

КВАНТОВЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ЛИФШИЦА И ПЕРЕСТРОЙКА ФЕРМИ-ПОВЕРХНОСТИ С ИЗМЕНЕНИЕМ КОНЦЕНТРАЦИИ ДЫРОК В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

С. Г. Овчинников^{a,b,e*}, М. М. Коршунов^{a,c,d}, Е. И. Шнейдер^{a,e}

^a Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук
660036, Красноярск, Россия

^b Сибирский федеральный университет
660041, Красноярск, Россия

^c Max-Planck-Institut für Physik Komplexer Systeme
D-01187, Dresden, Germany

^d Department of Physics, University of Florida
Gainesville, Florida 32611, USA

^e Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М. Ф. Решетнева
660014, Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 17 апреля 2009 г.

Обсуждаются изменения электронной структуры в нормальной фазе высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) — слоистых купратов. Результаты расчетов электронной структуры и поверхности Ферми однослойных купратов $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ методом LDA+GTB с учетом сильных корреляций сравниваются с данными ARPES и квантовых осцилляций. Обнаружены две критические точки x_{c1} и x_{c2} , в которых происходит перестройка поверхности Ферми. В окрестности критических точек в рамках идеологии Лифшица о квантовых фазовых переходах 2.5 рода найдены изменения термодинамических свойств при низких температурах. Особенность электронной теплоемкости $\delta(C/T) \propto (x - x_e)^{1/2}$ достаточно хорошо согласуется с известными экспериментальными данными в окрестности $x_{c1} \approx 0.15$. Также качественно обсуждаются изменения знака константы Холла с допированием.

PACS: 64.70.Tg, 71.10.-w, 74.25.Jb

1. ВВЕДЕНИЕ

Уже более 20 лет ВТСП-купраты активно исследуются, и в настоящее время это, по-видимому, наиболее исследованный (после семейства полупроводников) класс конденсированных систем. Стало ясно, что многие их свойства необычны. Необычна не только природа и механизмы сверхпроводимости, но и аномальные свойства «нормальной» фазы, в первую очередь, псевдощелевое состояние (см. обзоры [1–8]). Большой объем информации об электрон-

ной структуре купратов был получен методом фотоэлектронной спектроскопии с угловым разрешением (ARPES) [9], выявившим перестройку поверхности Ферми от ферми-дуг в центре зоны Бриллюэна при малом допировании к большим дырочным карманам с центром в точке (π, π) при большом допировании. В последние два года появились новые результаты по измерению квантовых осцилляций в сильных магнитных полях на монокристаллах $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.5}$ [10] и $\text{YBa}_2\text{Cu}_4\text{O}_8$ [11, 12], свидетельствующие о наличии маленьких дырочных карманов для слабодопированных составов в кажущемся противоречии с ферми-дугами ARPES. Противоречие было снято при

*E-mail: sgo@iph.krasn.ru

учете взаимодействия дырок с флуктуациями ближнего антиферромагнитного (AFM) порядка, сильными в псевдощелевом состоянии [13–16]. Оказалось, что половина дырочного кармана образована состояниями теневой зоны и размывается из-за сильного рассеяния квазичастиц на этих флуктуациях. Только в современном ARPES-эксперименте с использованием ультрафиолетового лазера, позволяющего добиться сверхвысокого разрешения по энергии, была обнаружена вторая половина дырочного кармана [17]. Подобные сильные взаимодействия носителей тока с магнитными неоднородностями характерны не только для купратов, но и для других оксидов переходных металлов с сильными электронными корреляциями, например, манганитов [18].

Для теоретического описания электронной структуры слабодопированных купратов, возникновения малых дырочных карманов при допировании диэлектрика La_2CuO_4 и концентрационной зависимости поверхности Ферми недостаточно использовать традиционные методы одноэлектронной зонной теории типа приближения локальной плотности (LDA) в методе функционала плотности. Необходим учет сильных корреляций. В режиме сильных электронных корреляций многозонные реалистичные модели электронной структуры CuO_2 -слоя сводятся в области низкоэнергетических возбуждений к эффективной модели Хаббарда и к t - J -модели [19–23]. В гибридной схеме LDA+GTV [24], основанной на LDA-расчетах из первых принципов без подгоночных параметров и учитывающей сильные электронные корреляции в обобщенном методе сильной связи (GTV) [19], низкоэнергетическая t - t' - t'' - J^* -модель была получена из микроскопического рассмотрения, а также рассчитаны все параметры модели.

Малые дырочные карманы с площадью порядка x вокруг точки $(\pi/2, \pi/2)$ возникают при рассмотрении динамики дырки на фоне AFM-упорядочения спинов как методами точной диагонализации [25] и квантовым методом Монте-Карло [26, 27] для конечных кластеров, так и для бесконечной решетки в различных вариационных методах или в теории возмущений [28–32]. Когда дальний AFM-порядок разрушается, расчеты электронной структуры для парамагнитного состояния дают другой тип дисперсии с потолком валентной зоны в точке (π, π) [33]. Поверхность Ферми в таком случае будет большой дырочной с центром в точке (π, π) . До сих пор существуют апологеты «универсальной металлической дисперсии», рассчитывающие с помощью LDA зонную структуру и поверхность Ферми $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$

и утверждающие о применимости модели жесткой зоны, согласно которой уровень Ферми сдвигается при допировании относительно неизменной зоны [34]. После открытия малых дырочных карманов в слабодопированных купратах в экспериментах по квантовым осцилляциям [10–12] сценарий [34] становится совсем неубедительным. Вместо простого парамагнитного состояния нормального металла в купратах вне области AFM-порядка формируется псевдощелевое состояние. И хотя его природа еще дискутируется, важная роль флуктуирующего ближнего AFM-порядка очевидна [5]. Как уже отмечалось выше, именно учет взаимодействия электрона с флуктуирующим ближним AFM-порядком позволил примирить данные квантовых осцилляций и ARPES при малых степенях допирования. Между тем ближний AFM-порядок с корреляционной длиной $\xi_{AFM} \approx 10 \text{ \AA}$ имеет место и в области оптимального допирования [35], так что его учет актуален не только в слабодопированных системах. При низких температурах $T \leq 10 \text{ K}$ флуктуации происходят достаточно медленно с характерным временем жизни порядка 10^{-9} с на масштабах порядка ξ_{AFM} (размер AFM-микродомена) [36]. Это время заметно превышает характерные времена восстановления равновесия ферми-системы при ARPES-измерениях (порядка 10^{-13} с) [37] и период обращения электрона на поверхности Ферми по циклотронной орбите $2\pi\omega_c^{-1} \sim 10^{-12}$ с, где ω_c — циклотронная частота в экспериментах [10, 11]. Таким образом, при расчете динамики квазичастицы с учетом ближнего AFM-порядка можно пренебречь динамикой самого магнитного порядка, учитывая лишь его пространственную неоднородность.

В настоящей работе в рамках этого подхода анализируется концентрационная зависимость электронной структуры и поверхности Ферми. В разд. 2 приводятся результаты расчета электронной структуры квазичастиц в t - t' - t'' - J^* -модели с учетом статического ближнего AFM-порядка и показано изменение топологии поверхности Ферми с допированием. Здесь же обсуждаются площадь под поверхностью Ферми и теорема Латинжера. В разд. 3 дано качественное объяснение полученных результатов. В разд. 4 рассмотрены квантовые фазовые переходы 2.5 рода по концентрации носителей в духе работ Лифшица [38, 39], поправки к электронной теплоемкости в окрестности перехода сравниваются с измерениями [40]. В Заключение качественно обсуждается концентрационная зависимость транспортных свойств.

2. ПОВЕРХНОСТЬ ФЕРМИ $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ И ЕЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СТЕПЕНИ ДОПИРОВАНИЯ

В рамках метода LDA+ГТВ [24] начинаем исследование электронной структуры с помощью LDA-расчетов из первых принципов, основываясь на которых строятся функции Ванье в базисе p -орбиталей кислорода и e_g -орбиталей меди. В представлении Ванье записывается многозонная p - d -модель [41], параметры которой вычислены из первых принципов. Затем p - d -модель записывается в представлении X -операторов в рамках кластерной теории возмущений [19, 42], и в рамках ГТВ-метода строится низкоэнергетическая эффективная модель Хаббарда, в которой эффективный параметр $U = E_{CT}$, где E_{CT} — диэлектрическая щель с переносом заряда [43]. В модели Хаббарда оператор $X_j^{0\sigma}$ описывает уничтожение дырки на узле f в нижней хаббардовской зоне (ЛНВ) дырок, что соответствует электронам на дне зоны проводимости. Уничтожение дырки в верхней Хаббардовской зоне (УНВ) описывается оператором $X_f^{\bar{\sigma}2}$, что соответствует рождению электрона на потолке валентной зоны. При построении t - J -модели можно удалить либо двухчастичные состояния дырок и получить эффективный гамильтониан для ЛНВ, либо исключить двухчастичные состояния электронов (вакуум дырок, что соответствует $d^{10}p^6$ -конфигурации CuO_6 -ячейки) и получить эффективный гамильтониан для УНВ. Именно последний случай представляет интерес в данной работе при исследовании поверхности Ферми в дырочно-допированных купратах. Все параметры получающейся таким образом t - t' - t'' - J^* -модели для $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ вычислены в рамках LDA+ГТВ-подхода, т.е. гамильтониан не содержит подгоночных параметров. Здесь J^* означает, что учитываются трехцентровые коррелированные перескоки, амплитуда которых порядка J .

Гамильтониан модели имеет вид

$$H_{t-J^*} = H_{t-J} + H_{(3)},$$

$$H_{t-J} = \sum_{f,\sigma} [(\varepsilon - \mu)X_f^{\sigma\sigma} + (\varepsilon_2 - 2\mu)X_f^{22}] + \sum_{f \neq g, \sigma} t_{fg}^{11} X_f^{2\bar{\sigma}} X_g^{\bar{\sigma}2} + \sum_{t \neq g} J_{fg} \left(\mathbf{S}_f \cdot \mathbf{S}_g - \frac{1}{4} n_f n_g \right), \quad (1)$$

$$H_{(3)} = \sum_{f \neq m \neq g, \sigma} \frac{t_{fm}^{01} t_{mg}^{01}}{U_{eff}} (X_f^{\sigma 2} X_m^{\bar{\sigma}\sigma} X_g^{2\bar{\sigma}} - X_f^{\bar{\sigma}2} X_m^{\sigma\sigma} X_g^{2\bar{\sigma}}).$$

Здесь $J_{fg} = 2(t_{fg}^{01})^2/U_{eff}$, t_{fg}^{01} — параметр перескока между атомами f и g с переходом между зонами ЛНВ \leftrightarrow УНВ, \mathbf{S}_f — спиновый оператор, ε и ε_2 — локальные энергии одной и двух дырок, μ — химический потенциал. Внутризонные параметры перескока t_{fg}^{11} были вычислены вплоть до шестой координационной сферы и оказалось, что вклад четвертого и более удаленных соседей в закон дисперсии ничтожно мал. Обычно введение трех параметров перескока t , t' и t'' обосновывается как необходимость для подгонки дисперсии к ARPES. Однако мы видим, что есть и микроскопическое обоснование учета трех параметров t , t' и t'' . Полученные параметры модели (в эВ) для $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ равны

$$t = 0.932, \quad t' = -0.12, \quad t'' = 0.152, \\ J = 0.298, \quad J' = 0.003, \quad J'' = 0.007. \quad (2)$$

Для функции Грина дырки в УНВ ($\bar{\sigma} \equiv -\sigma$),

$$G_\sigma(\mathbf{k}, E) = \langle\langle X_{\mathbf{k}}^{\bar{\sigma}2} | X_{\mathbf{k}}^{2\bar{\sigma}} \rangle\rangle_E, \quad (3)$$

имеет место следующее точное представление (обобщенное уравнение Дайсона), получаемое при анализе полного ряда диаграмм теории возмущений для X -операторов [44]:

$$G_\sigma(\mathbf{k}, E) = \frac{P_\sigma(\mathbf{k}, E)}{E - \varepsilon_0 + \mu - P_\sigma(\mathbf{k}, E)t_{\mathbf{k}} - \sum_\sigma(\mathbf{k}, E)}, \quad (4)$$

где $t_{\mathbf{k}}$ — фурье-образ параметра перескока, $P_\sigma(\mathbf{k}, E)$ и $\sum_\sigma(\mathbf{k}, E)$ — силовой и массовый операторы. Простейшее приближение среднего поля Хаббард-I соответствует выбору $\sum_\sigma = 0$, $P_\sigma = F_{\bar{\sigma}2} = \langle X_f^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \rangle + \langle X_f^{22} \rangle$. В этом случае спектральный вес квазичастицы определяется фактором заполнения $F_{\bar{\sigma}2}$ как сумма чисел заполнения начального и конечного состояний |2) и $|\bar{\sigma}\rangle$. В диаграммной технике [45] этот фактор называется концевым множителем.

Для учета ближнего магнитного порядка выйдем за рамки приближения Хаббард-I. Метод расчета подробно описан в работе [46], где он применялся для исследования закона дисперсии в ЛНВ. Метод основан на проектировании функций Грина высших порядков на функцию (3) и является разновидностью проекционной техники Мори. Похожий метод с учетом динамики спиновых корреляций применялся в работах [23, 47]. Учитывая, что полное число дырок на молекулу $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ составляет $n_h = 1 + x$, а условие полноты базиса гильбертова пространства t - J -модели

$$\sum_\sigma X_f^{\sigma\sigma} + X_f^{22} = 1, \quad (5)$$

легко найти числа заполнения $\langle X_f^{\sigma\sigma} \rangle = (1-x)/2$, $\langle X_f^{22} \rangle = x$. Фактор заполнения при этом получается равным $F_{\sigma 2} = (1+x)/2$. В результате функция Грина (3) принимает вид

$$G_{\sigma}(\mathbf{k}, E) = \frac{(1+x)/2}{E - \varepsilon_0 + \mu - \frac{1+x}{2} t_{\mathbf{k}} - \frac{1-x^2}{4} (t_{\mathbf{k}}^{01})^2 / U_{eff} - \sum(\mathbf{k})}, \quad (6)$$

где массовый оператор

$$\begin{aligned} \sum(\mathbf{k}) = & \frac{2}{1+x} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ \left[t_{\mathbf{q}} - \frac{1-x}{2} J_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - x \frac{(t_{\mathbf{q}}^{01})^2}{U_{eff}} - (1+x) \frac{t_{\mathbf{k}}^{01} t_{\mathbf{q}}^{01}}{U_{eff}} \right] K(\mathbf{q}) + \left[t_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \frac{1-x}{2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(J_{\mathbf{q}} - \frac{(t_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{01})^2}{U_{eff}} \right) - \frac{(1+x) t_{\mathbf{k}}^{01} t_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{01}}{U_{eff}} \right] \frac{3}{2} C(\mathbf{q}) \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь $K(\mathbf{q})$ и $C(\mathbf{q})$ обозначают кинематическую и спиновую корреляционные функции,

$$K(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{f}-\mathbf{g}} e^{-i(\mathbf{f}-\mathbf{g}) \cdot \mathbf{q}} \langle X_{\mathbf{f}}^{2\bar{\sigma}} X_{\mathbf{g}}^{\bar{\sigma}2} \rangle,$$

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}) = & \sum_{\mathbf{f}-\mathbf{g}} e^{-i(\mathbf{f}-\mathbf{g}) \cdot \mathbf{q}} \langle X_{\mathbf{f}}^{\alpha\bar{\sigma}} X_{\mathbf{g}}^{\bar{\sigma}\alpha} \rangle = \\ & = 2 \sum_{\mathbf{f}-\mathbf{g}} e^{-i(\mathbf{f}-\mathbf{g}) \cdot \mathbf{q}} \langle S_{\mathbf{f}}^z S_{\mathbf{g}}^z \rangle. \quad (8) \end{aligned}$$

Для нижней хаббардовской подзоны, которая в нашем случае заполняется при электронном допировании, подобная функция Грина была получена ранее авторами работы [48]. Мы предполагаем, что спиновая жидкость изотропна и корреляционные функции для всех трех компонент спина одинаковы. Кинематические корреляторы выражаются непосредственно через электронную функцию Грина (3), а спиновый коррелятор для t - J^* -модели (с учетом трехцентровых слагаемых) был вычислен аналогично работе [48] методом, развитым для модели Гейзенберга в работах [49, 50]. Результирующая статическая магнитная восприимчивость для t - J -модели хорошо согласуется с результатами вычислений другими методами [51, 52].

Самосогласованный расчет корреляторов (8) и химического потенциала μ с параметрами (2) позволил построить семейство поверхностей Ферми для разных концентраций допирования (рис. 1). При

малом допировании имеют место четыре дырочных кармана около точек $(\pi/2, \pi/2)$, как и ожидалось для дырки в АФМ-фазе. В окрестности точки $x_{c1} \approx 0.15$ образуется перемычка на линии $(\pi, 0) - (\pi, \pi)$ и меняется топология поверхности Ферми. При $x_{c1} < x < x_{c2} \approx 0.24$ получаем две поверхности, центрированные в точке (π, π) . Меньший карман имеет электронный характер (см. ниже рис. 3) и исчезает при $x \rightarrow x_{c2}$. Большой дырочный карман с ростом x становится все более округлым, и при $x > x_{c2}$ сохраняется только он. Наконец, при $x = x_{c3}$ дырочная поверхность трансформируется в электронную с центром в точке Γ .

Следует отметить, что значения критических концентраций вычислены с конечной точностью. Во-первых, параметры t - t' - t'' - J^* -модели получены в результате сложной процедуры проектирования волновых LDA-функций на базе функций Ванье и могут несколько измениться при изменении базиса последних. Во-вторых, метод нахождения функций Грина (6) приближенный, и учет вкладов более высокого порядка может изменить количественные значения критических точек. Качественная картина, как будет показано в следующем разделе, вряд ли изменится, поскольку обусловлена общими свойствами дисперсии электрона на фоне флуктуирующего ближнего АФМ-порядка. Отметим также, что подобные изменения поверхности Ферми были получены для модели Хаббарда в более рафинированном подходе с учетом не только действительной, но и мнимой частей массового оператора (рис. 15 в работе [47]), а также при вычислениях в рамках спин-фермионной модели [53] и в модели Хаббарда с учетом флуктуаций волны спиновой плотности [54, 55]. Аналогичная трансформация с появлением двухсвязной поверхности Ферми в области промежуточных составов получена недавно в квантовохимических расчетах из первых принципов с учетом многоэлектронных $(N-1)$ -, N -, $(N+1)$ -конфигураций [56]. Качественное совпадение наших результатов с расчетами [47, 53, 56], выполненными в различных приближениях, обусловлено единством в главной идее, а именно: везде электронная структура определяется ближним магнитным порядком. Но только в нашей работе эволюция электронной структуры самосогласованно связана с эволюцией магнитного порядка.

На рис. 1 наши расчеты поверхности Ферми сравниваются с данными ARPES [57], полученными на монокристаллах $\text{Bi}_2\text{Sr}_{2-x}\text{La}_x\text{CuO}_{6+y}$ ($\text{Bi}2201$) при разной концентрации дырок p на CuO_2 -ячейку, $0.05 < p < 0.18$. Этот кристалл, как и $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$,

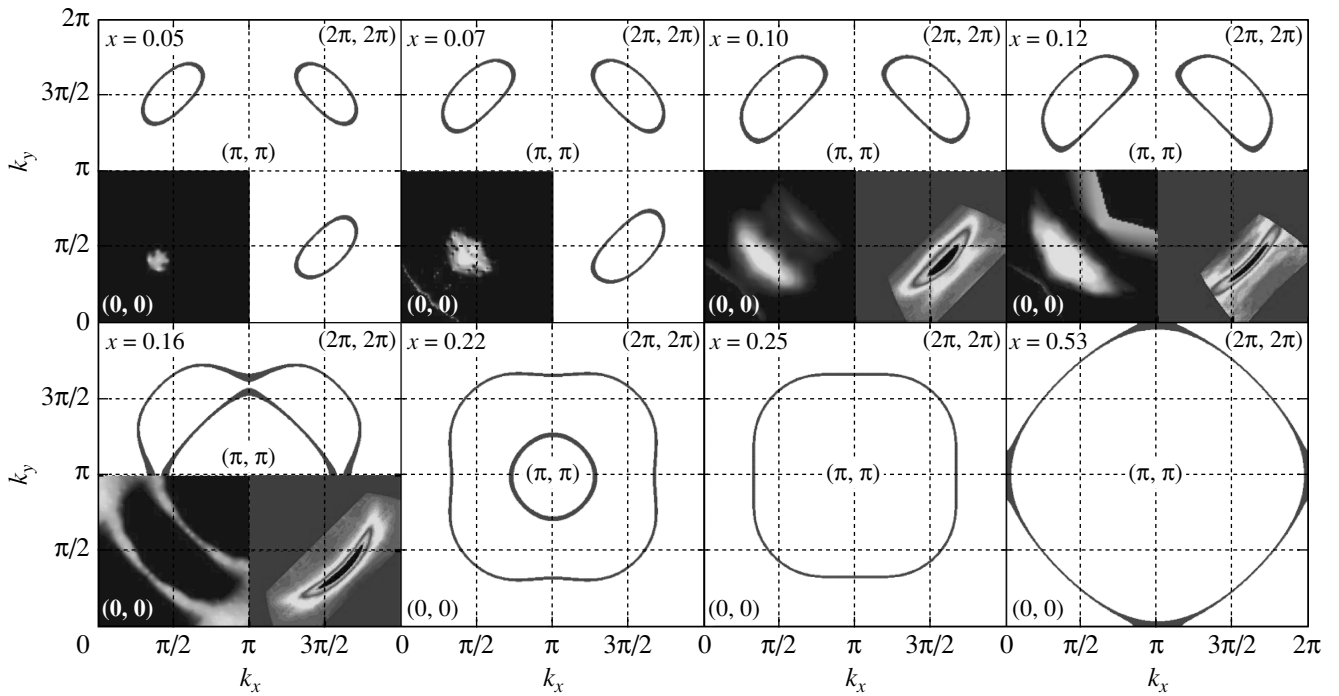


Рис. 1. Сечения поверхности Ферми в $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ при разных степенях допирования. Изменения топологии происходят при $x_{c1} \approx 0.15$, $x_{c2} \approx 0.24$. Экспериментальные данные ARPES [57] показаны в левом нижнем углу, а для $x = 0.12$ данные [17] в правом нижнем углу

имеет одну CuO_2 -плоскость в элементарной ячейке, так что наши расчеты для однослойных купратов вполне могут быть применимы с условием $p = x$. Что касается параметров модели, то в одноэлектронном подходе даже для одного вещества с разным уровнем допирования необходимо считать эти параметры сильно зависящими от концентрации, как это было сделано авторами работы [57]. И именно в отношении зависимости от допирования авторы работы [57] говорят о разнице в величинах t'/t для Bi2201 и $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ (как видно на рис. 5a и b из работы [57], при наименьшем допировании величины t'/t практически совпадают для обоих веществ). В нашем многоэлектронном подходе те же параметры вычислены из первых принципов в недопированном случае и полагаются не зависящими от допирования. Поэтому наши значения параметров перескока не обязаны совпадать с данными подгонки в одноэлектронном методе. А поскольку параметры решетки медь-кислородного слоя для Bi2201 и $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ различаются мало, мы считаем обоснованным качественное сравнение наших расчетов с экспериментом [57]. Мы видим, что при концентрации $x = 0.05, 0.07, 0.10, 0.12$ видна часть дырочного кармана (дуга), ближайшая к точке Г. Другая

часть, которая ближе к точке (π, π) , имеет малый слегка заметный спектральный вес. Однако уже при $x = 0.10, 0.12$ эта часть видна в ARPES-спектрах. Для $x = 0.12$ в правом нижнем углу показаны результаты недавних измерений ARPES со сверхвысоким разрешением [17], в котором были обнаружены слабые сигналы, сдвинутые относительно $(\pi/2, \pi/2)$ с интенсивностью, меньшей на порядок интенсивности в дуге. Тем самым экспериментально снято противоречие «дуга–карман». Для $x = 0.11$ в работе [17] также обнаружен малый карман, но его не видно для 0.10 и 0.16. Мы не видим причин, почему не должно быть кармана для $x = 0.10$, но для $x = 0.16$ ситуация другая. Для $x = 0.16$, т. е. после перехода через критическую точку, видно хорошее совпадение наших расчетов с двумя сечениями поверхности Ферми. И хотя поверхность Ферми, близкая к точке (π, π) , в монокристаллах Bi -купратов традиционно приписывается к сверхструктурным отражениям, столь хорошее совпадение нашего расчета с экспериментом вряд ли случайно. Не исключено, что сам факт формирования сверхструктуры связан с перестройкой поверхности Ферми. Другой возможный сценарий связан с тем, что сигнал ARPES от сверхструктуры маскирует одно из теоретически получен-

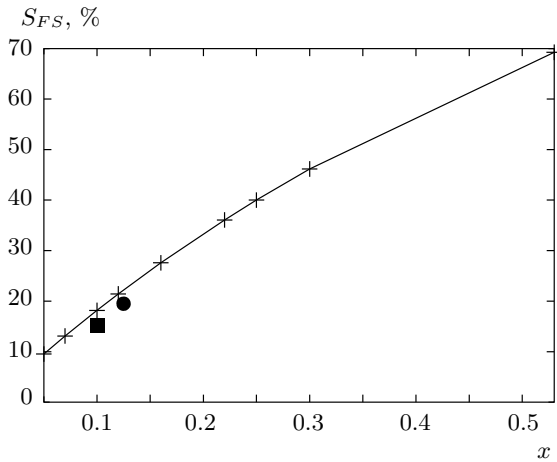


Рис. 2. Зависимость площади дырочной ферми-поверхности (в процентах от площади зоны Бриллюэна) от допирования показана крестиками. Сплошная линия соответствует предсказаниям обобщенной теоремы Латинжера [60] согласно зависимости $2x/(1+x)$. Также показаны экспериментально измеренные значения площадей из работ [10, 11] (■ — $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.5}$ ($p = 0.1$), ● — $\text{YBa}_2\text{Cu}_4\text{O}_8$ ($p = 0.125$))

ных сечений ферми-поверхности. Наконец третье, и наиболее вероятное объяснение, связано с тем, каким образом рассеяние на АФМ-флуктуациях приводит к подавлению спектральных интенсивностей пиков, соответствующих ближней к точке (π, π) ферми-поверхности. Этот сценарий мы подробно обсудим в следующем разделе.

При сильном допировании, например для $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_{6+y}$ с $p \approx 0.26$, ARPES показывает большой дырочный карман с центром в точке (π, π) [58]. Для $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ при $x = 0.22$ в ARPES найдена подобная поверхность Ферми. Наши расчеты для $x > x_{c2}$ показывают именно такую ферми-поверхность. По данным работы [59], для $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ уже при $x = 0.30$ имеет место электронный карман.

Обсудим концентрационную зависимость площади под поверхностью Ферми и ситуацию с теоремой Латинжера. На рис. 2 показана безразмерная площадь поверхности Ферми в процентах от площади зоны Бриллюэна. Следует заметить, что в обычной формулировке теорема Латинжера для хаббардовских фермионов не выполняется из-за перераспределения спектрального веса свободного электрона между различными хаббардовскими фермионами. Действительно, для свободных электронов каждая

заполненная ячейка k -пространства содержит два электрона. Для хаббардовских фермионов, для которых спектральный вес определяется в общем виде силовым оператором (числителем функции Грина (4)), а в нашем подходе фактором заполнения $F_{\bar{\sigma}2} = (1+x)/2$, каждая заполненная ячейка с учетом спина содержит не два, а $2F_{\bar{\sigma}2} = 1+x$ электронов. В результате для хаббардовских фермионов была предложена обобщенная теорема Латинжера [60], в которой каждое заполненное состояние учитывается со своим спектральным весом.

В нашем случае для $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ концентрация дырок составляет $n_h = 1+x$, а концентрация электронов равна $n_e = 1-x$. По законам дисперсии электронов для каждого уровня допирования (см. ниже рис. 3б) вычислялось число занятых электронами состояний (k) ниже уровня Ферми N_k^e . Концентрация электронов с учетом спектрального веса и после суммирования по спину равна $n_e = 2F_{\bar{\sigma}2}N_k^e = 1-x$. Отсюда находим $N_k^e = (1-x)/(1+x)$. Число занятых дырками (k) состояний равно $N_k^h = 1 - N_k^e = 2x/(1+x)$. Эта зависимость показана на рис. 2 сплошной линией, а точки получены в результате вычисления занятых электронных состояний N_k^e по закону дисперсии. Площади, полученные в экспериментах по квантовому осцилляциям, также показаны на рис. 2. Очевидно, и очень важно, что теорема Латинжера в обычной ее формулировке нарушается, что свидетельствует о неприменимости стандартной картины ферми-жидкости. Здесь же мы показываем, что обобщение теоремы Латинжера на случай сильно коррелированных хаббардовских фермионов экспериментально хорошо описывает наблюдаемую картину. Также следует отметить, что экспериментальные данные [10–12] не позволяют определить положение малых карманов в зоне Бриллюэна, поэтому именно близость измеренных и вычисленных нами площадей поверхности Ферми говорит о качественном согласии с экспериментом и может указывать на положение карманов.

3. КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА ДИСПЕРСИИ ЭЛЕКТРОНА И ARPES В СИСТЕМЕ С ФЛУКТУИРУЮЩИМ БЛИЖНИМ МАГНИТНЫМ ПОРЯДКОМ

В настоящем разделе мы воспользуемся результатами работ [13–16], в которых показано, как АФМ-флуктуации превращают дырочный карман в конечную дугу при малом допировании, и распространим эти идеи на всю область допирования, где сильны АФМ-флуктуации. Полученная картина в

целом качественно воспроизводит изменения ферми-поверхности, описанные выше.

В работе [16] показано, что для электронов на квадратной решетке, рассеивающихся на статическом случайном поле, имитирующем ближний АФМ-порядок с волновым вектором $Q = (\pi, \pi)$, функция Грина может быть записана в виде

$$G_D(\mathbf{k}, E) = \frac{E - \varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) + ivk}{(E - \varepsilon(\mathbf{k})) (E - \varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) + ivk) - |D|^2}. \quad (9)$$

Здесь $|D|$ обозначает амплитуду флуктуирующего АФМ-порядка, $\varepsilon(\mathbf{k})$ — дисперсия электронов в парамагнитном состоянии,

$$v = |v_x(\mathbf{k} + \mathbf{Q})| + |v_y(\mathbf{k} + \mathbf{Q})|, \quad (10)$$

$$v_{x,y}(\mathbf{k}) = \partial\varepsilon(\mathbf{k})/\partial k_{x,y}.$$

В отсутствие затухания функция (9) описывает электрон в состоянии волны спиновой плотности с дальним АФМ-порядком. Однако в спин-жидкостной области концентраций дальний порядок отсутствует и вместо процессов переброса $\varepsilon(\mathbf{k}) \rightarrow \varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{Q})$ имеет место динамический распад с конечным временем жизни $1/\tau \sim vk$.

На рис. 3а тонкой линией показана типичная дисперсия $\varepsilon(\mathbf{k})$, возникающая как в LDA-расчетах, так и в t - J -модели в парамагнитном состоянии. Штриховой линией показан спектр теневой зоны $\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{Q})$, зеркально отраженный от уровня Ферми. В результате расталкивания двух ветвей формируется закон дисперсии с учетом ближнего порядка (жирная линия), причем пики спектральной функции, максимумы которых соответствуют штриховой линии, имеют конечную ширину из-за конечного времени жизни. На рис. 3б изображена дисперсия при разных концентрациях, найденная из функции Грина (6) и использованная выше при расчете ферми-поверхности. Семейство изоэнергетических сечений для зонной структуры рис. 3б при $x = 0.10$ показано на рис. 3в при $x = 0.10$. Величина химического потенциала, немного меньшая нуля, на рис. 3 соответствует $x < x_{c1}$ и приводит к малым дырочным карманам около $(\pi/2, \pi/2)$. При понижении химического потенциала возникает новое пересечение с кривой, соответствующей закону дисперсии вдоль линии $(\pi, 0) - (\pi, \pi)$, что отвечает $x = x_{c1}$. Понижаясь далее, значение химического потенциала приближается к минимуму в точке (π, π) зоны (отсюда мы делаем вывод об электронной природе малого кармана около (π, π)). В точке x_{c2} электронный карман исчезает. Дальнейшее понижение химического потенциала соответствует $x > x_{c2}$ и приводит к

большому дырочному карману с центром в (π, π) . В этом качественном анализе мы использовали модель жесткой зоны. Реальный расчет на рис. 3б показывает сильную зависимость дисперсии от допирования, так что количественно модель жесткой зоны неверна. Тем не менее видно, что качественная картина на рис. 3а достаточно хорошо воспроизводит результат нашего расчета.

Используя эту качественную картину, мы можем понять влияние затухания квазичастиц на наблюдаемые в ARPES данные. Во-первых, при $x < x_{c1}$ в согласии с выводами работ [13–16, 47] видно, что в направлении $(0, 0) - (\pi, \pi)$ имеются два пересечения с дырочным карманом. Ближний к точке Γ формируется в основном зоной $\varepsilon(\mathbf{k})$ без затухания, а ближний к точке (π, π) обусловлен вкладом затухающих состояний теневой зоны $\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{Q})$. Для этих состояний затухание размывает спектральный пик, поэтому они не видны в ARPES, а видны только дуги. Уменьшение спектрального веса квазичастиц без их затухания для участка теневой зоны на дырочном кармане, также объясняющее формирование дуги, было получено для спиновых поляронов в работе [53].

Во-вторых, мы можем распространить этот анализ и на область $x > x_{c1}$. Видно, что большой карман формируется незатухающими электронами, а малый внутренний — затухающими. По-видимому, поэтому он не проявляется в ARPES. В то же время при приближении $x \rightarrow x_{c2}$ импульс Ферми $\mathbf{k}_F \rightarrow (\pi, \pi)$. В этой точке согласно формулам (10) скорость $v = 0$. Таким образом, малый электронный карман при $x \rightarrow x_{c2}$ формируется слабо затухающими квазичастицами. При $x > x_{c2}$ большой дырочный карман формируется незатухающими квазичастицами и хорошо проявляется в ARPES.

Дальнейшая трансформация дырочной поверхности Ферми в электронную при $x = x_{c3}$ (по данным [59] для $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ уже при $x = 0.30$ имеет место электронная ферми-поверхность) происходит в области сильного допирования, где магнитная корреляционная длина сравнима с параметрами решетки. В этом случае анализ на основе функции Грина (9) уже неприменим. Наш расчет с функцией (6) хотя и показывает изменения типа ферми-поверхности от дырочного к электронному в точке x_{c3} , но само значение $x_{c3} = 0.53$ слишком велико по сравнению с экспериментальным. Это и не удивительно, ибо теория возмущений в представлении X -операторов применима в допированном моттовском диэлектрике при малых x .

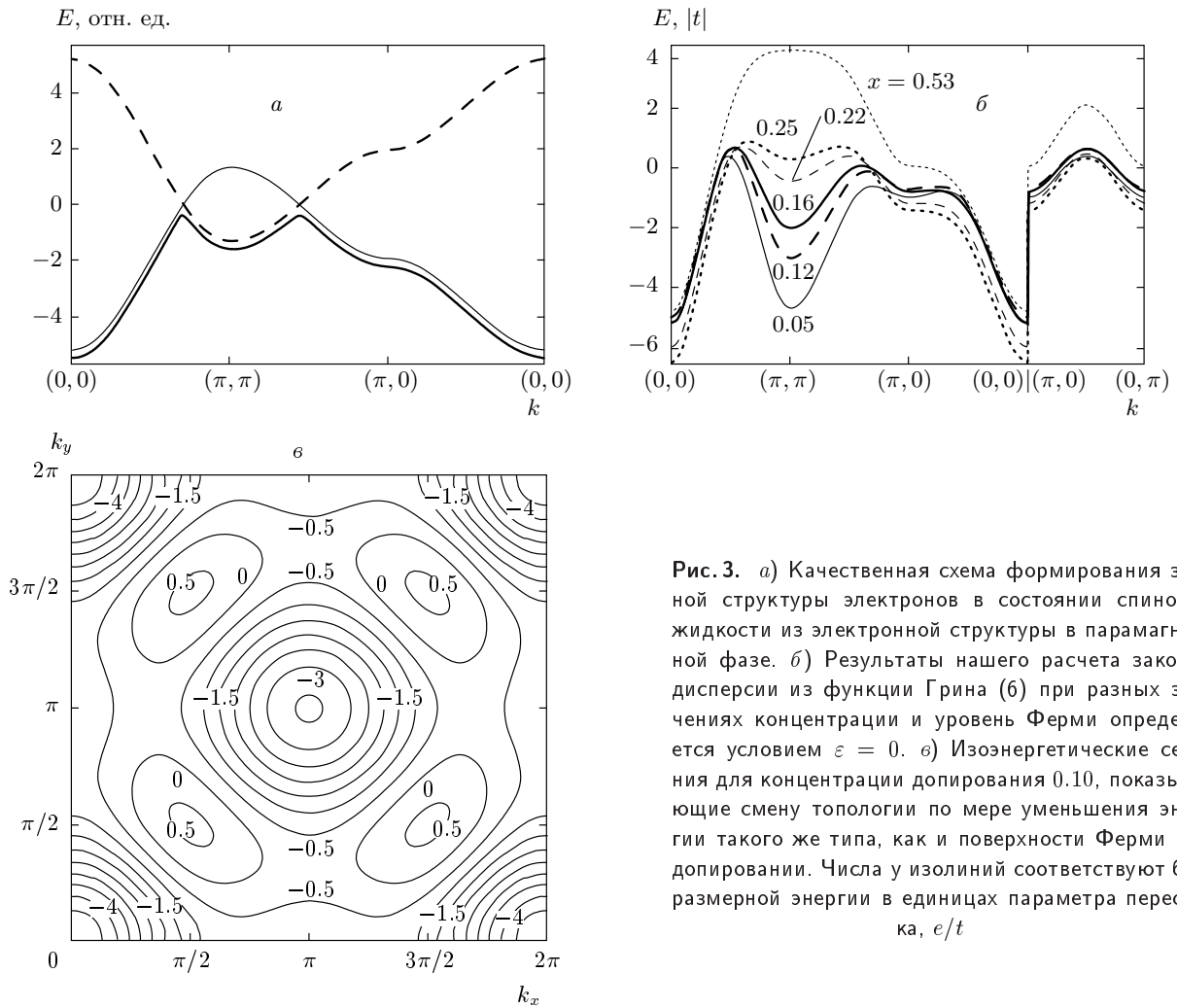


Рис. 3. а) Качественная схема формирования зонной структуры электронов в состоянии спиновой жидкости из электронной структуры в парамагнитной фазе. б) Результаты нашего расчета законов дисперсии из функции Грина (6) при разных значениях концентрации и уровень Ферми определяется условием $\varepsilon = 0$. в) Изоэнергетические сечения для концентрации допирования 0.10, показывающие смену топологии по мере уменьшения энергии такого же типа, как и поверхности Ферми при допировании. Числа у изолиний соответствуют безразмерной энергии в единицах параметра перескока, e/t

4. ОСОБЕННОСТИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ ЛИФШИЦА

Как показано в предыдущих разделах, с ростом допирования в точке x_{c1} возникает перемигчка на ферми-поверхности, а в точке x_{c2} исчезает электронный карман. Обе эти особенности топологии поверхности Ферми приводят к электронным фазовым переходам 2.5 рода согласно работам Лифшица [38, 39], или, в современной терминологии, к квантовым фазовым переходам. Появление новой полости поверхности Ферми при $\varepsilon = \varepsilon_c$ приводит к добавлению плотности состояний $\delta g(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon - \varepsilon_c)^{1/2}$. Заметим, что закон дисперсии в купратах трехмерен, несмотря на резко выраженную анизотропию. Слабые перескоки между слоями приводят к гофриров-

ке поверхности Ферми вдоль вектора k_z , наблюдаемой в ARPES. Например, разные сечения поверхности Ферми обсуждаются в работе [33] на основе LDA-расчетов и данных ARPES. Поэтому мы можем воспользоваться результатами [38, 39] с минимальными изменениями. Эти изменения обусловлены уменьшением спектрального веса хаббардовских фермионов, описываемым фактором заполнения $F = (1 + x)/2$ и стоящим в числителе функции Грина (6).

В окрестности критической точки термодинамический потенциал имеет вид

$$\Omega(\mu, T) = \Omega_0(\mu, T) + \delta\Omega. \tag{11}$$

Добавка за счет появления новой полости при $\varepsilon > \varepsilon_c$ может быть записана как

$$\delta\Omega = - \int_0^{\infty} \delta N(\varepsilon) f_F(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (12)$$

где $f_F(\varepsilon)$ — фермиевская функция распределения, а число состояний с учетом спектрального веса равно ($\alpha \sim 1$)

$$\delta N(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon < \varepsilon_c, \\ \frac{2}{3} \alpha \frac{1+x}{2} (\varepsilon - \varepsilon_c)^{3/2}, & \varepsilon > \varepsilon_c. \end{cases} \quad (13)$$

В результате при $T \ll z$, где $z = \mu - \varepsilon_c$, вблизи $z = 0$ получаем

$$\delta\Omega = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\pi}}{4} (1+x) \alpha T^{5/2} e^{-|z|/T}, & z < 0, \\ -\frac{2}{15} (1+x) \alpha |z|^{5/2} - \frac{\pi^2}{12} (1+x) T^2 |z|^{1/2}, & z > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Сингулярность $z^{5/2}$ и говорит о переходе 2.5 рода по классификации Эренфеста. В нашем случае z меняется в зависимости от допирования, $z(x) = 0$ при $x = x_{c1}$ и $x = x_{c2}$.

Для скачка параметра Зоммерфельда $\gamma = C_e/T$, где C_e — электронная теплоемкость, в окрестности перехода Лифшица легко показать, что

$$\delta\gamma = -\frac{\partial^2 \delta F}{\partial T^2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{4} (1+x) \alpha \frac{|z|^2}{T^2} \left(1 + 3 \frac{T}{|z|} + \frac{15}{4} \frac{T^2}{|z|^2} \right) \times e^{-|z|/T}, & z < 0, \\ \frac{\pi^2}{6} (1+x) \alpha z^{1/2}, & z > 0. \end{cases} \quad (15)$$

Из расчетов электронной структуры, приведенных выше, мы нашли зависимость $z(x)$ вблизи каждой из критических точек. Эта зависимость близка к линейной. На рис. 4 показано поведение электронной теплоемкости вблизи $x = x_{c1}$, рассчитанное для $T = 10$ К. Экспериментальные точки построены из температурных зависимостей $\gamma = C_e/T$ для разных x в $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ [40]. Теплоемкость, а также электронный вклад в энтропию в нормальной фазе получались путем экстраполяции измерений выше температуры сверхпроводящего перехода T_c на область

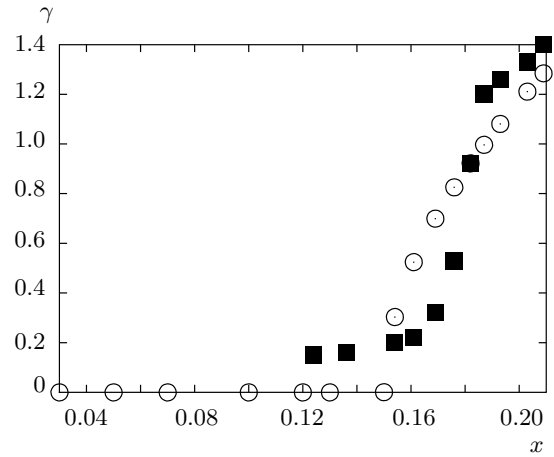


Рис. 4. Изменение параметра Зоммерфельда в окрестности перехода Лифшица (○), экспериментальные данные для $\gamma = C_e/T$ при $T = 10$ К (■) взяты из работы [40]

низких температур. Экспериментальные точки на рис. 4 соответствуют полному параметру γ , равному в окрестности перехода

$$\gamma(x) = \gamma_0(x) + \delta\gamma, \quad (16)$$

где γ_0 — плавная в окрестности перехода функция x , а $\delta\gamma$ содержит корневую особенность (15). Зависимость спектрального веса от допирования также вносит свой вклад в концентрационную зависимость особенности теплоемкости.

В окрестности второго перехода Лифшица, $x = x_{c2}$, имеются аналогичные зависимости термодинамических величин. Поскольку электронный карман пропадает с ростом x , при $x < x_{c2}$ имеем $z > 0$. Так как нам неизвестны подробные экспериментальные данные в окрестности x_{c2} с достаточным числом точек по x , а также потому, что зависимость особой части $\delta\gamma$ дается той же формулой (15), мы не приводим графика в окрестности x_{c2} . Существует более поздняя работа по измерению электронной теплоемкости в $\text{NdBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+y}$ [61], на рис. 9 которой приведена концентрационная зависимость $\gamma(x)$ со слабыми особенностями вблизи $p = 0.16$ и $p = 0.23$, соответствующим нашим критическим точкам x_{c1} и x_{c2} . Однако измерения в работе [61] сделаны при $T = 200$ К, поэтому все особенности очень размыты.

Серия перестроек поверхности Ферми с допированием была получена еще раньше в рамках вариационного решения t - J -модели в работе [29]. В AFM-фазе в этой работе получен малый дырочный

карман около точки $(\pi/2, \pi/2)$. Также при очень большом x получен электронный карман с центром в точке $(0, 0)$. Однако ферми-поверхность при промежуточных x не соответствует ни нашей, ни экспериментально наблюдаемой. Квантовый переход Лифшица в купратах обсуждался ранее в литературе, в основном, в связи с изменением типа поверхности Ферми с дырочного на электронный, что имеет место в одноэлектронных расчетах при пересечении уровнем Ферми седловой точки $(0, \pi)$ [62]. В нашем случае это переход в точке x_{c3} . Переходы с появлением электронного кармана в точке x_{c1} и его коллапса в точке x_{c2} , насколько нам известно, не обсуждались.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последнее время в литературе много дискуссий посвящено смене знака носителей при допировании. При большом x дырочная поверхность Ферми переходит в электронную, это получено многими авторами теоретически, а также обнаружено экспериментально в пленках $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ при $x > 0.30$ [63]. Более удивительны сообщения об изменении знака константы Холла R_H для слабодопированных купратов. Например, в сильных магнитных полях 50–60 Тл, подавляющих сверхпроводимость, смена знака R_H наблюдалась для $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$ с $p = 0.10, 0.12, 0.14$ [64], а также в $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ с $p = 0.11$ [65]. Все эти образцы относятся к области $x < x_{c1}$, где, судя по нашим расчетам, присутствует только дырочный карман. Возможно, что результаты работы [66] могут дать качественное объяснение наблюдаемому эффекту. Согласно работе [66], для двумерных металлов с произвольной геометрией поверхности Ферми выпуклые и вогнутые части поверхности дают противоположные знаки константы Холла. В нашем случае для $x < x_{c1}$ одна сторона дырочного кармана выпукла, а другая — вогнута (см. рис. 1).

Что касается второго перехода Лифшица при $x = x_{c2}$, то измерения низкотемпературных транспортных свойств $\text{La}_{1.6-x}\text{Nd}_{0.4}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ в сильных магнитных полях до 35 Тл, подавляющих сверхпроводимость, выявили изменение поверхности Ферми в критической точке $p^* \approx 0.23$ [67], что очень близко к нашей точке x_{c2} . При этом в согласии с нашими результатами, при $p = 0.24$ измерения R_H указывают на большую цилиндрическую поверхность, содержащую $1 + p$ дырок. А при $p = 0.20$, т. е. меньше x_{c2} , рост $R_H(T)$ при низких температурах указыва-

ет на модификацию поверхности Ферми. Отметим, что сама критическая точка x_{c2} для системы Bi2201 может быть сопоставлена с концентрацией $p_c = 0.23$, при которой в ARPES-экспериментах уровень Ферми совпадает с особенностью Ван Хова [68, 69].

В литературе существует много дискуссий о наличии квантовой критической точки, в которую упирается температура псевдощели $T^*(x)$ при стремлении T к нулю, можно встретить $P_{crit} = 0.19$ [70] и $P_{crit} = 0.27$ [71]. Все эти данные основаны на экстраполяции, поэтому точность их определения невелика. К тому же псевдощель вряд ли является свойством основного состояния [8]. Полученные нами критические точки есть свойство основного состояния и связаны с квантовыми фазовыми переходами 2.5 рода Лифшица.

Авторы благодарят А. А. Кордюка за обсуждение результатов, а также Т. М. Овчинникову за техническую помощь в обработке данных. Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Квантовая физика конденсированных сред» (проект № 5.7), интеграционного проекта № 40 СО РАН-УрО РАН, а также при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00127).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Dagotto, Rev. Mod. Phys. **66**, 763 (1994).
2. Е. Г. Максимов, УФН **170**, 1033 (2000).
3. M. Imada, A. Fujimori, and Y. Tokura, Rev. Mod. Phys. **70**, 1039 (1998).
4. С. Г. Овчинников, УФН **167**, 1043 (1997).
5. М. В. Садовский, УФН **171**, 540 (2001).
6. В. Ф. Елесин, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, УФН **174**, 1017 (2004).
7. Ю. А. Изюмов, Э. З. Курмаев, УФН **178**, 25 (2008).
8. P. A. Lee, Rep. Progr. Phys. **71**, 012501 (2008).
9. A. Damascelli, Z. Hussein, and Z. X. Shen, Rev. Mod. Phys. **75**, 473 (2003).
10. N. Doiron-Leyrand et al., Nature **447**, 565 (2007).
11. E. A. Yelland, J. Singleton, C. H. Mielke, N. Narrison, F. F. Balakirev, B. Dabrowski, and J. R. Cooper, Phys. Rev. Lett. **100**, 047003 (2008).
12. A. F. Bangura, J. D. Fletcher, A. Carrington et al., Phys. Rev. Lett. **100**, 047004 (2008).

13. E. Z. Kuchinskii, I. A. Nekrasov, and M. V. Sadovskii, *Письма в ЖЭТФ* **82**, 217 (2005).
14. E. Z. Kuchinskii and M. V. Sadovskii, *ЖЭТФ* **130**, 447 (2006).
15. N. Harrison, R. D. McDonald, and J. Singleton, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 206406 (2007).
16. E. Z. Kuchinskii and M. V. Sadovskii, *Письма в ЖЭТФ* **88**, 224 (2008).
17. J. Meng, G. Liu, W. Zhang et al., arXiv:0906.2682.
18. М. Ю. Каган, К. И. Кугель, *УФН* **171**, 577 (2001).
19. S. G. Ovchinnikov and I. S. Sandalov, *Physica C* **161**, 607 (1989).
20. S. V. Lovtsov and V. Yu. Yushankhai, *Physica C* **179**, 159 (1991).
21. J. H. Jefferson, H. Eskes, and L. F. Feiner, *Phys. Rev. B* **45**, 7959 (1992).
22. V. I. Belinicher, A. L. Chernyshev, and V. A. Shubin, *Phys. Rev. B* **53**, 335 (1996).
23. N. M. Plakida and V. S. Oudovenko, *Phys. Rev. B* **59**, 11949 (1999).
24. М. М. Коршунов, V. A. Gavrichkov, S. G. Ovchinnikov, I. A. Nekrasov, Z. V. Pchelkina, and V. I. Anisimov, *Phys. Rev. B* **72**, 165104 (2005).
25. W. Stephan and P. Horsch, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2258 (1991).
26. R. Preuss, W. Hanke, and W. von der Linden, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1344 (1995).
27. В. Ф. Елесин, В. А. Кошурников, *ЖЭТФ* **106**, 1773 (1994).
28. B. I. Shraiman and E. D. Siggia, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 467 (1988).
29. S. A. Trugman, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 500 (1990).
30. А. Ф. Барабанов и др., *СФХТ* **3**, 8 (1990).
31. A. F. Barabanov, R. O. Kuzian, and L. A. Maksimov, *J. Phys.: Condens. Matter.* **39**, 129 (1991).
32. A. P. Kampf, *Phys. Rev.* **249**, 219 (1994).
33. G. Dorf, A. Muramatsu, and W. Hanke, *Phys. Rev. B* **41**, 9264 (1990).
34. S. Sahrakorpi, R. S. Markiewicz, H. Lin et al., *Phys. Rev. B* **78**, 104513 (2008).
35. T. R. Thurston, R. J. Birgeneau, M. A. Kastner et al., *Phys. Rev. B* **40**, 4585 (1989).
36. S. M. Haden et al., *Phys. Rev. Lett.* **66**, 821 (1991).
37. D. Mihailovic and V. V. Kabanov, *Superconductivity In Complex Systems* **114**, 331 (2005).
38. И. М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **38**, 1569 (1960).
39. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
40. J. W. Loram, J. Luo, J. R. Cooper, W. Y. Liang, and J. L. Tallon, *Phys. Chem. Sol.* **62**, 59 (2001).
41. Ya. B. Gaididei and V. M. Loktev, *Phys. St. Sol. B* **147**, 307 (1988).
42. В. А. Гавричков, С. Г. Овчинников, А. А. Борисов, Е. Г. Горячев, *ЖЭТФ* **118**, 422 (2000).
43. J. Zaanen, G. A. Sawatzky, and J. W. Allen, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 418 (1985).
44. В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, *Квазичастицы в сильно коррелированных системах*, Изд-во СО РАН, Новосибирск (2001).
45. Р. О. Зайцев, *ЖЭТФ* **68**, 207 (1975).
46. М. М. Korshunov and S. G. Ovchinnikov, *Eur. Phys. J. B* **57**, 271 (2007).
47. N. M. Plakida and V. S. Oudovenko, *ЖЭТФ* **131**, 259 (2007).
48. В. В. Вальков, Д. М. Дзедзисашвили, *ЖЭТФ* **127**, 686 (2005).
49. H. Shimahara and S. Takada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60**, 2394 (1991); **61**, 989 (1992).
50. А. Ф. Барабанов, В. М. Березовский, *ЖЭТФ* **106**, 1156 (1994).
51. A. Sherman and M. Schreiber, *Phys. Rev. B* **65**, 134520 (2002).
52. А. А. Владимиров, Д. Иле, Н. М. Плакида, *ТМФ* **145**, 240 (2005).
53. А. Ф. Барабанов, А. А. Ковалев, О. В. Уразаев, А. М. Белемук, Р. Хайн, *ЖЭТФ* **119**, 777 (2001).
54. S. Sachdev, A. V. Chubukov, and A. Sokol, *Phys. Rev. B* **51**, 14874 (1995).
55. A. V. Chubukov and D. K. Morr, *Phys. Rep.* **288**, 355 (1997).
56. L. Hozoi, M. S. Laad, and P. Fulde, *Phys. Rev. B* **78**, 165107 (2008).
57. M. Hashimoto, T. Yoshida, H. Yagi et al., *Phys. Rev. B* **77**, 094516 (2008).

58. M. Plate, J. D. F. Mottershead, I. S. Elfimov et al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 077001 (2005).
59. A. Ino, C. Kim, M. Nakamura et al., *Phys. Rev. B* **65**, 094504 (2002).
60. М. М. Коршунов, С. Г. Овчинников, *ФТТ* **45**, 1351 (2003).
61. U. Tutsch, P. Schweiss, H. Wühe, B. Obst, and Th. Wolf, *Eur. Phys. J. B* **41**, 471 (2004).
62. F. Onufrieva and P. Pfeuty, *Phys. Rev. B* **61**, 799 (2000).
63. I. Tsukada and S. Ono, *Phys. Rev. B* **74**, 134508 (2006).
64. D. Le Boeuf, N. Doiron-Leyraud, J. Levallois et al., *Nature* **450**, 533 (2003).
65. T. Adachi, T. Noji, and Y. Koike, *Phys. Rev. B* **64**, 144524 (2001).
66. N. P. Ong, *Phys. Rev. B* **43**, 193 (1991).
67. R. Daon, N. Doiron-Leyraud, D. Le Boeuf et al., *Nature Phys.* **5**, 31 (2009).
68. A. Kaminski, S. Rosenkranz, N. M. Fretweel et al., *Phys. Rev. B* **73**, 174511 (2006).
69. A. A. Kordyuk, S. V. Borisenko, M. Khupfer, and J. Fink, *Phys. Rev. B* **67**, 064504 (2003).
70. J. G. Storey, J. L. Tallon, and G. V. M. Williams, *Phys. Rev. B* **78**, 140506(R) (2008).
71. S. Hufner, M. A. Hossain, A. Damascelly, and G. A. Sawatzky, *Rep. Progr. Phys.* **71**, 062501 (2008).