hat{\sigma}_2^{(0)}$ — операторы $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$, взятые при $\text{Im}(\varepsilon, \mu) = 0$ для частоты и волнового числа, отвечающих действительному дисперсионному уравнению

для ПЭВ (6). Чтобы получить укороченные динамические уравнения для амплитуд ПЭВ, необходимо предположить, что частотный и пространственный спектры этих волн слегка уширены, так что

$$\omega = \omega_0(h_0) + \Delta\omega, \quad h = h_0 + \Delta h,$$

$$\Delta\omega/\omega_0, \Delta h/h_0 \ll 1,$$

где ω_0 , h_0 представляют собой решение дисперсионного уравнения (6). Потери в слое ЛСМ будем также предполагать достаточно малыми, в том же порядке малости, что и правые части уравнений (19). Далее используем замену

$$\Delta\omega = -i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Delta h = i \frac{\partial}{\partial x}$$

и запишем выражения для поперечных структур ПЭВ в виде

$$\psi_{1,2} = a_{1,2}(t, x) \psi_{1,2}^{(0)} + \delta\psi_{1,2},$$

где $a_{1,2}(t, x)$ — медленные амплитуды (оггибающие) ПЭВ, $\delta\psi_{1,2}$ — малые поправки к поперечной структуре ПЭВ. Искомые укороченные уравнения могут быть получены из уравнений (19). Для этого мы должны представить полные операторы в виде разложения в степенной ряд по $\Delta\omega$ и Δh в окрестности дисперсионной кривой

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{1,2} &\approx \hat{\sigma}_{1,2}^{(0)} - i \left. \frac{\partial \hat{\sigma}_{1,2}}{\partial \omega} \right|_{\omega_0, h_0} \frac{\partial}{\partial t} + \\ &+ i \left. \frac{\partial \hat{\sigma}_{1,2}}{\partial h} \right|_{\omega_0, h_0} \frac{\partial}{\partial x} + \delta\hat{\sigma}_{1,2}^{(m)}|_{\omega_0, h_0}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta\hat{\sigma}_{1,2}^{(m)} &= \hat{\sigma}_{1,2} - \hat{\sigma}_{1,2}^{(0)} = \\ &= \begin{pmatrix} -\left(\frac{h_0^2}{k_0 \varepsilon^2} \text{Im} \bar{\varepsilon} + k_0 \text{Im} \bar{\mu}\right) & 0 \\ 0 & -k_0 \text{Im} \bar{\varepsilon} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
 & \hat{\sigma}_1^{(0)}(\delta\psi_1) - i\frac{\partial a_1}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial \omega} \psi_1^{(0)} \right) + \\
 & + i\frac{\partial a_1}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial h} \psi_1^{(0)} \right) + a_1 \left(\delta \hat{\sigma}_1^{(m)} \psi_1^{(0)} \right) = \\
 & = -a_2(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_2)\psi_2^{(0)} + (\hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}_1)\psi_3 \times \\
 & \times \exp[i(\omega_s - \omega_0)t - i(h_s - h_0)x], \\
 & \hat{\sigma}_2^{(0)}(\delta\psi_2) - i\frac{\partial a_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial \omega} \psi_2^{(0)} \right) + \\
 & + i\frac{\partial a_2}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial h} \psi_2^{(0)} \right) + a_2 \left(\delta \hat{\sigma}_2^{(m)} \psi_2^{(0)} \right) = \\
 & = -a_1(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_1)\psi_1^{(0)} + (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma})\psi_3 \times \\
 & \times \exp[i(\omega_s - \omega_0)t - i(h_s - h_0)x],
 \end{aligned} \tag{20}$$

где ω_s, h_s — частота и волновое число источника (индексы «s» в дальнейшем будем опускать). Уравнения (20) можно переписать в символическом виде:

$$\hat{\sigma}_1^{(0)}(\delta\psi_1) = \mathbf{R}_1, \quad \hat{\sigma}_2^{(0)}(\delta\psi_2) = \mathbf{R}_2. \tag{21}$$

Условием того, что вся развиваемая теория верна (это имеет место, когда поправки $\delta\psi_{1,2}$ остаются малыми) является ортогональность собственных мод однородных уравнений (21) их правым частям (теорема Фредгольма об альтернативе [28]). Очевидно, что собственные моды однородных уравнений (21) совпадают с $\psi_1^{(0)}$ и $\psi_2^{(0)}$, соответственно. Именно условия ортогональности и приводят к искомым укороченным уравнениям для медленных амплитуд. Символически условия ортогональности записываются в следующем виде:

$$\left\langle \psi_{1,2}^{(0),*} \middle| \mathbf{R}_{1,2} \right\rangle = 0, \tag{22}$$

где введено обозначение для скалярного произведения

$$\langle A|B \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} AB dz,$$

а звездочка означает комплексное сопряжение. В явном виде уравнения (22) выглядят так:

$$\begin{aligned}
 & -i\frac{\partial a_1}{\partial t} \left\langle \psi_1^{(0),*} \middle| \frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial \omega} \psi_1^{(0)} \right\rangle + \\
 & + i\frac{\partial a_1}{\partial x} \left\langle \psi_1^{(0),*} \middle| \frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial h} \psi_1^{(0)} \right\rangle + \\
 & + a_1 \left\langle \psi_1^{(0),*} \middle| \delta \hat{\sigma}_1^{(m)} \psi_1^{(0)} \right\rangle = \\
 & = -a_2 \left\langle \psi_1^{(0),*} \middle| (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_2) \psi_2^{(0)} \right\rangle + \\
 & + \left\langle \psi_1^{(0),*} \middle| (\hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}_1) \psi_3 \right\rangle \exp(i\Delta\omega t - i\Delta h x) - \\
 & - i\frac{\partial a_2}{\partial t} \left\langle \psi_2^{(0),*} \middle| \frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial \omega} \psi_2^{(0)} \right\rangle + \\
 & + i\frac{\partial a_2}{\partial x} \left\langle \psi_2^{(0),*} \middle| \frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial h} \psi_2^{(0)} \right\rangle + \\
 & + a_2 \left\langle \psi_2^{(0),*} \middle| \delta \hat{\sigma}_2^{(m)} \psi_2^{(0)} \right\rangle = \\
 & = -a_1 \left\langle \psi_2^{(0),*} \middle| (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_1) \psi_1^{(0)} \right\rangle + \\
 & + \left\langle \psi_2^{(0),*} \middle| (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}) \psi_3 \right\rangle \exp(i\Delta\omega t - i\Delta h x), \tag{23}
 \end{aligned}$$

где для малых расстройек

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \Delta h \left. \frac{\partial \omega}{\partial h} \right|_{\omega_0, h_0} = v_g \Delta h, \quad \Delta h = h - h_0,$$

v_g — групповая скорость ПЭВ. В выражениях (23) собственные функции невозмущенной задачи полагаются нормированными на

$$N_{1,2} = \left\langle \psi_{1,2}^{(0),*} \middle| \psi_{1,2}^{(0)} \right\rangle,$$

соответственно. Теперь для анализа решений системы уравнений (23) необходимо только вычислить входящие в нее коэффициенты в явном виде. Пропуская достаточно простые, но весьма громоздкие вычисления, приведем сразу окончательные выражения для соответствующих коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi_1^{(0),*} \middle| \frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial \omega} \psi_1^{(0)} \right\rangle = \left\langle \psi_2^{(0),*} \middle| \frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial \omega} \psi_2^{(0)} \right\rangle \equiv \alpha^{(\omega)} = \\
 & = \frac{i}{2\sqrt{h^2 - k_0^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{h^2 c}{\omega} - \frac{\omega}{c} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \omega} \times \right. \\
 & \times \left. \left(\frac{h^2 c}{\omega \varepsilon} - \frac{\omega \bar{\mu}}{c} \right) + \frac{\omega}{c} \left(\frac{h^2 c^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right\}, \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi_1^{(0),*} \middle| \frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial h} \psi_1^{(0)} \right\rangle = \left\langle \psi_2^{(0),*} \middle| \frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial h} \psi_2^{(0)} \right\rangle \equiv \\
 & \equiv \alpha^{(h)} = \frac{ih}{k_0 \sqrt{h^2 - k_0^2}} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right), \tag{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi_1^{(0),*} \middle| \delta \hat{\sigma}_1^{(m)} \psi_1^{(0)} \right\rangle = \left\langle \psi_2^{(0),*} \middle| \delta \hat{\sigma}_2^{(m)} \psi_2^{(0)} \right\rangle \equiv \\
 & \equiv \Gamma = \frac{|h|}{2\varepsilon \sqrt{h^2 - k_0^2}} \left(\text{Im } \bar{\mu} + \frac{\bar{\varepsilon} \bar{\mu}}{\varepsilon^2} \text{Im } \varepsilon \right), \tag{26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_1^{(0),*} | (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_2) \psi_2^{(0)} \rangle &= \langle \psi_2^{(0),*} | (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_1) \psi_1^{(0)} \rangle \equiv \\ \equiv \kappa &= -\frac{i}{\sqrt{h^2 - k_0^2}} \left\{ \frac{h^2}{k_0} \left(1 - \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \right) - k_0 \frac{2 - \bar{\varepsilon} - \bar{\mu}}{1 - \bar{\varepsilon}} \right\} \times \\ &\times \exp \left(\bar{\varepsilon} d \sqrt{h^2 - k_0^2} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_1^{(0),*} | (\hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}_1) \psi_3 \rangle &\equiv \\ \equiv \beta_{13} &= -iA(h) \frac{\exp \left(-a \sqrt{h^2 - k_0^2} \right)}{\sqrt{h^2 - k_0^2}} \times \\ &\times \left\{ \frac{h^2}{k_0} \left(1 - \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \right) - k_0 \frac{2 - \bar{\varepsilon} - \bar{\mu}}{1 - \bar{\varepsilon}} \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_2^{(0),*} | (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}) \psi_3 \rangle &\equiv \\ \equiv \beta_{23} &= -\beta_{13} \exp \left(-d \sqrt{h^2 - k_0^2} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Теперь становится совершенно очевидно, что коэффициент β_{23} должен быть положен равным нулю, поскольку является малой величиной следующего порядка и в принципе не должен учитываться уравнениями, полученными с точностью до первого порядка теории возмущений.

Ниже мы рассмотрим (применительно к суперлинзе с $\bar{\varepsilon} = -1$ и $\bar{\mu} = -1$) стационарные решения, на основании которых будет сформулирован критерий возможности получения субволнового разрешения (разрешения с масштабом меньше классического дифракционного предела [29]) с учетом конечной толщины слоя ЛСМ, величины потерь и особенностей пространственного спектра источника, а также динамику формирования изображения для стационарных, импульсных и движущихся источников. Для слоя ЛСМ с $\bar{\varepsilon} = -1$ и $\bar{\mu} = -1$ выражения для коэффициентов (24)–(29), входящих в систему уравнений (23), значительно упрощаются и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha^{(\omega)} &= -\frac{i}{2\sqrt{q^2 - 1}} \times \\ &\times \left\{ (2q^2 - 1) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \omega} \Big|_{\bar{\varepsilon}=-1} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \omega} \Big|_{\bar{\mu}=-1} \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\alpha^{(h)} = 0, \quad (31)$$

$$\Gamma = -\frac{|q|}{2\sqrt{q^2 - 1}} \{ \text{Im } \bar{\varepsilon} + \text{Im } \bar{\mu} \}, \quad (32)$$

$$\kappa = 2i\sqrt{q^2 - 1} \exp \left(-k_0 d \sqrt{q^2 - 1} \right), \quad (33)$$

$$\beta_{13} = -2i\sqrt{q^2 - 1} A(q) \exp \left(-k_0 a \sqrt{q^2 - 1} \right), \quad (34)$$

где $q = h/k_0$. Заметим, что в случае суперлинзы групповые скорости всех участвующих во взаимодействии ПЭВ обращаются в нуль независимо от волнового числа. Кроме того, из-за вырождения спектра ПЭВ каждая из пространственных гармоник спектра источника находится в точном фазовом синхронизме с соответствующей ПЭВ, что дает возможность положить фазовые расстройки в правых частях уравнений (23) равными нулю. Если разделить теперь обе части уравнений (23) на $(-i\alpha^{(\omega)})$, то данная система уравнений приводится к наиболее простому виду с ясным физическим смыслом всех входящих в нее коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\tilde{t}} + \gamma a_1 &= i\Omega_B a_2 - i\xi, \\ \frac{da_2}{d\tilde{t}} + \gamma a_2 &= i\Omega_B a_1, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\tilde{t} = \omega t, \quad \Omega_B = 4(q^2 - 1) \exp \left(-k_0 d \sqrt{q^2 - 1} \right) / F(\omega, q)$$

— частота биений взаимодействующих ПЭВ;

$$\gamma = |q| (\text{Im } \bar{\varepsilon} + \text{Im } \bar{\mu}) / F(\omega, q)$$

— коэффициент затухания;

$$\xi = 4(q^2 - 1) A(q) \exp \left(-k_0 a \sqrt{q^2 - 1} \right) / F(\omega, q)$$

— функция источника. Функция

$$F(\omega, q) = (2q^2 - 1) \omega \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \omega} \Big|_{\bar{\varepsilon}=-1} + \omega \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \omega} \Big|_{\bar{\mu}=-1}$$

характеризует временную дисперсию ЛСМ и, таким образом, инерцию отклика метаматериала. В дальнейшем для простоты мы будем опускать знак «тильда» и пользоваться безразмерным временем t ($\tilde{t} \rightarrow t$). В условиях малых потерь (как это исходно предполагается) производные диэлектрической и магнитной проницаемостей по частоте, содержащиеся в $F(\omega, q)$, положительны в силу соотношений Крамерса–Кронига. Асимметрия вклада этих производных связана с выбранной поляризацией (ТМ) электромагнитного поля. Напомним также, что система уравнений пригодна для описания динамики ПЭВ только при достаточно больших волновых числах q , так чтобы все экспоненциальные множители, входящие в коэффициенты уравнений (35), были малы, что отвечает слабому перекрытию полей

ПЭВ между собой и с полем источника. Однако учитывая то, что именно ближнепольные эффекты обуславливают возможность субволнового разрешения, предложенная теория, описывающая динамику ближних полей в суперлинзе, как раз и определяет возможности восстановления высоких пространственных гармоник спектра источника, ответственных за реконструкцию мелких масштабов. Система уравнений (35) описывает гармонический осциллятор с собственной частотой Ω_B и затуханием γ , возбуждаемый внешней силой $-i\xi$. В рамках предложенной теории расщепления поля соответствующие поля ПЭВ и источника удовлетворяют закону сохранения энергии:

$$\dot{W} + 2\hat{\gamma}W = P, \quad W = \int (|a_1|^2 + |a_2|^2) dq,$$

$$P = -i \int (\xi a_1^* - \xi^* a_1) dq,$$

где W , с учетом фиксированной поперечной структуры ПЭВ, представляет собой энергию, запасенную ПЭВ; P — работа источника над модами; $\hat{\gamma}$ — опера-

тор диссипации энергии в слое ЛСМ, действие которого следует понимать следующим образом:

$$\hat{\gamma}W = \int \gamma(q) (|a_1|^2 + |a_2|^2) dq.$$

Отметим, что в общем случае выполнение закона сохранения энергии не типично для метода возмущений.

4. СТАЦИОНАРНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

В условиях постоянного во времени источника и при наличии потерь энергии в слое ЛСМ, независимо от начальных условий, решение системы уравнений (35) неизбежно приходит к стационарному состоянию со значениями стационарных амплитуд ПЭВ

$$\bar{a}_1 = -i \frac{\gamma \xi}{\Omega_B^2 + \gamma^2}, \quad \bar{a}_2 = \frac{\Omega_B \xi}{\Omega_B^2 + \gamma^2}. \quad (36)$$

Подставляя в (36) приведенные выше явные выражения для ξ , Ω_B и γ , получаем

$$\bar{a}_1 = - \frac{4i|q|(q^2 - 1)A(q)(\text{Im } \bar{\varepsilon} + \text{Im } \bar{\mu}) \exp(-k_0 a \sqrt{q^2 - 1})}{q^2(\text{Im } \bar{\varepsilon} + \text{Im } \bar{\mu})^2 + 16(q^2 - 1)^2 \exp(-2k_0 d \sqrt{q^2 - 1})},$$

$$\bar{a}_2 = \frac{16(q^2 - 1)^2 A(q) \exp(-k_0(a + d) \sqrt{q^2 - 1})}{q^2(\text{Im } \bar{\varepsilon} + \text{Im } \bar{\mu})^2 + 16(q^2 - 1)^2 \exp(-2k_0 d \sqrt{q^2 - 1})}.$$
(37)

Полное выражение для фурье-компонент электрического и магнитного полей при произвольном значении координаты представляется в виде суммы (15). Рассмотрим стационарное распределение магнитной компоненты электромагнитного поля в области за слоем ЛСМ при $z > d$:

$$H_y(z > d, q) = A(q) \exp(-k_0(z + a) \sqrt{q^2 - 1}) + \bar{a}_1 \exp(-k_0 z \sqrt{q^2 - 1}) + \bar{a}_2 \exp(-k_0(z - d) \sqrt{q^2 - 1}). \quad (38)$$

После подстановки соотношений (37) в (38), последнее может быть приведено к следующему виду:

$$H_y(z > d, q) = T(q)A(q) \exp(-k_0(z + a) \sqrt{q^2 - 1}), \quad (39)$$

где $A(q) \exp(-k_0(z + a) \sqrt{q^2 - 1})$ — поле источника в отсутствие слоя ЛСМ, $T(q)$ представляет собой функцию пропускания:

$$T(q) = \frac{q_l^2 - 4i|q_l|(q^2 - 1) + 16(q^2 - 1)^2 \exp(-2k_0 d \sqrt{q^2 - 1}) + 16(q^2 - 1)^2}{q_l^2 + 16(q^2 - 1)^2 \exp(-2k_0 d \sqrt{q^2 - 1})}, \quad (40)$$

$$q_l = q(\text{Im } \bar{\varepsilon} + \text{Im } \bar{\mu}).$$

В рамках принятых приближений первыми тремя членами в числителе (40) можно (и необходимо!) пренебречь. В результате выражение для функции пропускания заметно упрощается:

$$T(q) = \frac{16(q^2 - 1)^2}{q_l^2 + 16(q^2 - 1)^2 \exp(-2k_0 d \sqrt{q^2 - 1})}, \quad (41)$$

тогда, если пренебречь потерями ($q_l = 0$), то фурье-компонента магнитного поля (39) запишется в виде

$$H_y(z > d, q) = A(q) \exp(k_0(2d - z - a)\sqrt{q^2 - 1}). \quad (42)$$

Отсюда следует, что зависимость магнитного и электрического полей от координаты x в плоскости $z = z_I \equiv (2d - a)$ совпадает с распределением магнитного и электрического полей в плоскости источника $z = -a$, т.е. слой ЛСМ с $\bar{\epsilon} = -1$, $\bar{\mu} = -1$ дает в сечении $z = z_I$ идеальное изображение источника. К этому же результату пришел Пендри в работе [14], где он получил точное стационарное решение для суперлинзы, с самого начала положив потери равными нулю. Однако вследствие вырождения пространственного спектра собственных поверхностных электромагнитных волн каждая медленная пространственная гармоника поля источника находится в точном фазовом синхронизме с ПВ на границах раздела слоя, что приводит к ее резонансному возбуждению. Стационарное решение без потерь в рассматриваемом резонансном случае дает нефизическое решение с особенностью, и, вообще говоря, учет конечного поглощения в слое ЛСМ является принципиально необходимым. Действительно, пространственное распределение электромагнитного поля может быть представлено в виде обратного преобразования Фурье от выражения (39) с функцией пропускания, выбранной в виде (41):

$$H_y(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} T(q)A(q) \times \exp(-k_0(z + a)\sqrt{q^2 - 1} + iq(k_0 x)) \frac{dq}{2\pi}. \quad (43)$$

Очевидно, что интеграл (43) должен быть сходящимся для любых источников, включая точечный. В то же время, если подынтегральное выражение содержит пространственный спектр поля вида (42), полученный в бездиссипативном приближении, то для не слишком быстро убывающих спектров источника

(медленнее экспоненты в (42) — например, для точечного источника) при $z < z_I$ интеграл (43) является расходящимся. Этот результат свидетельствует об отсутствии стационарного решения в пределе $q_l \rightarrow 0$, приводящем к неограниченному росту поля. Для источников же с быстро убывающим спектром (в приведенном выше смысле) при любых сколь угодно малых потерях интеграл (43) дает конечный результат. Потери сказываются, согласно (41), начиная с волновых чисел

$$q \sim q_C \approx \frac{1}{k_0 d} \ln \left(\frac{4}{\text{Im } \bar{\epsilon} + \text{Im } \bar{\mu}} \right), \quad (44)$$

экспоненциально обрезая пространственный спектр источника. Таким образом, величина q_C и дает фундаментальный предел латерального разрешения, обусловленный потерями в ЛСМ. В размерных единицах это соответствует разрешению

$$\Delta x \sim \frac{2\pi d}{\ln \left(\frac{4}{\text{Im } \bar{\epsilon} + \text{Im } \bar{\mu}} \right)}. \quad (45)$$

Обратим внимание на то, что масштаб разрешения прямо пропорционален толщине слоя ЛСМ и логарифмически слабо зависит от мнимых частей диэлектрической и магнитной проницаемостей. В результате, в соответствии с (45), для реальных метаматериалов субволновое разрешение может быть достигнуто, фактически, только для сравнительно тонких слоев с $d \ll \lambda$, где λ — длина волны в вакууме (см., например, [15]), что качественно и понятно, поскольку субволновое разрешение является ближнепольным эффектом. Как было отмечено в работе [19], спектральная функция пропускания образует, по существу, прямоугольный фильтр со спектральной шириной q_C , что естественным образом ограничивает возможности получения изображений с помощью суперлинзы фактически только ближней зоной излучателя [30]. На рис. 3 проиллюстрирована зависимость качества изображения двух субволновых источников (штриховая кривая), расположенных друг от друга на расстоянии $\lambda/10$, от толщины слоя ЛСМ при одних и тех же малых потерях ($\text{Im } \bar{\epsilon} = \text{Im } \bar{\mu} = 5 \cdot 10^{-3}$). Линза толщиной $d = \lambda/20$ (рис. 3а) разрешает источники, в то время как для $d = \lambda/10$ (рис. 3б) изображение заметно испортилось, а для $d = \lambda/5$ (рис. 3в) разрешение пропадает вовсе. Для метаматериала с такими потерями формула (45) дает порог разрешения $\Delta x \sim d$, что вполне соответствует результатам расчета.

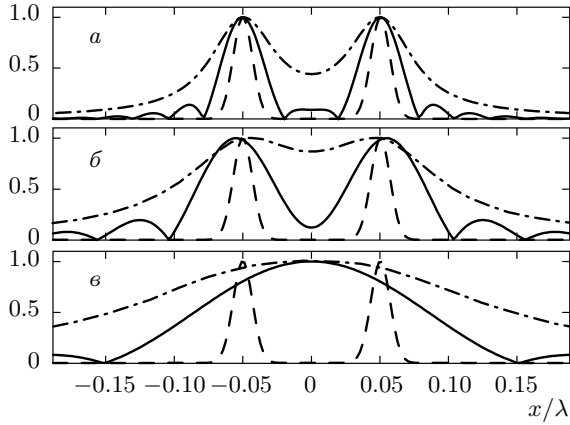


Рис. 3. Зависимость y -компоненты магнитного поля от (нормированной) поперечной координаты x/λ в сечении источника $z = -a = -d/2$ (штриховая кривая) и в сечении изображения $z_I = 2d - a$ (сплошная кривая) для толщины слоя ЛСМ $d = \lambda/20$ (а), $d = \lambda/10$ (б) и $d = \lambda/5$ (в); штрихпунктирная линия дает изображение в тех же сечениях z , но без линзы; каждое поле нормировано на свое максимальное значение. Материал суперлинзы характеризуется потерями $\text{Im } \bar{\epsilon} = \text{Im } \bar{\mu} = 5 \cdot 10^{-3}$; поле источника зависит от поперечной координаты как $H_y = \exp\left\{-\left(\frac{x+0.05\lambda}{0.01\lambda}\right)^2\right\} + \exp\left\{-\left(\frac{x-0.05\lambda}{0.01\lambda}\right)^2\right\}$

5. ДИНАМИКА ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ СУПЕРЛИНЗОЙ. ИЗОБРАЖЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА

Рассмотрим задачу об отклике суперлинзы в случае зависящего от времени источника. Будем считать, что источник по-прежнему расположен в плоскости $z = -a$ и достаточно медленно зависит от времени. Тогда в систему уравнений (35) вместо стационарной спектральной функции источника $\xi(q)$ необходимо подставить $\xi(q, t)$. Решение соответствующей линейной системы уравнений, полученное стандартным методом вариации произвольной постоянной, имеет вид

$$\begin{aligned}
 a_1(t) &= -i \int_{t_0}^t \xi(q, t') \exp(-\gamma(t-t')) \times \\
 &\quad \times \cos(\Omega_B(t-t')) dt', \\
 a_2(t) &= \int_{t_0}^t \xi(q, t') \exp(-\gamma(t-t')) \times \\
 &\quad \times \sin(\Omega_B(t-t')) dt'.
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

Нижний предел интегрирования t_0 в (46) определяется начальными условиями. Вначале изучим вре-

менную динамику изображения, создаваемого стационарным источником, включающимся в момент времени $t = 0$:

$$\xi(q, t) = \xi(q)\theta(t),$$

где $\theta(t)$ — единичная функция Хевисайда. Начальные условия для амплитуд ПЭВ положим нулевыми, $a_{1,2}(t = 0) = 0$. В этом случае нижний предел интегрирования в (46) должен быть положен равным нулю $t_0 = 0$. Вычисление интегралов (46) дает явные выражения для амплитуд ПЭВ:

$$a_1(t) = \bar{a}_1 f_1(t, q), \quad a_2(t) = \bar{a}_2 f_2(t, q), \tag{47}$$

где $\bar{a}_{1,2}$ — стационарные амплитуды (36) и (37), а временная динамика определяется через функции $f_{1,2}$:

$$\begin{aligned}
 f_1(t, q) &= 1 + e^{-\gamma t} \left(\frac{\Omega_B}{\gamma} \sin \Omega_B t - \cos \Omega_B t \right), \\
 f_2(t, q) &= 1 + e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma}{\Omega_B} \sin \Omega_B t - \cos \Omega_B t \right).
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

Если в выражениях (48) формально устремить потери к нулю, то для фурье-компонент медленных амплитуд ПЭВ получим

$$a_1(t) \approx -i \frac{\xi}{\Omega_B} \sin \Omega_B t, \quad a_2(t) \approx \frac{\xi}{\Omega_B} (1 - \cos \Omega_B t).$$

В этом случае, согласно (38), для высоких пространственных гармоник $|q| \gg 1$ фурье-компоненту магнитного поля в области $z > d$ при $t > 0$ можно записать как

$$\begin{aligned}
 H_y(q, z, t) &= A(q) \exp(-k_0(z+a)|q|) \times \\
 &\quad \times \{1 - i(\sin \Omega_B t) \exp(k_0 d |q|) + (1 - \cos \Omega_B t) \times \\
 &\quad \times \exp(2k_0 d |q|)\}.
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

С ростом волнового числа q частота биений ПЭВ экспоненциально уменьшается,

$$\Omega_B \propto \exp(-k_0 d |q|).$$

Поэтому на временах $t < \Omega_B^{-1}$ амплитуды ПЭВ нарастают со временем и выражение (49) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}
 H_y(q, z, t) &\approx H_y^{(0)}(q, z) \times \\
 &\quad \times \left\{ 1 - 2i \frac{t}{\left. \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \omega} \right|_{\bar{\epsilon}=-1}} + 2 \frac{t^2}{\left(\left. \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \omega} \right|_{\bar{\epsilon}=-1} \right)^2} \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$H_y^{(0)}(q, z) = A(q) \exp(-k_0(z + a)|q|)$$

— магнитное поле в отсутствие слоя ЛСМ. Таким образом, в отсутствие потерь не существует стационарного решения; вместо этого практически неограниченно нарастают поля высоких пространственных гармоник. Причиной является их резонансное возбуждение источником и экспоненциально быстрое уменьшение связи ПЭВ при увеличении волнового числа. С таким характером поведения поля в отсутствие поглощения как раз и связаны возможные сингулярности поля в стационарной задаче, о которых говорилось выше. Таким образом, для получения корректного результата необходимо сохранять потери конечными (хотя и сколь угодно малыми), что, в принципе, является общим свойством резонансных систем, возбуждаемых резонансным источником.

В условиях конечных потерь динамика формирования изображения (в плоскости изображения $z = z_I$) показана на рис. 4а,б,в для трех различных значений потерь, одно из которых обеспечивает разрешение двух (как на рис. 3) близко расположенных источников (рис. 4а), а при другом (рис. 4в) источники не разрешаются. Случай, изображенный на рис. 4б, является промежуточным.

Одной из важных и интересных задач применительно к суперлинзе является исследование возможности получения линзой изображений импульсного источника с плавной огибающей, которую мы обозначим $\alpha(t)$ ($\alpha(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \pm\infty$). Будем предполагать, что структура пространственного спектра источника не зависит от времени, поэтому в (35) вместо $\xi(q)$ можно подставить $\alpha(t)\xi(q)$. Решения системы уравнений (35) в форме (46) пригодны и в этом случае. С учетом нулевых начальных условий при $t \rightarrow -\infty$ ($a_{1,2}(t \rightarrow -\infty) = 0$) нижний предел интегрирования t_0 в (46) необходимо положить равным $t_0 = -\infty$. В результате выражения (46) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -i\xi(q) \int_{-\infty}^t \alpha(t') G_1(t - t', q) dt', \\ a_2(t) &= \xi(q) \int_{-\infty}^t \alpha(t') G_2(t - t', q) dt', \end{aligned} \tag{50}$$

где

$$G_1(t, q) = e^{-\gamma t} \cos \Omega_B t, \quad G_2(t, q) = e^{-\gamma t} \sin \Omega_B t.$$

С помощью замены переменной $\tau = t - t'$ выражения (50) сводятся к более простым — с пределами интегрирования, не зависящими от времени:

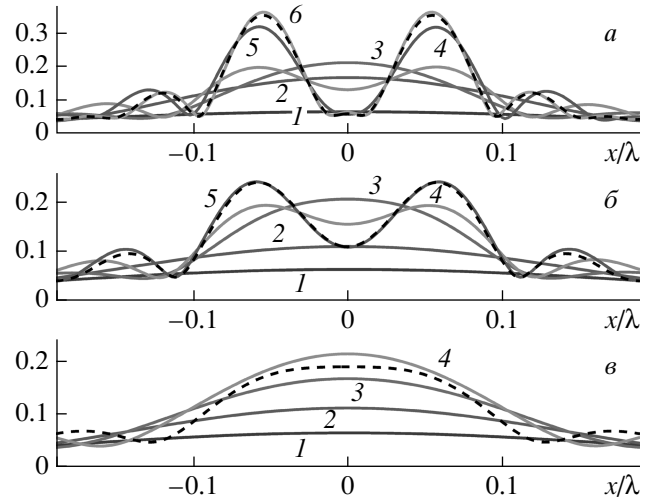


Рис. 4. Динамика установления изображения двух субволновых источников (см. рис. 3); толщина суперлинзы $d = \lambda/5$; при вычислениях считалось, что $\omega \partial \varepsilon / \partial \omega = \omega \partial \mu / \partial \omega = 1$. Источник включается в момент времени $t = 0$, амплитуда его поддерживается постоянной; стационарное распределение магнитного поля показано пунктирной линией. Случай (а) отвечает малым потерям $\text{Im } \varepsilon = \text{Im } \mu = 5 \cdot 10^{-5}$. Поперечная структура магнитного поля в плоскости $z = z_I$ приведена в последовательные моменты времени $t_1 = 1, t_2 = 8, t_3 = 512, t_4 = 4096, t_5 = 32768, t_6 = 262144$. Разрешение источника достигается не сначала, но по достижении некоторого времени, обратно пропорционального потерям $t > t^* \sim 1/\gamma$; сам процесс установления оказывается довольно длительным. В случае (б) потери в 10 раз больше: $\text{Im } \varepsilon = \text{Im } \mu = 5 \cdot 10^{-4}$; последовательность моментов времени здесь $t_1 = 1, t_2 = 4, t_3 = 512, t_4 = 2048, t_5 = 8192$. Как разрешение, так и стационарное распределение поля достигается в этом случае раньше, но качество разрешения заметно хуже. В случае (в) потери увеличены еще в 10 раз: $\text{Im } \varepsilon = \text{Im } \mu = 5 \cdot 10^{-3}$; последовательность моментов времени здесь $t_1 = 1, t_2 = 4, t_3 = 8, t_4 = 16$. Относительно быстро устанавливается стационарное состояние, но источники не разрешаются

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -i\xi(q) \int_0^\infty \alpha(t - \tau) G_1(\tau, q) d\tau, \\ a_2(t) &= \xi(q) \int_0^\infty \alpha(t - \tau) G_2(\tau, q) d\tau. \end{aligned} \tag{51}$$

Если длительность импульса велика по сравнению со всеми временными масштабами, входящими в $G_{1,2}(t, q)$, то выражения (51) могут быть приближен-

но представлены в виде

$$a_1(t) \approx -i\alpha(t)\xi(q) \int_0^\infty G_1(\tau, q) d\tau = \alpha(t)\bar{a}_1,$$

$$a_2(t) \approx \alpha(t)\xi(q) \int_0^\infty G_2(\tau, q) d\tau = \alpha(t)\bar{a}_2,$$

где $\bar{a}_{1,2}$ даются выражениями (36), (37) и представляют собой стационарные значения амплитуд ПЭВ при не зависящей от времени функции источника $\xi(q)$. Таким образом, мы пришли к предсказуемому результату: когда длительность импульса велика по сравнению с характерным временем переходных процессов, ПЭВ успевают «отрабатывать» все изменения внешнего поля, а амплитуды ПЭВ успевают в каждый момент времени прийти к своему стационарному состоянию. Однако, как было показано выше, частота биений ПЭВ сильно зависит от величины волнового числа q и, строго говоря, соответствующее характерное время неограниченно возрастает при $|q| \rightarrow \infty$, так что рано или поздно условие медленности огибающей импульса нарушается и для высоких пространственных гармоник запаздывание отклика становится существенным. Это является дополнительным фактором, ограничивающим пространственный масштаб разрешения импульсных сигналов. Учет инерционности связи амплитуд ПЭВ с огибающей импульса источника (51) приводит к запаздыванию отклика ПЭВ. Время запаздывания отклика ПЭВ будем определять стандартным образом, как соответствующий нормированный момент функций $a_{1,2}(t)$. Считая, что «центр тяжести» функции $\alpha(t)$ отвечает нулевому моменту времени, для задержек имеем

$$\Delta_{1,2} = \frac{\int_{-\infty}^\infty t |a_{1,2}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^\infty |a_{1,2}(t)|^2 dt}. \quad (52)$$

По-прежнему предполагая достаточно большую длительность импульса, можно приближенно найти значение интеграла в числителе (52). Для этого в подынтегральных выражениях (51) разложим функцию $\alpha(t - \tau)$ по τ с точностью до первого члена степенного ряда:

$$\alpha(t - \tau) \approx \alpha(t) - \tau \frac{d\alpha(t)}{dt}. \quad (53)$$

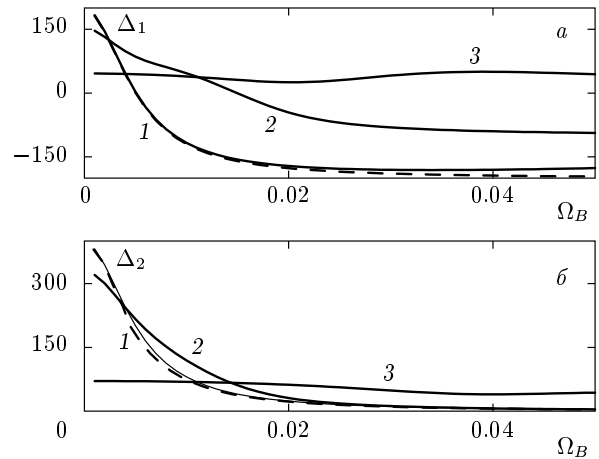


Рис. 5. Зависимость времен задержки Δ_1 (а) и Δ_2 (б) от частоты биений ПЭВ Ω_B при фиксированном значении коэффициента затухания $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$. Импульс источника имеет гауссову огибающую $\alpha(t) = \exp(-t^2/\tau_0^2)$. Штрихами показано приближенное решение (56). Кривые 1, 2 и 3 получены в результате непосредственного вычисления $\Delta_{1,2}$ по формулам (51), (52) со значениями $\tau_0 = 2000, 200$ и 20, соответственно

Прямое вычисление временных задержек (52) с учетом (51) и (53) приводит к результату

$$\Delta_{1,2} = \frac{|\xi|^2 I_1^{(1,2)} I_2^{(1,2)}}{|\bar{a}_{1,2}|^2}, \quad (54)$$

где

$$I_1^{(1,2)} = \int_0^\infty G_{1,2}(\tau, q) d\tau, \quad (55)$$

$$I_2^{(1,2)} = \int_0^\infty \tau G_{1,2}(\tau, q) d\tau.$$

Интегралы (55) легко берутся, и их подстановка в (54) приводит к явным выражениям для времен задержек:

$$\Delta_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma^2 - \Omega_B^2}{\gamma^2 + \Omega_B^2}, \quad \Delta_2 = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \Omega_B^2}. \quad (56)$$

Интересно отметить, что при $\Omega_B > \gamma$ задержка Δ_1 , т. е. интегральное время запаздывания импульса амплитуды ПЭВ относительно импульса источника на ближней к источнику границе слоя ЛСМ, оказывается отрицательной. Это не нарушает принципа причинности, поскольку импульс имеет гладкую огибающую, не содержащую разрывов, и электромаг-

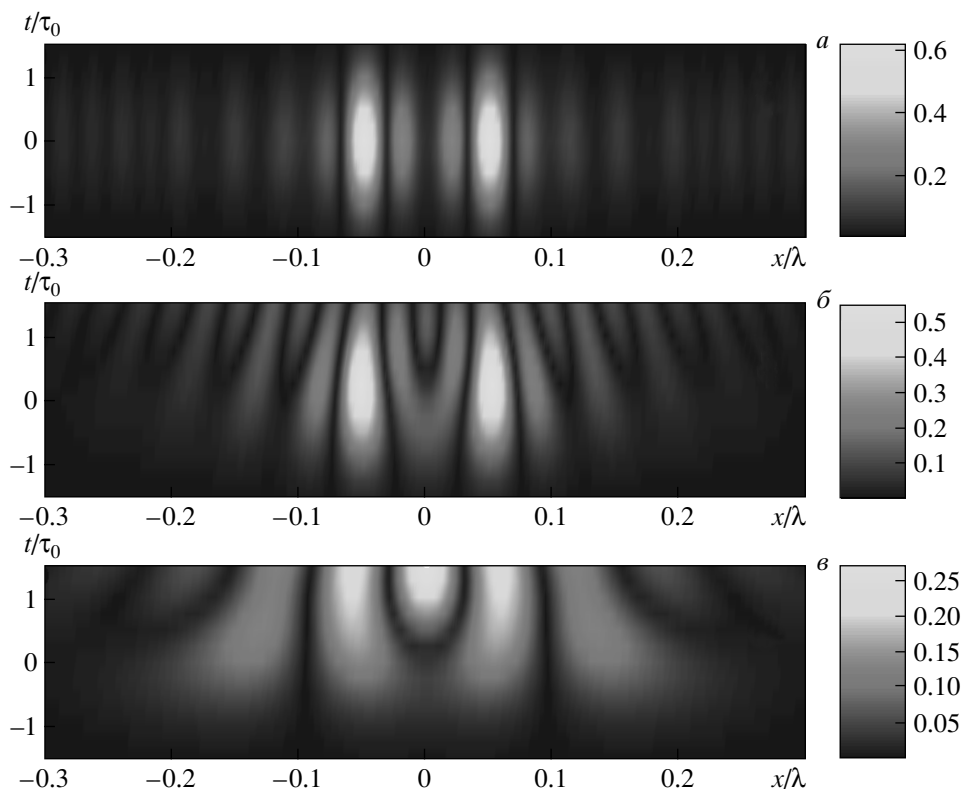


Рис. 6. Пространственно-временная динамика установления изображения в плоскости $z = z_I$ в случае, когда импульс источника имеет гауссову временную огибающую $\alpha(t) = \exp(-t^2/\tau_0^2)$ с тремя различными значениями параметра $\tau_0 = 2 \cdot 10^4$ (а), 333.3 (б) и 5.56 (в). Толщина линзы $d = 0.05\lambda$, потери в метаматериале $\text{Im } \varepsilon = \text{Im } \mu = 5 \cdot 10^{-3}$, источник расположен на расстоянии $d/2$ от линзы. Для параметров (а) и (б) изображение источника (см. рис. 3) разрешается, но для $\tau_0 = 5.56$ процесс формирования изображения оказывается слишком инерционным, так что изображение источника плохо разрешается

нитное поле начинает взаимодействовать с ПЭВ начиная со времен $t \rightarrow -\infty$. Для импульса источника, симметричного относительно момента времени $t = 0$, отрицательная задержка означает, что при вычислении интеграла в (52) вклад от части импульса ПЭВ со значениями времени $t > 0$ оказывается меньше, чем соответствующий вклад с $t < 0$. Похожий эффект имеет место и в других системах, где динамику поля определяют ближние (или так называемые «эванесцентные») моды, например, при прохождении импульсов через закритические плазменные слои. На рис. 5а,б штриховыми линиями изображены зависимости Δ_1 и Δ_2 от частоты биений Ω_B при фиксированном значении коэффициента затухания $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$. На тех же рисунках показаны величины задержки, рассчитанные путем прямого численного интегрирования по формулам (51), (52) импульса источника гауссовой формы $\alpha(t) = \exp(-t^2/\tau_0^2)$ при различных значениях τ_0 . Как можно видеть,

точный результат начинает значительно отличаться от приближенных предсказаний теории (56) для значений $\tau_0 < \tau_0^{cr} \sim \gamma$. Используя временные зависимости амплитуд пространственных фурье-гармоник поля, можно проследить также динамику формирования изображения импульсного источника за слоем в плоскости изображения $z = z_I = 2d - a$ путем вычисления обратного интеграла Фурье от пространственного спектра поля. Соответствующие динамические картины представлены на рис. 6 и 7 для различных длительностей импульса источника. В отличие от изображения стационарного источника изображения импульсных источников содержат дополнительные искажения, связанные с разной инерционностью отклика ЛСМ для различных пространственных гармоник поля.

Следует отметить, что, вообще говоря, хорошее разрешение может быть достигнуто и прежде, чем устанавливается квазистационарное распределение

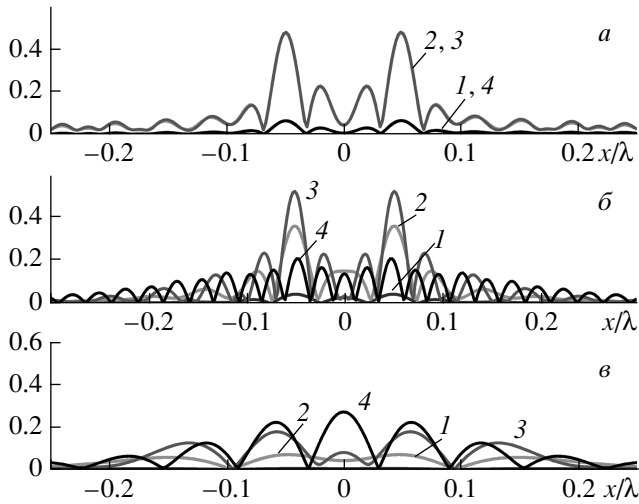


Рис. 7. Изображение источника (см. рис. 3) в плоскости $z = z_I$ в случае, когда импульс источника имеет гауссову временную огибающую $\alpha(t) = \exp(-t^2/\tau_0^2)$ с тремя различными значениями параметра $\tau_0 = 2 \cdot 10^4$ (а), 333.3 (б) и 5.56 (в). Толщина линзы $d = 0.05\lambda$, потери в метаматериале $\text{Im } \varepsilon = \text{Im } \mu = 5 \cdot 10^{-3}$, источник расположен на расстоянии $d/2$ от линзы. Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют моментам времени $t_1 = -1.5\tau_0$, $t_1 = -0.5\tau_0$, $t_1 = 0.5\tau_0$, $t_1 = 1.5\tau_0$. Для параметров (а) и (б) изображение источника разрешается, но для $\tau_0 = 5.56$ процесс формирования изображения оказывается слишком инерционным, так что изображение источника плохо разрешается

поля. На рис. 8 приведена временная динамика интеграла от квадрата модуля спектра поля

$$S(t) = \int |H_q(t)|^2(z = z_I) dq$$

в сечении изображения для тех же вариантов расчета, что и на рис. 7. Степень близости распределения поля к квазистационарному можно оценить, сравнивая функцию $S(t)$, которая фактически пропорциональна энергии поля в сечении изображения, с профилем квадрата временной огибающей источника $\alpha^2(t)$. В случае медленного изменения огибающей источника (а) приведенная зависимость повторяет огибающую, в случаях (б) и (в) квазистационарное распределение не успевает установиться, но субволновое изображение не разрешается лишь для наиболее быстрого (случай (в)) изменения огибающей.

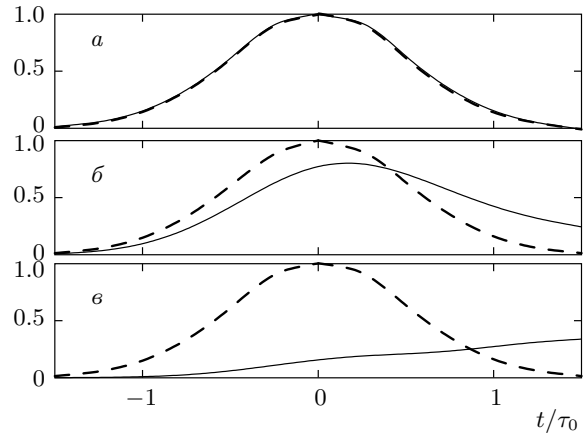


Рис. 8. Временная зависимость интеграла от квадрата модуля спектра поля $S(t) = \int |H_q(t)|^2(z = z_I) dq$ в сечении изображения для тех же (см. рис. 6, 7) вариантов расчета: кривая (а) отвечает медленному изменению амплитуды источника с характерным временем $\tau_0 = 2 \cdot 10^4$, изображение успевает следить за формой $\alpha(t)$; в случае (б) ($\tau_0 = 333.3$) максимум функции S сдвинут относительно центра импульса источника ($t = 0$) и заметно меньше единицы, а сама функция стала несимметричной; в случае (в) ($\tau_0 = 5.56$) функция S , которая фактически пропорциональна энергии поля в сечении изображения, не успевает за время $1.5\tau_0$ достигнуть максимума. Кривые а, б, в нормированы на максимальное значение «медленной» функции $S(\tau_0 = 2 \cdot 10^4)$ (а). Для сравнения приведена также временная зависимость квадрата огибающей источника $\alpha^2(t)$ (штрихи)

6. ИЗОБРАЖЕНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ИСТОЧНИКОВ

Рассмотрим источник электромагнитного поля, движущийся в плоскости $z = -a$ вдоль оси x по закону $x_g = x_0(t)$, где x_g — координата «центра тяжести» поля, создаваемого источником в плоскости $z = -a$. Будем предполагать, что скорость движения источника значительно меньше скорости света, $\dot{x}_0(t) \ll c$, так что для анализа работы суперлинзы можно по-прежнему воспользоваться уравнениями (35) для медленных амплитуд ПЭВ, распространяющихся вдоль границ слоя ЛСМ. Пространственный спектр источника в этом случае может быть записан в виде

$$A(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(x - x_0(t)) \exp(-ik_0 x q) dx = A(q) \exp(-iqk_0 x_0(t)). \quad (57)$$

Ниже будут рассмотрены два типа движения источника — равномерное, с постоянной скоростью v , $x_0(t) = vt$, и осцилляторное $x_0(t) = r_0 \sin \Omega t$, где r_0 — амплитуда, а Ω — частота осцилляций.

Равномерно движущийся источник. Решения уравнений (35) с источником, включенным при $t \rightarrow -\infty$, могут быть получены с использованием формул (51), в которых необходимо положить $\alpha(t) = \exp(-ik_0vt)$, где величина $qk_0v \equiv \delta\omega_D$ имеет смысл доплеровского сдвига частоты. Вычисление интегралов (51) приводит к следующим явным выражениям для амплитуд ПЭВ:

$$\begin{aligned} a_1 &= -i \frac{\gamma - i\delta\omega_D}{(\gamma - i\delta\omega_D)^2 + \Omega_B^2} \xi(q) \exp(-i\delta\omega_D t), \\ a_2 &= \frac{\Omega_B}{(\gamma - i\delta\omega_D)^2 + \Omega_B^2} \xi(q) \exp(-i\delta\omega_D t). \end{aligned} \quad (58)$$

Формулы (58) показывают, что движение источника не приводит к дополнительным искажениям изображения, рассмотренным в разд. 4, до тех пор, пока

$$\delta\omega_D \ll \gamma. \quad (59)$$

Фактически, выражение (59) дает еще один предел разрешения суперлинзы, связанный с движением источника. Принимая во внимание зависимость коэффициента затухания от q при $|q| \gg 1$ для соответствующего «второго» критического волнового числа, определяющего минимальные масштабы разрешения, имеем

$$q_{C2} \approx \left(\frac{\text{Im } \bar{\varepsilon} + \text{Im } \bar{\mu}}{2k_0 v \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}} \right)^{1/2}. \quad (60)$$

Таким образом, характерный минимальный пространственный масштаб, разрешаемый суперлинзой у движущегося источника отвечает наименьшему из критических волновых чисел, даваемых формулами (44) и (60), равен

$$\bar{q} \sim \min\{q_C, q_{C2}\}, \quad (61)$$

а максимальная скорость движения источника, при которой еще возможно субволновое разрешение, примерно соответствует равенству q_C и q_{C2} , откуда получаем оценку

$$\frac{v_{max}}{c} \sim \frac{(k_0 d)^2}{2\omega \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right|_{\bar{\varepsilon} = -1}}. \quad (62)$$

В условиях, когда $\delta\omega_D \gg \gamma$, $\Omega_B \gg \gamma$, возможен черенковский резонанс с ПЭВ на границах слоя ЛСМ.

В формулах (58) черенковский резонанс отвечает полюсам соответствующих выражений, лежащим почти на действительной оси. В условиях черенковского синхронизма преимущественно возбуждается одна синхронная ПЭВ с волновым числом, определяемым равенством

$$qk_0v = \Omega_B. \quad (63)$$

При этом вслед за источником возникает слабозатухающий квазигармонический «хвост» ПЭВ на границах слоя, и, разумеется, в этом случае ни о каком разрешении речи быть не может. Условие черенковского резонанса для различных волновых чисел q достигается при разных скоростях движения источников. Следует ожидать, что максимальный черенковский эффект будет наблюдаться, если равенство $qk_0v = \Omega_B(q)$ выполняется для спектральной гармоники ПЭВ с волновым числом $q = q_0 = 2\pi/b$ (b — расстояние между источниками), соответствующим максимуму в спектре источника; определим отсюда характерную скорость

$$v_D = \frac{\Omega_B(q_0)}{q_0 k_0}.$$

Все типичные ситуации, возможные для движущегося с постоянной скоростью источника, показаны на рис. 9: (а) — медленное движение, (б) — движение со скоростью выше максимальной и (в) — черенковское излучение при движении со скоростью $v = v_D$. Рисунок 10 демонстрирует зависимость пространственного латерального (вдоль x) отставания координаты изображения относительно координаты источника от скорости движения источника для малых (в указанном выше смысле) скоростей. В качестве координаты эффективного центра изображения бралось отношение интегралов

$$x_g = \frac{\int_{-\delta x}^{\delta x} x |H_x|^2 dx}{\int_{-\delta x}^{\delta x} |H_x|^2 dx}$$

с параметром «обрезания» $\delta x = 0.0782\lambda$, что соответствует окну фильтрации, включающему в себя два главных пика стационарного изображения.

Осциллирующий источник. Рассмотрим источник, испытывающий пространственные осцилляции вдоль оси x по закону $x_0(t) = r_0 \sin \Omega t$, где r_0 — радиус осцилляций, с частотой Ω , малой по сравнению

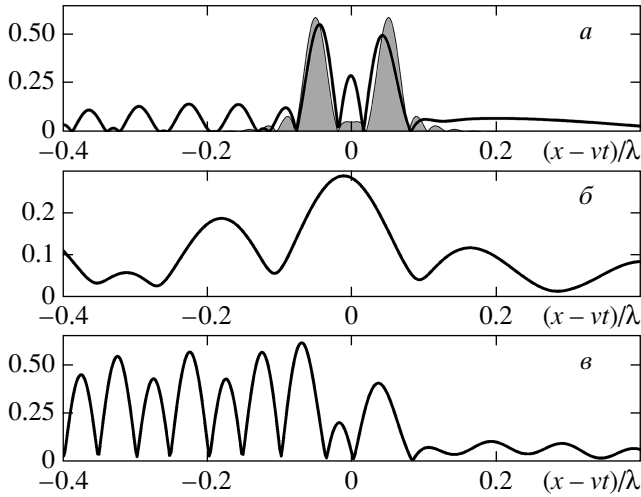


Рис. 9. Структура изображения двух субволновых источников (см. рис. 3), движущихся с постоянной скоростью v . Случай (а) отвечает медленно движущемуся с $v = 0.03v_D$; случай (б) — быстрому движению с $v = 3v_D$; случай (в) — движению с резонансной скоростью $v = v_D$. Скорость v_D определяется из условия черенковского резонанса $q_0 k_0 v_D = \Omega_B(q_0)$ с ПЭВ, соответствующей масштабу разрешения источников $q_0 = 2\pi/b$ (b — расстояние между источниками, здесь $b = \lambda/10$). Толщина линзы $d = 0.05\lambda$, потери в метаматериале $\text{Im} \varepsilon = \text{Im} \mu = 5 \cdot 10^{-3}$, источники расположены в сечении $z = -d/2$, изображение показано в сечении $z = z_I$ в системе координат, движущейся с той же скоростью v . Для сравнения на рис. 9а приведено также изображение (затененная область) этих источников в стационарном случае ($v = 0$)

с частотой электромагнитного поля: $\Omega \ll \omega$. Уравнения (35) для осциллирующего источника переписываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} + \gamma a_1 &= i\Omega_B a_2 - i\xi(q) \times \\ &\times \exp(-iqk_0 r_0 \sin \Omega t), \\ \frac{da_2}{dt} + \gamma a_2 &= i\Omega_B a_1. \end{aligned} \quad (64)$$

В данном случае решение системы уравнений (64) удобно искать в виде ряда Фурье по гармоникам частоты Ω

$$a_{1,2}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{1,2}^{(n)} e^{in\Omega t}. \quad (65)$$

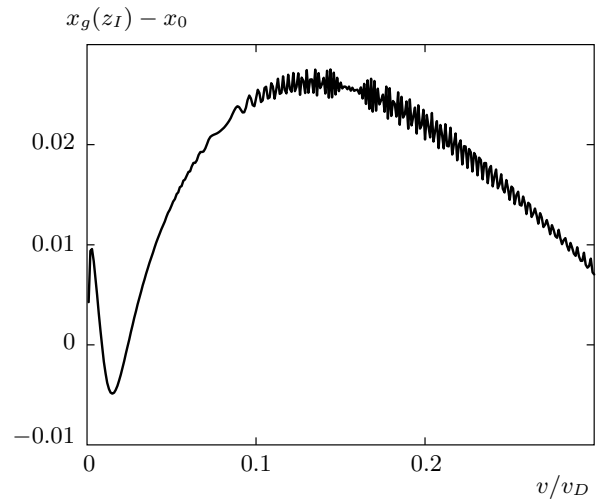


Рис. 10. Кривая «отставания» (нормированной) координаты эффективного центра изображения $x_g(z_I)/\lambda$ относительно координаты центра источника x_0/λ в зависимости от относительной скорости движения источника v/v_D . Параметры источника и линзы те же, что и на рис. 7

Используя хорошо известное соотношение [31]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(in\theta - ip \sin \theta) d\theta = 2\pi J_n(p),$$

где $J_n(p)$ — функция Бесселя порядка n , получаем для гармоник амплитуд ПЭВ линейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (in\Omega + \gamma)A_1^{(n)} - i\Omega_B A_2^{(n)} &= -i\xi(q)J_n(qk_0 r_0), \\ -i\Omega_B A_1^{(n)} + (in\Omega + \gamma)A_2^{(n)} &= 0, \end{aligned} \quad (66)$$

из которой и находятся выражения для гармоник комплексных амплитуд ПЭВ:

$$\begin{aligned} A_1^{(n)} &= \frac{(n\Omega - i\gamma)\xi(q)J_n(qk_0 r_0)}{(in\Omega + \gamma)^2 + \Omega_B^2}, \\ A_2^{(n)} &= \frac{\Omega_B \xi(q)J_n(qk_0 r_0)}{(in\Omega + \gamma)^2 + \Omega_B^2}. \end{aligned} \quad (67)$$

В условиях нулевых потерь ($\gamma = 0$), выражения (67) содержат особенности при $n\Omega = \Omega_B$, которые также отвечают черенковскому резонансу и ведут к искажению изображения. В общем случае анализ изображения осциллирующего источника, производимого суперлинзой, очень сложен и вместо него мы приведем некоторые результаты численных расчетов, выполненных путем суммирования соответствующих рядов Фурье с коэффициентами (67). На

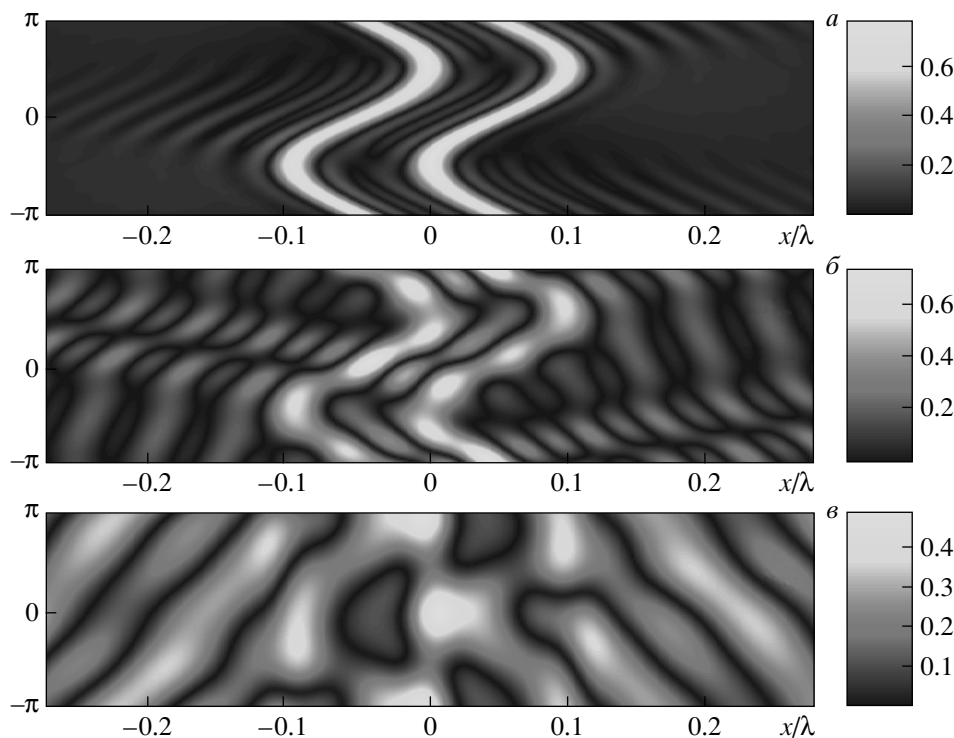


Рис. 11. Пространственно-временная динамика изображения осциллирующего источника для трех различных значений частоты осцилляций $\Omega = 0.1\gamma_D = 5 \cdot 10^{-5}$ (а), $\Omega = \sqrt{\gamma_D \omega_D} = 6.6 \cdot 10^{-3}$ (б) и $\Omega = 2\omega_D = 0.174$ (в), амплитуда осцилляций $r_0 = 0.05\lambda$. По оси ординат отложена фаза осцилляций Ωt . Остальные параметры источника и линзы те же, что и на рис. 7

рис. 11а,б,в показана пространственно-временная динамика изображения источника, осциллирующего с амплитудой $r_0 = 0.05\lambda$ и частотой Ω . Расчет проведен для трех значений частоты: $\Omega < \gamma_D, \omega_D$ (а), $\gamma_D < \Omega < \omega_D$ (б) и $\Omega > \omega_D$ (в). Здесь затухание $\gamma_D = \gamma(q = q_0)$ и частота биений $\omega_D = \Omega_B(q = q_0)$ отвечают характерному волновому числу $q_0 = 2\pi/b$ в спектре источника. Хорошее разрешение изображения (а) для медленных осцилляций сменяется плохим (б) при увеличении частоты и полностью пропадает (в) при быстрых колебаниях источника.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе показано, что возможность получения субволнового разрешения с помощью левосторонней плоской суперлинзы (или «совершенной» линзы) связана с вырождением спектра поверхностных электромагнитных волн, распространяющихся вдоль границ слоя ЛСМ, и резонансным возбуждением этих ПЭВ близкими полями стороннего источника. На основе полу-

ченной методом расщепления поля динамической системы укороченных уравнений для медленных амплитуд ПЭВ в условиях их слабого перекрытия изучены динамические процессы формирования субволновых изображений для источников разного типа. Для каждого из них рассчитаны фундаментальные пределы разрешения линзы и выяснена физическая природа возникновения соответствующих пределов разрешения.

Один из авторов (А. А. Ж.) признателен А. И. Смирнову за весьма полезные обсуждения некоторых принципиальных вопросов применения метода расщепления поля в рассмотренной задаче о суперлинзе. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 08-02-00379, 09-02-00863).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 4184 (2000).

2. R. A. Shelby, D. R. Smith, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, *Appl. Phys. Lett.* **78**, 489 (2001).
3. H. O. Moser, B. D. R. Casse, O. Wilhelm, and B. T. Saw, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 063901 (2005).
4. S. Zhang, W. Fan, B. K. Minnes et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 037402 (2005).
5. S. Linden, C. Enkrich, M. Wegener et al., *Science* **306**, 1351 (2004).
6. A. Ishikawa, T. Tanaka, and S. Kawata, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 237401 (2005).
7. V. A. Podolsky, A. K. Sarychev, and V. M. Shalaev, *Opt. Express* **11**, 735 (2003).
8. V. A. Podolsky, A. K. Sarychev, and V. M. Shalaev, *Int. J. Nonlin. Opt. Phys.* **11**, 65 (2002).
9. J. Takahara and T. Kobayashi, *Opt. Photon. News* **15**, 55 (2004).
10. V. M. Shalaev, W. Cai, U. K. Chettiar et al., *Opt. Lett.* **30**, 3356 (2005).
11. A. Schuster, *An Introduction to the Theory of Optics*, Edward Arnold, London (1904), pp. 256, 257, 313.
12. Л. И. Мандельштам, *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике*, Наука, Москва (1972).
13. В. Г. Веселаго, *УФН* **172**, 1215 (1967).
14. J. B. Pendry, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000).
15. A. N. Lagarkov and V. N. Kissel, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 077401 (2004).
16. A. Grbic and G. V. Eleftheriades, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 117403 (2004).
17. J. D. Wilson and Z. D. Schwartz, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 021113 (2005).
18. J. J. Cui, Q. Cheng, W. B. Lu et al., *Phys. Rev. B* **71**, 045114 (2005).
19. V. A. Podolsky and E. E. Narimanov, *Opt. Lett.* **30**, 75 (2005).
20. G. Gomes-Santos, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 077401 (2003).
21. M. W. Feise, J. B. Schneider, and P. J. Bevelaouque, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*. **52**, 2955 (2004).
22. P. Kolinko and D. R. Smith, *Opt. Express* **11**, 640 (2003).
23. А. И. Смирнов, Г. М. Фрайман, *ЖЭТФ* **54**, 737 (1982).
24. Y. M. Aliev, A. D. Boardman, A. I. Smirnov, K. Xie, and A. A. Zharov, *Phys. Rev. E* **54**, 5409 (1996).
25. A. I. Smirnov and A. A. Zharov, in *Soliton-driven Photonics, NATO Science Series, Mathematics, Physics and Chemistry*, ed. by A. D. Boardman and A. P. Sukhorukov, Kluwer Acad. Publishers (The Netherlands), Vol. 31, p. 141 (2000).
26. A. D. Boardman, P. Bontemps, W. Ilecki, and A. A. Zharov, *J. Mod. Opt.* **47**, 1941 (2000).
27. I. V. Shadrivov, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, A. A. Zharov, A. D. Boardman, and P. Egan, *Phys. Rev. E* **69**, 016617 (2004).
28. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1974).
29. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).
30. А. Б. Петрин, *ЖЭТФ* **134**, 436 (2008).
31. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, Москва (1968).