

# СТРУКТУРА КИЛЬВАТЕРНОГО СЛЕДА ЗА ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ БАРЬЕРАМИ, ДВИЖУЩИМИСЯ В БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ

*В. А. Миронов, А. И. Смирнов\*, Л. А. Смирнов\*\**

*Институт прикладной физики Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 8 октября 2009 г.

В рамках уравнения Гросса–Питаевского рассмотрена задача о возбуждении однородного бозе-эйнштейновского конденсата аксиально-симметричными потенциальными барьерами, движущимися относительно конденсата как со сверхзвуковыми, так и с дозвуковыми скоростями. Для обоих режимов движения проанализированы особенности структуры оставляемого барьерами «кильватерного» следа.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Обтекание жидкостью и газом препятствий относится к одной из классических задач гидро- и газодинамики. Для ультрахолодных газов в состоянии бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) она имеет свои особенности. Динамика БЭК хорошо описывается (не только качественно, но и количественно) в приближении среднего поля с помощью волновой функции, удовлетворяющей так называемому уравнению Гросса–Питаевского (ГП) [1–3]. Формально такой конденсат представляет собой сжимаемую жидкость со специфическим «квантовомеханическим давлением». При наличии отталкивания между атомами в БЭК наряду с линейными волнами плотности существуют локализованные в пространстве нелинейные образования в виде «темных» солитонов и вихрей [4–7]. Все они в той или иной степени могут возбуждаться в процессе взаимодействия движущихся объектов с конденсатом (или, что по существу то же самое, потока конденсата с неподвижными объектами). Следует особо отметить, что для понимания многих процессов, происходящих в БЭК, полезной и весьма конструктивной является аналогия между уравнением ГП и нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) в классической физике (нелинейной оптике, физике плазмы и др.) [8].

Характер взаимодействия БЭК с препятствием существенно зависит от скорости относительного движения. Если эта скорость мала (заметно меньше звуковой), то реализуется ламинарный режим обтекания, для которого характерно отсутствие сопротивления. Он разрушается еще при дозвуковом движении объекта из-за генерации вихревых пар [9–15]. При сверхзвуковом движении начинают излучаться волны плотности [13, 16–19], а за препятствием образуются вытянутые провалы концентрации, по мере удаления от объекта дробящиеся на отдельные каверны [20, 21]. Детальному исследованию перечисленных эффектов по существу и посвящена данная работа. В ней проведен аналитический и численный анализ структуры поля излучения и «кильватерного» следа от двумерных потенциальных барьеров, движущихся в однородном БЭК как со сверхзвуковыми, так и с дозвуковыми скоростями. Роль таких барьеров, в частности, могут играть сфокусированные лазерные пучки, используемые в экспериментах [16, 22–25] в качестве «инструмента» воздействия на конденсат. Приведем кратко содержание статьи.

В разд. 2 дана математическая постановка задачи и сформулированы основные уравнения для случая, когда препятствие может быть как проницаемым, так и непроницаемым для конденсата. Генерация волн плотности в БЭК при сверхзвуковом движении потенциальных барьеров в рамках линейного приближения обсуждается в разд. 3. Основное внимание здесь уделяется структуре поля из-

\*E-mail: smirnov@appl.sci.nnov.ru

\*\*E-mail: smirnov\_lev@appl.sci.nnov.ru

лучения больших (по сравнению с так называемым корреляционным радиусом) объектов. Особенности кильватерного следа за сверхзвуковыми препятствиями при учете нелинейности исследуются в разд. 4, где, в частности, на основании решения обратной задачи рассеяния получена зависимость числа квазиодномерных провалов концентрации, образующихся за барьером, от ширины последнего. В разд. 5 проанализирован дозвуковой случай. Его отличительной чертой является наличие критической скорости, при превышении которой ламинарное (чисто потенциальное) течение становится неустойчивым, а в кильватерном следе развивается турбулентность, характеризующаяся интенсивной генерацией вихрей и их исчезновением, сопровождающимся излучением звуковых волн. В Приложение вынесены сведения о двумерных солитоноподобных структурах, описываемых уравнением ГП.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ БЭК. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Волновая функция  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  исходно однородного конденсата в приближении среднего поля удовлетворяет уравнению Гросса–Питаевского (ГП), которое в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$i\partial_t\Psi + \frac{\Delta\Psi}{2} + (1 - |\Psi|^2)\Psi = V(\mathbf{r}, t)\Psi. \quad (1)$$

Здесь координаты  $\mathbf{r}$  нормированы на корреляционный радиус  $r_0 = \hbar/\sqrt{mgn_0}$ ,  $t$  — на время  $t_0$  ( $t_0 = r_0/c_s$ ) пробега корреляционного радиуса со скоростью звука  $c_s = \sqrt{gn_0/m}$ , волновая функция  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  — на  $\sqrt{n_0}$ , а воздействующий на конденсат внешний потенциал  $V(\mathbf{r}, t)$  — на  $gn_0$ , где  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$  определяется длиной  $s$ -рассеяния  $a$  атомов друг на друге,  $n_0$  — значение концентрации невозмущенного конденсата,  $m$  — масса одного бозона. При этом длину рассеяния  $a$  считаем положительной величиной ( $a > 0$ ), что соответствует взаимному отталкиванию между атомами конденсата. Кроме того, ограничимся двумерной задачей:  $\mathbf{r} = (x, y)$ , предположив, что от координаты  $z$  ничего не зависит.

В данной работе в рамках уравнения (1) будет рассмотрен процесс возбуждения исходно однородного БЭК двумерными потенциальными барьерами  $V(\mathbf{r}, t)$ . При численном моделировании эти барьеры задавались в виде гауссовой функции, которая возникает скачком в момент времени  $t = 0$  и затем смещается вдоль координаты  $x$  с постоянной скоростью  $M$ , в безразмерных переменных равной числу Маха

(отношению скорости препятствия к скорости звука в среде):

$$V(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ V_{max} \exp\left(-\frac{\xi^2 + y^2}{\delta^2}\right), & t \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\xi = (x - Mt)$ ,  $\delta$  — характерный размер потенциала.

При решении уравнения ГП (1) и физической интерпретации результатов часто бывает полезно перейти с помощью преобразования Маделунга

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) \exp(i\theta(\mathbf{r}, t))$$

к уравнениям гидродинамики сжимаемой невязкой жидкости, которые в области, где  $V(\mathbf{r}, t) \approx 0$ , принимают следующий вид:

$$\partial_t\psi^2 + \text{div}(\psi^2\nabla\theta) = 0, \quad (3)$$

$$\partial_t\theta + (\nabla\theta)^2/2 = 1 - \psi^2 + \Delta\psi/2\psi. \quad (4)$$

Здесь  $\psi(\mathbf{r}, t)$  и  $\theta(\mathbf{r}, t)$  — действительные функции координат и времени, имеющие четкий физический смысл:  $n(\mathbf{r}, t) = \psi^2$  — концентрация атомов конденсата,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla\theta$  — их скорость, а со слагаемым  $\Delta\psi/2\psi$  связывают так называемое «квантовомеханическое давление».

## 3. ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛН ПЛОТНОСТИ ДВИЖУЩИМСЯ ПОТЕНЦИАЛОМ (ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

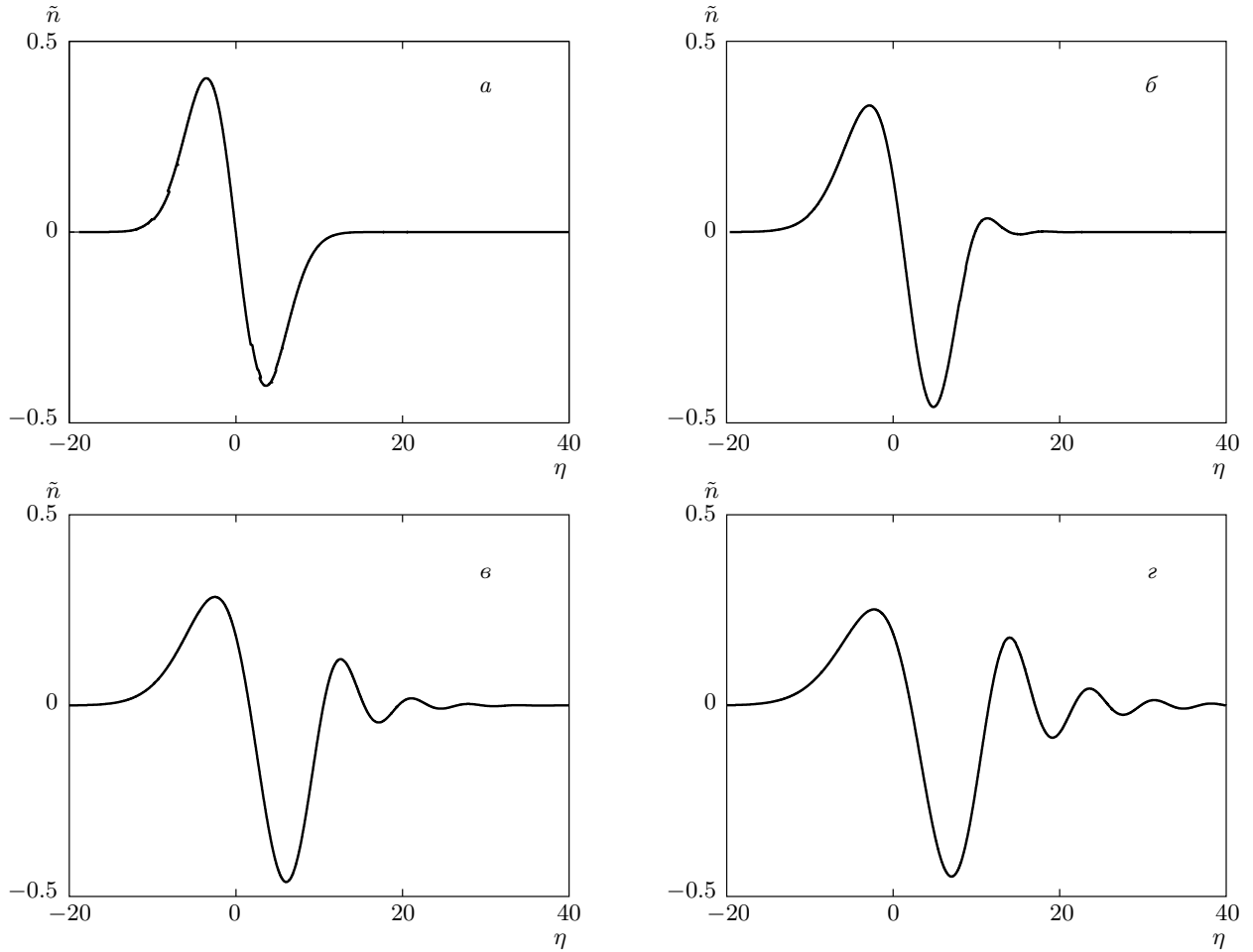
Будем считать потенциальный барьер  $V(\mathbf{r}, t)$  настолько слабым, что связанные с ним возмущения концентрации БЭК всюду малы:  $n(\mathbf{r}, t) = 1 + \tilde{n}(\mathbf{r}, t)$ , где  $|\tilde{n}| \ll 1$ . Линеаризуя уравнение (1) около стационарного состояния, в безразмерных переменных равного единице, после несложных преобразований получаем уравнение для возмущения плотности конденсата  $\tilde{n}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\partial_{tt}^2\tilde{n} - \Delta\tilde{n} + \Delta\Delta\tilde{n}/4 = \Delta V(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

из которого, в частности, видно, что собственные волны плотности БЭК имеют так называемый болюбовский спектр:

$$\omega = k\sqrt{1 + k^2/4}. \quad (6)$$

Правую часть в уравнении (5) можно рассматривать как движущийся сторонний источник. Когда  $M > 1$ , этот источник способен излучать волны плотности (черенковское излучение). Их частоты  $\omega$



**Рис. 1.** Рассчитанное в рамках линейного приближения распределение возмущения концентрации БЭК  $\tilde{n}_{1(2)} \equiv \tilde{n}$  в сечениях, поперечных к образующим конуса Маха, при различных расстояниях  $l_{1(2)} \equiv l = 0$  (а), 100 (б), 200 (в), 300 (г) от потенциального барьера, движущегося со скоростью  $M = 3$  и имеющего характерный масштаб  $\delta = 5$  и амплитуду  $V_{max} = 0.75$

связаны с волновыми векторами  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  и скоростью движения потенциала  $\mathbf{v}_0 = M \mathbf{x}_0$  условием черенковского синхронизма:  $\omega = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}$ , из которого с учетом (6) следует соотношение

$$M \cos \gamma = \sqrt{1 + k^2/4}, \quad (7)$$

где  $\gamma$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $x$ .

Из формулы (7) видно, что в сверхзвуковом режиме ( $M > 1$ ) линейные волны плотности излучаются в направлении движения возбуждающего потенциала под углами  $|\gamma| \leq \arccos(1/M)$  к оси  $x$ , причем чем меньше  $|\gamma|$ , тем больше частота и меньше длина волны. Строго в направлении движения ( $\gamma = 0$ ) длина волны излучения равна  $\pi/\sqrt{M^2 - 1}$ , а при  $\gamma = \pm \arccos(1/M)$  обращается в бесконечность.

Фазовая скорость описываемых дисперсионным

соотношением (6) волн всегда больше скорости звука, а их групповая скорость, в свою очередь, превосходит фазовую, поэтому возмущения концентрации обгоняют источник, а за барьером внутри конуса Маха с углом раствора  $2\beta$  ( $\sin \beta = 1/M$ ,  $\beta$  — угол Маха) все описываемые линейной теорией возмущения отсутствуют.

Заметим, что барьер (2) эффективно возбуждает волны плотности с волновыми векторами  $\mathbf{k}$  в пределах своей спектральной полосы  $\Delta k \sim \delta^{-1}$  ( $|\mathbf{k}| < \Delta k$ ). Учитывая это обстоятельство, из соотношения (7) получаем следующее неравенство:  $M \cos \gamma < \sqrt{1 + (2\delta)^{-2}}$ , согласно которому при  $M > \sqrt{1 + (2\delta)^{-2}}$  потенциал перестает излучать вперед, о чем свидетельствуют, в частности, и численные расчеты (рис. 1). Из данного неравенства вид-

но, что широкие барьеры с  $\delta \gg 1$  (и соответственно с  $\Delta k \ll 1$ ) возбуждают только волны с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ , направленными практически перпендикулярно конусу Маха. На этом случае мы подробнее остановимся ниже. Он отличается от рассмотренных в работах [18, 19] точечных потенциалов в виде  $\delta$ -функции и более адекватен экспериментам с воздействием лазерных пучков на БЭК [16, 25].

Когда  $M < 1$ , в боголюбовском спектре (6) не существует мод, связанных с источником условием черенковского синхронизма (7). Таким образом, при дозвуковом движении барьер не излучает, а значит, в БЭК отсутствуют диссипативные процессы. Правда, данное утверждение базируется на линейной теории и при учете нелинейности может нарушаться (см. разд. 5).

Итак, пусть возмущающий потенциал локализован в области с пространственным масштабом  $\delta \gg 1$ . При этом слагаемое  $\Delta\Delta\tilde{n}/4$  в формуле (5) можно рассматривать как малую поправку, которой можно пренебречь на расстояниях от центра барьера порядка его ширины  $\delta$ . В этой области пространства с точностью до членов порядка  $\delta^{-4}$  для «установившихся» стационарных решений  $\tilde{n}(\xi, y)$ , зависящих от переменных  $\xi$  и  $y$ , из (5) получаем следующее приближенное уравнение:

$$(M^2 - 1) \partial_{\xi\xi}^2 \tilde{n} - \partial_{yy}^2 \tilde{n} = \partial_{\xi\xi}^2 V(\xi, y) + \partial_{yy}^2 V(\xi, y). \quad (8)$$

При сверхзвуковом режиме движения потенциала ( $M > 1$ ), когда есть черенковское излучение, уравнение (8) является гиперболическим. Его можно решить стандартными методами и получить, что сразу же за потенциальным барьером вне области его локализации возмущения концентрации  $\tilde{n}$  сосредоточены вблизи прямых  $\xi = \pm y \operatorname{tg} \beta$ :

$$\tilde{n} = \bar{n}_1(\eta_1) + \bar{n}_2(\eta_2),$$

$$\bar{n}_{1(2)}(\eta_{1(2)}) = \frac{1}{4 \cos^2 \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_{1(2)}} d\eta_{2(1)}, \quad (9)$$

где  $\eta_{1(2)} = \xi \sin \beta \pm y \cos \beta$  (линии  $\eta_{1(2)} = \text{const}$  являются характеристиками волнового уравнения (8)).

Из-за отброшенного в (8) дисперсионного слагаемого  $\Delta\Delta\tilde{n}/4$  структура возмущений при удалении от барьера будет искажаться. Для того чтобы проследить их эволюцию, предположим, что они слабо («медленно») зависят от расстояний  $\ell_{1(2)} = -\xi \cos \beta \pm y \sin \beta$  вдоль соответствующих характеристик уравнения (8):  $\tilde{n}_{1(2)}(\eta_{1(2)}, \ell_{1(2)})$ . Учитывая эту «медленность», из (5) нетрудно

получить после однократного интегрирования по  $\eta_{1(2)}$  следующие уравнения для  $\tilde{n}_{1(2)}$ :

$$\frac{\partial \tilde{n}_{1(2)}}{\partial \ell_{1(2)}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{8} \frac{\partial^3 \tilde{n}_{1(2)}}{\partial \eta_{1(2)}^3}. \quad (10)$$

В качестве начальных условий для  $\tilde{n}_{1(2)}$  выберем рассчитанные в пренебрежении дисперсионным расщеплением значения

$$\tilde{n}_{1(2)}(\eta_{1(2)}, \ell_{1(2)} = 0) = \bar{n}_{1(2)}(\eta_{1(2)}).$$

Применяя преобразование Фурье по переменной  $\eta_{1(2)}$ , находим, что

$$\tilde{n}_{1(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n}_{1(2)}(\varkappa) \times \exp \left\{ i \left( \eta_{1(2)} \varkappa - \frac{\ell_{1(2)} \varkappa^3 \operatorname{tg} \beta}{8} \right) \right\} d\varkappa, \quad (11)$$

где

$$\hat{n}_{1(2)}(\varkappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{n}_{1(2)}(\eta_{1(2)}) \exp(-i\varkappa\eta_{1(2)}) d\eta_{1(2)}$$

— фурье-образ начального распределения концентрации конденсата. Принимая во внимание соотношение (9) и тот факт, что якобиан перехода от декартовых координат  $(\eta_{1(2)}, \ell_{1(2)})$  к косоугольным координатам  $(\eta_1, \eta_2)$  равен  $\sin 2\beta$ , нетрудно преобразовать величину  $\hat{n}_{1(2)}(\varkappa)$  к виду

$$\begin{aligned} \hat{n}_{1(2)}(\varkappa) &= i\varkappa \operatorname{tg} \beta \hat{V}_{1(2)}(\varkappa) / 2, \\ \hat{V}_{1(2)}(\varkappa) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\ell_{1(2)} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_{1(2)} V(\eta_{1(2)}, \ell_{1(2)}) \times \\ &\quad \times \exp(-i\varkappa\eta_{1(2)}). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) в (11), получаем следующее интегральное представление для  $\tilde{n}_{1(2)}$ :

$$\tilde{n}_{1(2)} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\varkappa \hat{V}_{1(2)}(\varkappa) \times \exp \left\{ i \left( \eta_{1(2)} \varkappa - \frac{\ell_{1(2)} \varkappa^3 \operatorname{tg} \beta}{8} \right) \right\} d\varkappa. \quad (13)$$

Для потенциала вида (2) функция  $\hat{V}_{1(2)}(\varkappa)$  легко вычисляется:

$$\hat{V}_{1(2)}(\varkappa) = \pi \delta^2 V_{max} \exp(-\delta^2 \varkappa^2 / 4).$$

Ее характерная ширина обратно пропорциональна  $\delta$ .

Введем пространственный масштаб

$$\Lambda_{1(2)} = (3\ell_{1(2)} \operatorname{tg} \beta / 8)^{1/3}$$

и проанализируем структуру для возмущений концентрации  $\tilde{n}_{1(2)}$  при различных соотношениях между  $\delta$  и  $\Lambda_{1(2)}$ . До тех пор пока  $\Lambda_{1(2)} \ll \delta$ , начальное распределение возмущений БЭК переносится вдоль характеристик уравнения (8) без искажений:

$$\tilde{n}_{1(2)}(\eta_{1(2)}, \ell_{1(2)}) \approx \bar{n}_{1(2)}(\eta_{1(2)}).$$

Это своеобразная область «геометрической оптики».

На рис. 1 показано, как при удалении от барьера (2) согласно формуле (13) изменяется распределение возмущений концентрации БЭК в поперечных к образующим конуса Маха сечениях. Из рисунка видно, что при  $\eta_{1(2)} > 0$ , начиная с расстояний  $\ell_{1(2)} \sim 100$  ( $\Lambda_{1(2)} \sim 2.5$ ), появляются осцилляции.

В пределе очень больших  $\ell_{1(2)}$ , когда выполняется условие  $\Lambda_{1(2)} \gg \delta$ , из-под интеграла (13) можно вынести функцию  $\hat{V}_{1(2)}(x)$  в точке  $x = 0$  и выразить структуру возмущений концентрации конденсата через производную функции Эйри:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{1(2)}(\eta_{1(2)}, \ell_{1(2)}) &= \frac{-\hat{V}_{1(2)}(0) \operatorname{tg} \beta}{2\Lambda_{1(2)}^2} \operatorname{Ai}'\left(-\frac{\eta_{1(2)}}{\Lambda_{1(2)}}\right) = \\ &= \frac{-2\hat{V}_{1(2)}(0)}{(M^2 - 1)^{1/6} (3\ell_{1(2)})^{2/3}} \times \\ &\quad \times \operatorname{Ai}'\left(-\frac{2(M^2 - 1)^{1/6}}{(3\ell_{1(2)})^{1/3}} \eta_{1(2)}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\operatorname{Ai}'(q) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty x \sin\left(\frac{x^3}{3} + xq\right) dx$$

— производная функции Эйри. Распределение (14) при положительных значениях  $\eta_{1(2)}$  осциллирует. Однако из выражения (13) следует, что вдали от образующих конуса Маха в областях  $\eta_{1(2)} \gg \Lambda_{1(2)}$  формула (14) не применима и осцилляции в возмущениях концентрации начинают уменьшаться (для гауссова потенциала по экспоненциальному закону (см. рис. 1 и [26])).

Таким образом, при сверхзвуковом движении за барьером образуется область с углом раствора  $2\beta$ , где нет волн. Граница этой области играет роль каустики, вблизи которой при достаточно большом удалении от центра потенциала возмущения плотности

описываются производной функции Эйри (рис. 1, 2). Такая эйри-структура начинает формироваться с расстояний, зависящих от ширины  $\delta$  потенциала как  $\delta^3$ . Отметим, что на больших расстояниях от источника для любых одномасштабных распределений потенциала с одним экстремумом выражение (14) для поля возбуждаемых в БЭК волн плотности вблизи границ «освещенной» и «неосвещенной» областей является универсальным. В частности, оно совпадает с полученным в работе [19] локальным асимптотическим представлением решения уравнения (5), в котором роль движущегося потенциала  $V(x - Mt, y)$  играет дельта-функция Дирака. Это связано с тем, что коротковолновая часть возбуждаемого спектра волн плотности распространяется под меньшими углами к направлению движения барьера и не оказывает практически никакого влияния на поле вблизи «каустики».

#### 4. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЛН ПЛОТНОСТИ В КИЛЬВАТЕРНОМ СЛЕДЕ ЗА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ БАРЬЕРОМ

Как показывают результаты работ [20, 21] и проведенные нами численные расчеты (см. рис. 2), структуру кильватерного следа даже за сравнительно слабыми потенциальными барьерами с  $V_{max} \sim 1$  нельзя полностью описать в рамках линейной те-

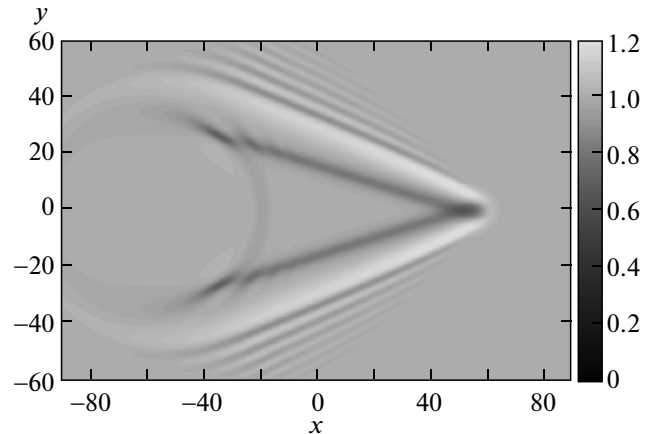
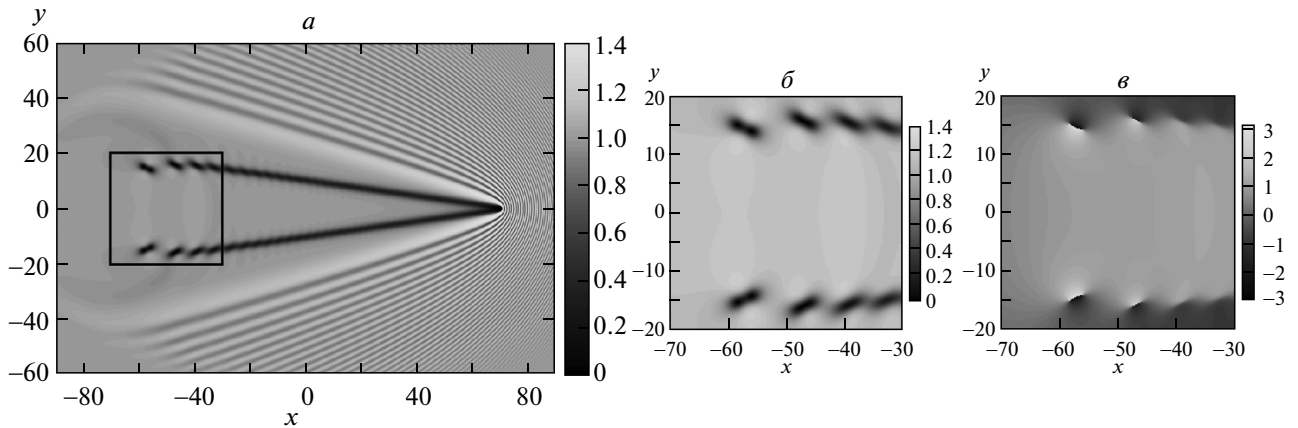


Рис. 2. Распределение концентрации БЭК в момент времени  $t = 40$  при скорости движения потенциального барьера  $M = 3$ , характерном масштабе  $\delta = 5$  и амплитуде  $V_{max} = 0.75$ . С удалением от барьера вблизи конуса Маха формируется эйри-структура поля излучения



**Рис. 3.** Распределение концентрации БЭК (*a*) в момент времени  $t = 35$  при скорости движения потенциального барьера  $M = 4$ , характерном масштабе  $\delta = 0.67$  и амплитуде  $V_{max} = 100$ . В отдельные окна вынесены увеличенные изображения плотности конденсата (*b*) и фазы волновой функции (*c*), соответствующие области, отмеченной прямоугольной рамкой. За препятствием сформировались два квазиодномерных провала концентрации, расходящиеся под углом  $2\alpha$  ( $\alpha < \beta$ ). С удалением от барьера эти провалы разрушаются с образованием четного числа вихревых пар. Об этом свидетельствуют скачки фазы на  $2\pi$  при обходе вокруг точек с провалом концентрации до нуля (см. крупный план *c*)

ории. При сверхзвуковом движении нелинейность проявляется, в первую очередь, в том, что внутри конуса Маха, где согласно развитым выше представлениям линейного приближения возмущения концентрации отсутствуют, формируются вытянутые («квазиодномерные») наклонные к направлению движения провалы концентрации БЭК (рис. 2, 3). Их структуру удобно анализировать в сопровождающей системе координат  $(t, \xi, y)$ , переписав исходное уравнение (1) в виде

$$i\partial_t \Psi - iM\partial_\xi \Psi + \frac{\partial_{\xi\xi}^2 \Psi + \partial_{yy}^2 \Psi}{2} + (1 - |\Psi|^2) \Psi = V(\xi, y)\Psi. \quad (15)$$

Когда  $V(\xi, y) \approx 0$ , уравнение (15) имеет одномерные «уединенные» решения, называемые «темными» солитонами. Квазиодномерные провалы концентрации за сверхзвуковыми барьерами очень похожи на эти нелинейные образования. Они ориентированы под некоторым углом  $\alpha$  ( $\alpha < \beta$ ) к оси  $x$ . Их точка пересечения с осью  $x$  смещается со скоростью  $M$  в направлении движения препятствия. Соответствующие таким структурам темные солитоны описываются волновой функцией

$$\Psi_\alpha = \sqrt{1 - (M \sin \alpha)^2} \operatorname{th} \left( \sqrt{1 - (M \sin \alpha)^2} \zeta \right) + iM \sin \alpha, \quad (16)$$

а распределения плотности  $n_\alpha$  и поле скоростей  $\mathbf{v}_\alpha$  БЭК имеют следующий вид:

$$n_\alpha = 1 - \frac{1 - (M \sin \alpha)^2}{\operatorname{ch}^2 \left( \sqrt{1 - (M \sin \alpha)^2} \zeta \right)}, \quad (17)$$

$$\mathbf{v}_\alpha = M \sin \alpha (1/n_\alpha - 1) (\mathbf{y}_0 \sin \alpha - \mathbf{x}_0 \cos \alpha), \quad (18)$$

где  $\zeta = y \cos \alpha - \xi \sin \alpha$ ,  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{y}_0$  — единичные векторы, направленные соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ . Следуя работе [20], сопровождающие барьер темные солитоны (16) будем называть «наклонными».

Тот факт, что в кильватерном следе за барьером появляются структуры, очень похожие на «наклонные» темные солитоны, проще всего пояснить для случая больших чисел Маха ( $M \gg 1$ ). Будем рассматривать барьеры, которые практически полностью выталкивают бозе-газ из места своей локализации ( $V_{max} \gg 1$ ). Естественно, что при сверхзвуковом движении такие барьеры оставляют непосредственно за собой область, где также нет конденсата. Поэтому можно положить, что волновая функция БЭК сразу же за препятствием в плоскости  $\xi_0 \approx -d$  приближенно описывается следующим выражением:

$$\Psi(\xi = \xi_0, y) = \Psi_0(y) = \begin{cases} 0, & |y| \leq d, \\ 1, & |y| > d, \end{cases} \quad (19)$$

где  $2d$  — поперечный размер области, откуда полностью вытеснен БЭК. Для гауссова потенциала (2) с полушириной  $\delta$  и амплитудой  $V_{max} \gg 1$  параметр  $d$  можно определить из условия  $V(\xi = 0, y = d) = 1$ , из которого следует, что  $d \approx \delta \sqrt{(\ln V_{max})/2}$ .

В стационарном режиме ( $\partial_t \Psi = 0$ ) для больших чисел Маха ( $M \gg 1$ ) при  $\xi \leq \xi_0$  в уравнении (15) можно пренебречь членами  $\partial_{\xi\xi}^2 \Psi / 2$  и  $V(\xi, y) \Psi$  в силу их малости по сравнению с остальными слагаемыми. В итоге от (15) переходим к одномерному НУШ [27–29]

$$-iM\partial_\xi \Psi + \frac{\partial_{yy}^2 \Psi}{2} + (1 - |\Psi|^2) \Psi = 0, \quad (20)$$

при решении которого воспользуемся методом обратной задачи рассеяния [28–30]. В этом методе с исходным нелинейным уравнением ассоциируется линейный дифференциальный оператор  $\hat{L}$ , в нашем случае имеющий вид

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} i\partial_y & \Psi^* \\ \Psi & -i\partial_y \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Искомая функция  $\Psi(\xi, y)$  является коэффициентом данного оператора, для которого можно решить задачу на собственные значения  $\lambda$ :

$$\hat{L}\phi = \lambda\phi, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Несмотря на то что  $\Psi(\xi, y)$  зависит от  $\xi$ , спектр  $\lambda$  оператора  $\hat{L}$  остается инвариантным для любых  $\xi$ , если только функция  $\Psi(\xi, y)$  удовлетворяет НУШ (20). Решение же самого уравнения (20) сводится к восстановлению «потенциала»  $\Psi(\xi, y)$  по матрице рассеяния.

Дискретным собственным значениям  $\lambda_n$  задачи (22) соответствуют темные солитоны, которые и будут определять асимптотическое (при  $\xi \rightarrow \infty$ ) поведение решения задачи Коши для уравнения (20). Это связано с тем, что у линейных волн плотности минимальная групповая скорость (скорость звука) всегда больше скорости темных солитонов. Поэтому солитонная и несолитонная части решения разделяются — несолитонная часть уходит за пределы конуса Маха, внутри которого остаются лишь солитонные структуры.

Определив число мод дискретного спектра  $N$  для начального распределения  $\Psi_0(y)$ , можно утверждать, что далеко за барьером при  $|\xi| \gg d$  оно останется тем же. Это означает, что каждая локализованная в пространстве мода «порождает» свой

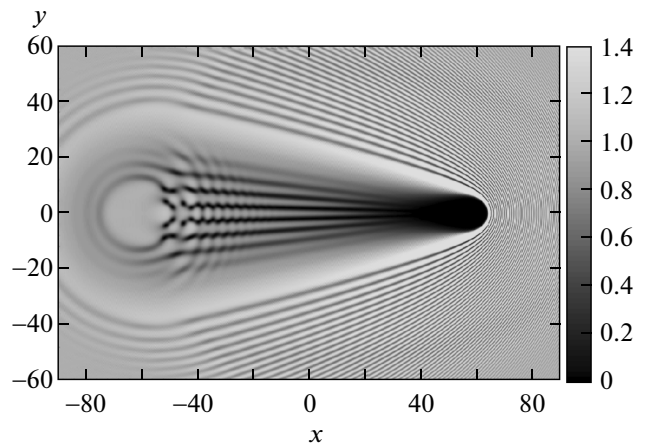


Рис. 4. Распределение концентрации БЭК в момент времени  $t = 24$  при скорости движения потенциального барьера  $M = 5$ , характерном масштабе  $\delta = 4$  и амплитуде  $V_{max} = 100$  (при этом  $d \approx 6$ ). В кильватерном следе за барьером сформировались восемь квазиодномерных провалов концентрации

наклонный темный солитон, ориентация которого (угол  $\alpha$ ,  $\alpha \ll 1$ ) определяется параметром  $\lambda_n$ :  $\sin \alpha \approx \alpha \approx \lambda_n / M$ .

Подставив в (22) начальное распределение (19), нетрудно (см. [30]) получить следующее трансцендентное характеристическое уравнение для действительных  $\lambda$  ( $\lambda^2 < 1$ ):

$$\cos(2d\lambda) = |\lambda|. \quad (23)$$

Из него, в частности, видно, что начиная с некоторых расстояний за объектом, движущимся со скоростью  $M \gg 1$ , будут возникать структуры в виде наклонных темных солитонов, соответствующие корням уравнения (23). Число  $N$  таких солитонов всегда четное. Они симметрично расположены относительно оси  $y = 0$ , и каждый из них составляет с этой осью свой угол  $\alpha_n \approx \lambda_n / M$ , где  $\lambda_n$  — корни характеристического уравнения (23). Для широких потенциальных барьеров, когда  $d \gg 1$ , число  $N$  темных солитонов можно оценить по формуле:  $N \sim 4d/\pi$ .

Таким образом, за барьером, движущимся со сверхзвуковой скоростью и полностью выталкивающим непосредственно за собой конденсат, должны образовываться квазиодномерные провалы концентрации, похожие на наклонные темные солитоны.

На рис. 4 приведены результаты численного моделирования, демонстрирующие рост числа наклонных темных солитонов при увеличении размера потенциального барьера. Он соответствует развитым

теоретическим представлениям. Однако из рисунка видно, что в кильватерном следе квазиодномерные провалы концентрации постепенно распадаются в последовательность устойчивых двумерных образований. Причина такого поведения, по всей видимости, связана с подробно проанализированной в работе [31] неустойчивостью одномерных темных солитонов относительно поперечных модуляций, на что обращалось внимание в статье [21].

Неустойчивость кильватерного следа проще всего пояснить на примере «плавных» и «медленных» возмущений параметров установившейся квазисолитонной структуры. Для этого, так же как и в работе [31], воспользуемся методом Уизема, основанном на «усреднении» функции Лагранжа исходного уравнения (15) по «быстрой» переменной  $y$ .

Будем по-прежнему считать, что  $M \gg 1$ , т. е.  $\varepsilon = 1/M$  — малый параметр задачи. Вне занятой потенциальным барьером области в уравнении (15) можно пренебречь правой частью ( $V(\xi, y) \approx 0$ ), так что соответствующая функция Лагранжа равна

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Psi, \Psi^*) &= \frac{i}{2} \times \\ &\times \left[ \Psi(\partial_t \Psi - M \partial_\xi \Psi)^* - \Psi^*(\partial_t \Psi - M \partial_\xi \Psi) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ |\partial_\xi \Psi|^2 + |\partial_y \Psi|^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ 1 - |\Psi|^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Усредним  $\mathcal{L}(\Psi, \Psi^*)$  по «быстрой» переменной  $y$ , подставив вместо  $\Psi$  решение в виде наклонного темного солитона  $\Psi_\alpha$ , который сформировался в «кильватерном» следе за сверхзвуковым потенциальным барьером:

$$\Psi_\alpha = \sqrt{1 - v^2} \operatorname{th} \left( \sqrt{1 - v^2} (y - y_0) \right) + iv.$$

При этом будем считать параметры  $v$  и  $y_0$  медленными функциями переменных  $t$  и  $\xi$ , т. е.  $v = v(\varepsilon^2 t, \varepsilon^2 \xi)$ ,  $y_0 = y_0(\varepsilon^2 t, \varepsilon^2 \xi)$ . Учитывая, что функция Лагранжа определена с точностью до производной по  $t$  и  $\xi$ , после интегрирования по  $y$  получим

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} &= \int \mathcal{L}(\Psi_\alpha, \Psi_\alpha^*) dy = \frac{2}{3} (1 - v^2)^{3/2} \times \\ &\times \left( 2 + (\partial_\xi y_0)^2 \right) + \\ &+ 2 \left( \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - v^2}}{v} - v \sqrt{1 - v^2} \right) \times \\ &\times (\partial_t y_0 - M \partial_\xi y_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Вариация действия  $\mathcal{S} = \iint \bar{\mathcal{L}} dt d\xi$  по  $v$  и  $y_0$  приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - v^2} (\partial_t v - M \partial_\xi v) - \\ - \frac{1}{3} \partial_\xi \left( (1 - v^2)^{3/2} \partial_\xi y_0 \right) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$(\partial_t y_0 - M \partial_\xi y_0) + v + \frac{v}{2} (\partial_\xi y_0)^2 = 0. \quad (27)$$

Линеаризуя систему (26), (27) около стационарного состояния  $v_{st} = \text{const}$ ,  $y_{0st} = (v_{st} + o(\varepsilon^2)) \xi / M$ , с точностью до квадратичных по  $\varepsilon$  членов получим уравнения для возмущений  $\tilde{v} = v - v_{st}$  и  $\tilde{y}_0 = y_0 - y_{0st}$ :

$$\partial_t \tilde{v} - M \partial_\xi \tilde{v} - \frac{1}{3} (1 - v_{st}^2) \partial_{\xi\xi}^2 \tilde{y}_0 = 0, \quad (28)$$

$$\partial_t \tilde{y}_0 - M \partial_\xi \tilde{y}_0 + \tilde{v} = 0. \quad (29)$$

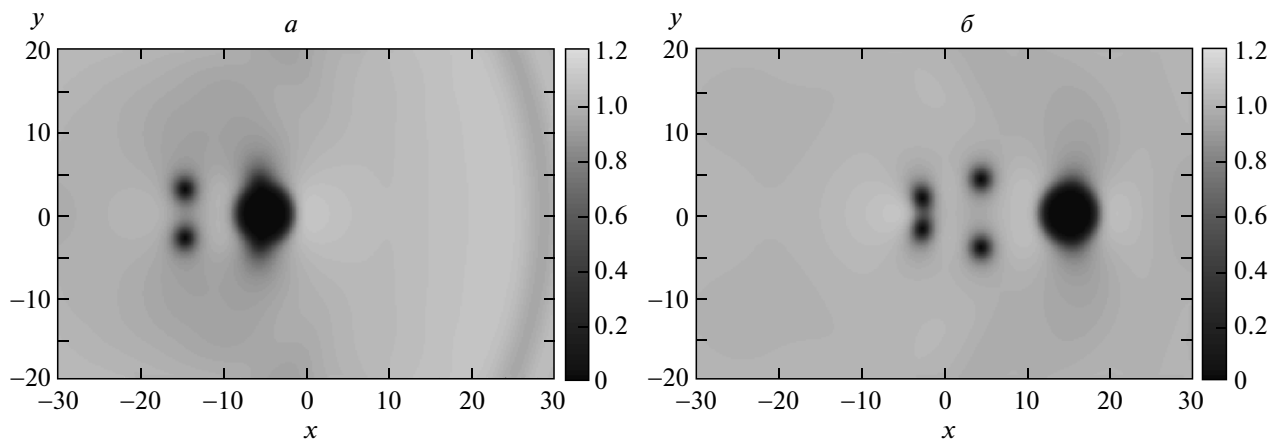
Для  $e^{(i\Omega t - iK\xi)}$ -процессов из выражений (28), (29) находим дисперсионное соотношение, связывающее между собой  $\Omega$  и  $K$ :

$$K = \Omega \left( 1 \pm i \sqrt{\frac{1 - v_{st}^2}{3M^2}} \right) + o\left(\frac{1}{M^2}\right). \quad (30)$$

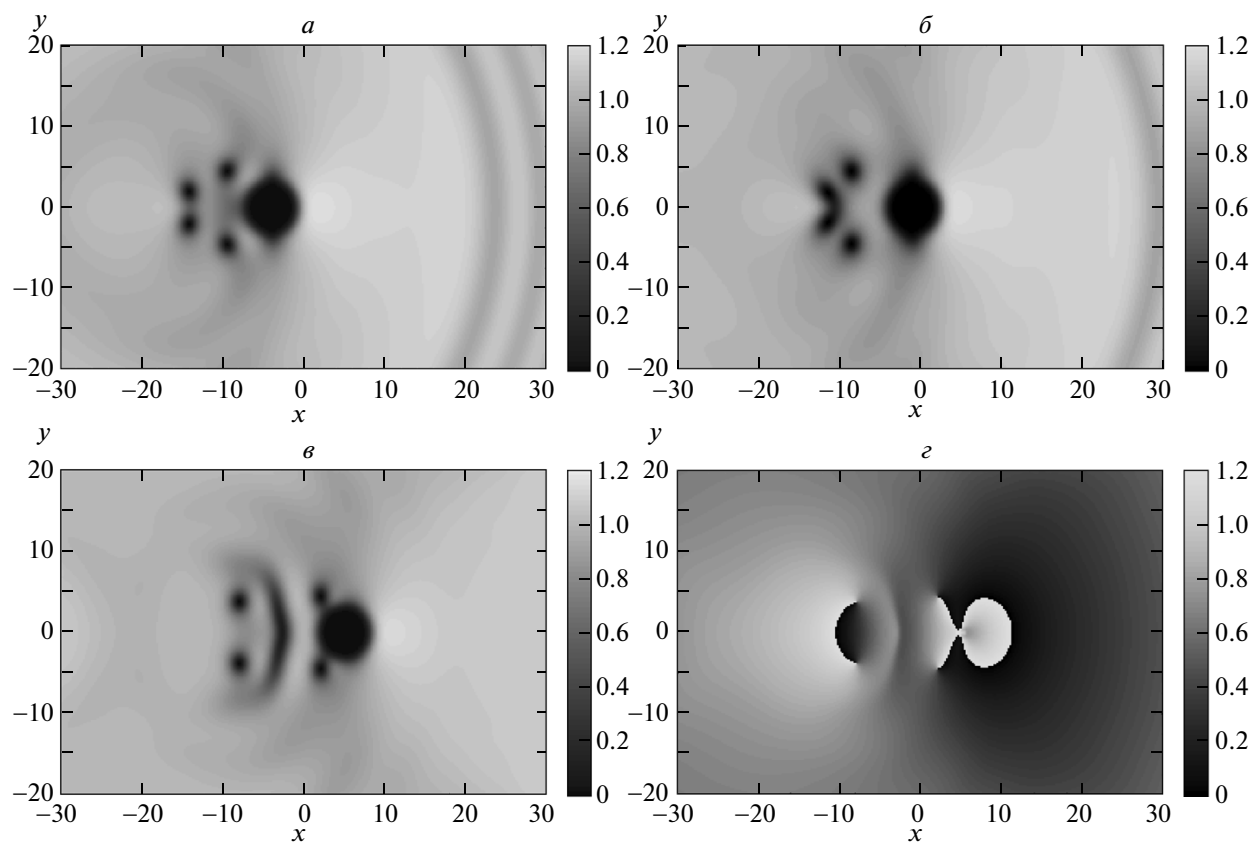
Как видно из формулы (30), действительным  $\Omega$  соответствуют комплексные  $K$ , т. е. нарастающие при удалении от барьера возмущения, что свидетельствует о сносной неустойчивости. Согласно адиабатической теории инкремент этой неустойчивости увеличивается с ростом  $\Omega$ . Однако при более строгом рассмотрении [31, 32] должны существовать зависящие от параметра  $\varepsilon \sqrt{(1 - v_{st}^2)/3M^2}$  частота  $\Omega_*$  и связанный с ней характерный масштаб  $l_*$ , для которых мнимая часть  $K$  максимальна.

В результате развития неустойчивости наклонные темные солитоны, сформировавшиеся в кильватерном следе за сверхзвуковым барьером, распадаются на цепочки устойчивых двумерных образований. Эти образования в случае темных солитонов с достаточно глубоким провалом концентрации представляют собой вихревые пары (см. Приложение), о чем свидетельствуют скачки фазы на  $2\pi$  при обходе вокруг точек (топологических дефектов), в которых концентрация конденсата уменьшается до нуля (см. рис. 3б, в). Одному и тому же направлению обхода вокруг соседних нулей концентрации соответствуют различающиеся знаками скачки фазы, а значит, рождающиеся спаренные вихри закручены в разные стороны и их полный момент импульса равен нулю. Если в кильватерном следе за барьером сформировались наклонные солитоны с относительно слабым провалом концентрации, то из-за неустойчивости они превращаются в последовательность устойчивых двумерных структур, похожих на солитоны





**Рис. 5.** Распределение концентрации БЭК через время  $t$  после того, как потенциальный барьер с  $R_b \approx 3$  начал двигаться со скоростью  $M = 0.5$ : *а*)  $t = 40$  — за барьером одна вихревая пара, *б*)  $t = 80$  — появилась вторая пара. Взаимодействие вихрей приводит к сближению ранее возбужденных вихрей



**Рис. 6.** Распределение концентрации БЭК через время  $t$  после того, как потенциальный барьер с  $R_b \approx 3$  начал двигаться со скоростью  $M = 0.6$ : *а*)  $t = 30$  — за барьером две вихревые пары, *б*)  $t = 40$  — взаимодействие вихрей приводит к сильному сближению ранее возбужденных вихрей, *в*)  $t = 50$  — первая вихревая пара исчезает, появляется третья вихревая пара. Мгновенный снимок, на котором изображена фаза волновой функции конденсата (*г*), позволяет увидеть, что первая появившаяся вихревая пара сбрасывает с себя циркуляцию и превращается в безвихревое возбуждение

уравнения Кадомцева–Петвиашвили (см. Приложение). При этом концентрация конденсата нигде не обращается в нуль и отсутствуют скачки фазы.

Как видно из рис. 3, 4, кильватерный след за сверхзвуковыми потенциальными барьерами формируется сначала в виде квазиодномерных провалов концентрации, расположенных внутри конуса Маха, а затем (с удалением от барьера) превращается в цепочки устойчивых двумерных структур.

### 5. СТРУКТУРА КИЛЬВАТЕРНОГО СЛЕДА ЗА ДОЗВУКОВЫМИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ БАРЬЕРАМИ

Обсудим особенности кильватерного следа за сильными дозвуковыми ( $M < 1$ ) потенциальными барьерами (2). Если  $V_{max} \gg 1$ , конденсат практически полностью выталкивается из области с радиусом  $R_b = \delta \sqrt{(\ln V_{max})/2}$ . Сам барьер при этом представляет собой по существу непроницаемое для бозе-частиц цилиндрическое препятствие. Изображенные на рис. 5, 6 «мгновенные» снимки концентрации и фазы волновой функции в различные моменты времени отвечают радиусу  $R_b \approx 3$  и числам Маха  $M = 0.5$  и  $M = 0.6$ . Нетрудно заметить, что излучаемые черенковские волны и наклонные темные солитоны здесь отсутствуют. Однако при  $M < 1$  за барьером (2) могут возникать пары вихрей (см. Приложение) с противоположными по знаку топологическими зарядами, по модулю равными единице  $\kappa (= \pm 1)$  [9, 10, 14, 15]. С их возбуждением связано нарушение режима сверхтекучести БЭК, т. е. появление некой эффективной силы трения, действующей со стороны БЭК на препятствие [11–13].

Проведенные нами численные расчеты, согласующиеся с результатами работ [9–14], свидетельствуют о том, что пары «вихрь–антивихрь» возникают лишь при числах Маха  $M$ , превышающих некое критическое значение  $M_{cr} \approx 0.43$  ( $M > M_{cr}$ ), причем только в случае барьеров с достаточно большим характерным радиусом  $R_b > 1$ . Если же  $R_b < 1$ , то вихри перестают возбуждаться. Это связано с тем, что характерный размер зарождающихся вихревых пар  $l$  определяется радиусом «препятствия» ( $l \sim 2R_b$ ). О паре можно говорить только при условии  $l > 1$ . Поэтому потенциальные барьеры с  $R_b < 1$  (даже двигаясь со скоростями  $M > M_{cr}$ ) вихрей не возбуждают.

В целом картина кильватерного следа за дозвуковыми потенциальными барьерами выглядит следующим образом. При незначительном превышении критического значения  $M - M_{cr} \ll M_{cr}$  вихревые па-

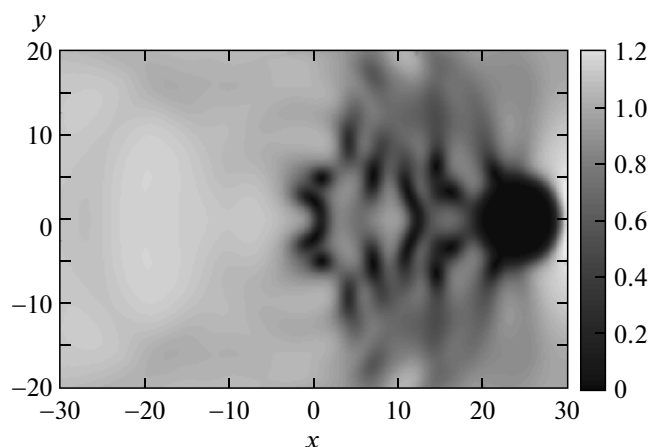


Рис. 7. Распределение концентрации БЭК через время  $t = 60$  после того, как потенциальный барьер с  $R_b \approx 5$  начал двигаться со скоростью  $M = 0.8$ . В кильватерном следе за барьером развивается турбулентность

ры генерируются достаточно редко. Между моментами зарождения пар проходит время, за которое два первых вихря отстают от барьера на большое по сравнению с  $R_b$  расстояние. В процессе удаления от препятствия они постепенно сближаются и выходят на стационарный режим движения. При увеличении разности  $M - M_{cr}$  вновь родившаяся и ранее появившаяся пары начинают активно взаимодействовать друг с другом. В результате первые вихри еще сильнее сближаются, скорость их поступательного движения увеличивается и они начинают догонять вторую пару и препятствие. В конечном итоге происходит своеобразная бифуркация — сброс циркуляции и превращение первой пары в безвихревое возбуждение, в котором амплитуда волновой функции БЭК уже нигде не обращается в нуль (см. рис. 6*в,г*). Весь этот процесс сопровождается излучением звуковых волн. При дальнейшем увеличении разности  $M - M_{cr}$  вихревые пары рождаются столь часто, что вновь появившиеся определяют поведение ранее возбужденных, а те, в свою очередь, влияют на скорость вихреобразования. Вихри, не успевая уйти далеко от барьера, вновь к нему возвращаются и исчезают (рис. 7). Происходит переход к турбулентному течению бозе-газа, который сопровождается дополнительной диссипацией энергии и резким ростом силы сопротивления.

Очевидно, что рассматриваемые здесь процессы генерации вихрей связаны с неустойчивостью стационарного режима обтекания потенциальных ба-

рьеров конденсатом. Однако сам расчет поля скоростей  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \nabla\theta_s(\mathbf{r})$  и концентрации  $n_s(\mathbf{r})$  БЭК вблизи препятствия в стационарном состоянии представляет собой сложную и до конца еще нерешенную проблему. Для больших объектов ( $R_b \gg 1$ ), когда всюду за исключением тонкого «пристеночного» слоя можно пренебречь пространственной дисперсией (квантовомеханическим давлением), конденсат эквивалентен идеальному сжимаемому газу, в котором давление пропорционально квадрату плотности. Стационарный поток БЭК в этом случае при числах Маха  $M \approx 0.5$  можно описать с помощью следующей сходящейся итерационной процедуры. Перейдем в систему координат, связанную с барьером, и представим концентрацию  $n_s(\mathbf{r})$  и потенциал скорости  $\theta_s(\mathbf{r})$  в виде разложения по малому параметру  $\mu$ :

$$n_s(\mathbf{r}) = 1 + \mu^2 n_{s,1}(\mathbf{r}) + \dots,$$

$$\theta_s(\mathbf{r}) = \mu\theta_{s,0}(\mathbf{r}) + \mu^3\theta_{s,1}(\mathbf{r}) + \dots$$

На первом шаге будем считать конденсат несжимаемым с плотностью  $n_{s,0} = 1$  и найдем поле скоростей  $\mathbf{v}_{s,0}(\mathbf{r})$ . Подставляя  $\mathbf{v}_{s,0}$  в уравнение (4), записанное в сопровождающей системе координат, определим поправку  $n_{s,1}(\mathbf{r})$ . По ней из уравнения непрерывности (3) с учетом кубичных по  $\mu$  слагаемых получим уравнение для  $\mathbf{v}_{s,1}(\mathbf{r}) = \nabla\theta_{s,1}(\mathbf{r})$ . Повторяя данный цикл, несложно найти поправки следующего порядка малости к распределениям концентрации и скорости:  $n_{s,2}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{v}_{s,2}(\mathbf{r}) = \nabla\theta_{s,2}(\mathbf{r})$ ,  $n_{s,3}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{v}_{s,3}(\mathbf{r}) = \nabla\theta_{s,3}(\mathbf{r})$  и так далее.

В связанной с барьером полярной системе координат  $(r, \varphi)$  для случая аксиально-симметричного внешнего потенциала имеем

$$\theta_{s,0}(r, \varphi) = M(r + R_b^2/r) \cos \varphi, \quad (31)$$

$$n_{s,1}(r, \varphi) = \left( M^2 - (\nabla\theta_{s,0})^2 \right) / 2, \quad (32)$$

где  $r$  — расстояние от центра барьера,  $\varphi$  — полярный угол, отсчитываемый от направления скорости потока БЭК, налетающего на объект. Как видно из выражений (31) и (32),  $|\mathbf{v}_{s,0}|$  и  $|n_{s,1}|$  достигают своих максимальных значений ( $\max |\mathbf{v}_{s,0}| = 2M$ ,  $\max |n_{s,1}| = 3M^2/2$ ) при  $r = R_b$  и  $\varphi = \pm\pi/2$ . Если  $M = M_{cr} = \sqrt{2/11} \approx 0.43$ , то максимум квадрата скорости и минимум плотности конденсата, рассчитанные на первом этапе описанной выше итерационной схемы, совпадают. Из численных расчетов следует, что пороговое значение для чисел Маха, начиная с которого наблюдается генерация вихрей, как раз близко к

0.43. При этом максимальная скорость конденсата в сопровождающей системе координат становится (в полном соответствии с критерием Ландау [1]) по модулю больше локальной скорости звука  $c_s(\mathbf{r}) = \sqrt{n_s(\mathbf{r})}$ .

Покажем, что при  $M \gtrsim M_{cr}$  стационарное решение  $n_s(\mathbf{r}) = \psi_s^2(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \nabla\theta_s(\mathbf{r})$  действительно становится неустойчивым. Для этого линеаризуем исходные уравнения (3), (4), пренебрегая пространственной дисперсией, связанной с квантовомеханическим давлением. В результате для возмущений  $\tilde{n}(\mathbf{r}, t)$  и  $\tilde{\theta}(\mathbf{r}, t)$  имеем

$$\partial_t \tilde{n} + \text{div}(\tilde{n}\mathbf{v}_s + n_s \nabla \tilde{\theta}) = 0, \quad (33)$$

$$\partial_t \tilde{\theta} + \mathbf{v}_s \nabla \tilde{\theta} + \tilde{n} = 0. \quad (34)$$

Как уже отмечалось выше, при числах Маха  $M \approx 0.5$  распределения поля скоростей и плотности стационарного потока хорошо описываются выражениями (31), (32), поэтому для оценок можно положить  $\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) \approx \nabla\theta_{s,0}(\mathbf{r})$  и  $n_s(\mathbf{r}) \approx 1 + n_{s,1}(\mathbf{r})$ . В итоге из системы дифференциальных уравнений (33), (34) получим следующее уравнение для возмущения  $\tilde{\theta}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\partial_{tt}^2 \tilde{\theta} + 2(\nabla\theta_{s,0}, \nabla) \partial_t \tilde{\theta} + \nabla\theta_{s,0}(\nabla\theta_{s,0}, \nabla) \nabla \tilde{\theta} + 2\nabla\tilde{\theta}(\nabla\theta_{s,0}, \nabla) \nabla\theta_{s,0} - (1 + n_{s,1}) \Delta \tilde{\theta} = 0. \quad (35)$$

Будем считать, что  $M \gtrsim M_{cr}$ , и рассмотрим малые окрестности точек  $\varphi = \varphi_j$  на поверхности цилиндра  $r = R_b$ , где локальная скорость звука равна скорости стационарного потока:

$$\sin^2 \varphi_j = (2 + M^2) / 12M^2.$$

Перейдем от цилиндрических координат  $\varphi$  и  $r$  к переменным  $\tau$  и  $\rho$ , где  $\tau = R_b(\varphi_j - \varphi)$  — длина дуги окружности радиуса  $R_b$ , отсчитываемая от точки  $\varphi = \varphi_j$ , а  $\rho = r - R_b$  — расстояние по нормали к этой окружности. Подставим выражения (31) и (32) для  $\theta_{s,0}$  и  $n_{s,1}$  в уравнение (35) и устремим  $\rho$  и  $\tau$  к нулю ( $\rho, \tau \rightarrow 0$ ). В итоге получим, что вблизи точек  $\varphi = \varphi_j$  и  $r = R_b$  поведение возмущения  $\tilde{\theta}(\rho, \tau, t)$  описывается уравнением вида

$$\partial_{tt}^2 \tilde{\theta} + 4M \sin \varphi_j \partial_{t\tau}^2 \tilde{\theta} - \frac{4M^2 \sin 2\varphi_j}{R_b} \partial_\tau \tilde{\theta} - 4M^2 \sin^2 \varphi_j \left( \partial_{\rho\rho}^2 \tilde{\theta} + \frac{2\partial_\rho \tilde{\theta}}{R_b} \right) = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) при  $M > M_{cr}$  и  $\cos \varphi_j > 0$ , имеет неустойчивые решения. Действительно, в случае возмущений вида

$$\tilde{\theta}(\rho, \tau, t) = \tilde{\Theta}(t) \exp(ik_\tau \tau + ik_\rho \rho)$$

из (36) получаем

$$\ddot{\Theta}_{tt} + 4ik_{\tau}M \sin \varphi_j \dot{\Theta}_t - ik_{\tau} \frac{4M^2 \sin 2\varphi_j}{R_b} \ddot{\Theta} + 4M^2 \sin^2 \varphi_j \left( k_{\rho}^2 - \frac{2ik_{\rho}}{R_b} \right) \ddot{\Theta} = 0. \quad (37)$$

Подставляя в (37) функцию  $\ddot{\Theta}(t) \sim \exp(pt + i\omega t)$ , находим, что при  $k_{\rho}, k_{\tau} \gg 1/R_b$  (из таких пространственных гармоник набраны флуктуации с малыми по сравнению с  $R_b$  масштабами) для  $k_{\tau} \gg k_{\rho}$  инкремент неустойчивости  $p$  и частота  $\omega$  соответственно равны

$$p = \frac{2M |\cos \varphi_j|}{R_b} = \frac{\sqrt{11M^2 - 2}}{\sqrt{3}R_b}, \quad (38)$$

$$\omega = \frac{k_{\rho}^2 M |\sin \varphi_j|}{k_{\tau}} = \frac{k_{\rho}^2 \sqrt{M^2 + 2}}{2\sqrt{3}k_{\tau}R_b}.$$

Как видно из формулы (38), инкремент неустойчивости для возмущений, описываемых уравнением (36), зависит от превышения числа Маха критического значения  $M_{cr} \approx 0.43$ . Чем выше это превышение, тем больше инкремент, а следовательно, и связанная с ним частота генерации вихревых пар. При этом точки зарождения вихрей с ростом  $M$  приближаются друг к другу, располагаясь симметрично относительно оси  $x$  с «теневого» стороны от движущегося объекта ( $\cos \varphi_j > 0$ ). Увеличение радиуса препятствия приводит к уменьшению инкремента неустойчивости.

Конечно, проведенный анализ, не учитывающий зависимость от координат коэффициентов при функции  $\tilde{\theta}(\mathbf{r}, t)$  и ее производных в уравнении (35), можно рассматривать лишь как некую чисто качественную оценку параметров неустойчивости, из которой, однако, вытекают согласующиеся с численным моделированием выводы.

Итак, в случае движения потенциала (2) с дозвуковой скоростью в БЭК могут возбуждаться пары «вихрь–антивихрь». Этот процесс начинается, когда скорость препятствия  $M$  превышает критическое значение  $M_{cr} \approx 0.43$ . От разности  $M - M_{cr}$  существенным образом зависит частота генерации вихрей и особенности их поведения в потоке БЭК за препятствием. Возбуждение вихрей связано с неустойчивостью стационарного режима обтекания. Она развивается, когда скорость потока конденсата относительно объекта превышает локальную скорость звука, определяемую плотностью конденсата.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе детально проанализирована структура кильватерного следа за препятствиями в виде аксиально-симметричных потенциальных барьеров, движущихся в однородном бозе-эйнштейновском конденсате как со сверхзвуковыми, так и с дозвуковыми скоростями. Резюмируя ее результаты, можно утверждать следующее.

За сверхзвуковыми барьерами малой интенсивности рассчитанное в рамках линейного приближения поле излучения имеет внутри так называемого конуса Маха область тени. При этом вблизи границы этой области независимо от размеров барьеров возмущение плотности конденсата (начиная с некоторых расстояний от препятствия) описывается производной функции Эйри.

Сильно возмущающие бозе-конденсат сверхзвуковые барьеры оставляют за собой кильватерный след из четного числа квазиодномерных провалов концентрации (темных солитонов), лежащих внутри конуса Маха. Их ширина, число и угол расхождения зависят как от параметров возбуждающего барьера, так и от характеристик самого конденсата. Из-за развития модуляционной неустойчивости кильватерный след эволюционирует в набор дорожек из устойчивых двумерных структур (вихревых пар или безвихревых образований, похожих на солитоны уравнения Кадомцева–Петвиашвили).

Для дозвукового режима движения барьеров характерно наличие критической скорости, при превышении которой ламинарное (чисто потенциальное) течение становится неустойчивым. В результате за препятствием начинают парами возбуждаться вихри с различными по знаку топологическими зарядами. Эти вихревые пары взаимодействуют друг с другом с излучением звуковых волн, и происходит турбулизация кильватерного следа.

В заключение отметим, что в статье рассмотрена достаточно идеализированная ситуация — однородный БЭК и двумерные потенциальные барьеры. Реальный (удерживаемый ловушкой) бозе-газ всегда неоднороден. При движении через него препятствия, например, сфокусированного лазерного пучка, наблюдается смена режимов обтекания со сверхзвукового на дозвуковой и обратно. При этом по характерной структуре кильватерного следа можно судить о параметрах конденсата (в частности, о пространственном распределении его концентрации) или, другими словами, использовать особенности обтекания в диагностических целях. Что же касается двумерной постановки задачи, то она в слу-

чае потенциальных барьеров, создаваемых лазерными пучками, часто оказывается оправданной, особенно если речь идет о «дискообразных» ловушечных конфигурациях.

Здесь также совершенно не обсуждалось, как выталкивается конденсат при «включении» сильных потенциальных барьеров из занимаемой ими области. Численные эксперименты показывают, что такой процесс сопровождается образованием нелинейных структур, которые можно назвать бездиссипативными ударными волнами, но это предмет отдельного рассмотрения.

Авторы благодарны Л. П. Питаевскому, А. М. Камчатнову и Ю. Г. Гладушу за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 09-02-97059, 10-02-01085).

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### Двумерные солитоноподобные структуры, описываемые уравнением ГП

Преобразование Маделунга сингулярно в точках, в которых  $\psi = 0$ . При обходе вокруг них циркуляция скорости конденсата равна не нулю, а  $2\pi\kappa$ , где  $\kappa$  — целое число. Эти точки представляют собой топологические дефекты скалярного поля и являются центрами так называемых квантовых вихрей, представляющих особые линии в распределении скорости потенциального течения жидкости. В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  фаза  $\theta$  стационарной волновой функции конденсата с вихревой нитью, ориентированной вдоль оси  $z$ , имеет вид  $\theta = \kappa\varphi$ , а ее амплитуда  $\psi$  зависит только от  $r$  и удовлетворяет соотношению [1–3, 8]

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \left( \frac{\kappa}{r} \right)^2 \psi \right) + (1 - \psi^2) \psi = 0$$

с граничными условиями  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(\infty) = 1$ , обеспечивающими непрерывность  $\psi(r)$  в точке  $r = 0$  и приближение концентрации БЭК к единице при  $r \rightarrow \infty$ . Из уравнения для функции  $\psi(r)$  непосредственно следует ее асимптотическое поведение:

$$\psi(r \rightarrow 0) \approx \alpha_\kappa r^{|\kappa|}, \quad \psi(r \rightarrow \infty) \approx 1 - \kappa^2/2r^2.$$

Двумерные солитоноподобные решения уравнения ГП подробно анализировались в работах [33–35]. В них, в частности, было показано, что в БЭК существуют локализованные в пространстве подвижные

образования, в которых концентрация конденсата в двух точках, расположенных на линии, перпендикулярной направлению движения, обращается в нуль. Бозе-газ в окрестностях данных точек вращается в противоположных направлениях. Это указывает на то, что рассматриваемые стационарные образования представляют собой пары вихревых нитей с топологическими зарядами, равными по модулю, но различающимися по знаку ( $\kappa_{1(2)} = \pm 1$ ), т. е. стационарные пары «вихрь–антивихрь».

Когда расстояние  $l$  между нулями существенно больше корреляционного радиуса, т. е. при  $l \gg 1$ , «вихревой диполь», движущийся с постоянной скоростью  $v_{vp}$  вдоль оси  $y$ , достаточно хорошо описывается следующим выражением:

$$\Psi = \psi(x, y - v_{vp}t) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — полярные углы соответственно вокруг точек  $(x = l/2, y = v_{vp}t)$  и  $(x = -l/2, y = v_{vp}t)$ . При этом  $v_{vp}$  обратно пропорциональна расстоянию между топологическими дефектами:  $v_{vp} = 1/l$ . С уменьшением  $l$  скорость движения вихревой пары возрастает, но для стационарных образований она не может превосходить скорости звука (в безразмерных переменных единицы), так как в противном случае будут излучаться черенковские звуковые волны.

С увеличением скорости движения «вихрь» и «антивихрь» располагаются все ближе и ближе друг к другу. В конце концов, при достижении скоростью некоторого критического значения  $v_{vp}^* \approx 0.43$  точки, где концентрация БЭК обращается в нуль (центры топологических дефектов), стягиваются в одну. Для скоростей, больших  $v_{vp}^*$ , у стационарных двумерных структур концентрация БЭК всюду отлична от нуля.

В слабо нелинейном пределе, когда скорость солитона стремится к звуковой, уединенные волны в БЭК описываются уравнением Кадомцева–Петвиашвили [31, 35, 36]:

$$\partial_Y (2\partial_T n_1 + 3n_1 \partial_Y n_1 - (1/4) \partial_{YY}^3 n_1) = -\partial_{XX}^2 n_1.$$

Здесь введены медленные время и координаты:  $T = \epsilon^{3/2} t$ ,  $X = \epsilon x$ ,  $Y = \epsilon^{1/2} (y - t)$ , а решение системы (3), (4) ищется в виде  $\theta = \epsilon^{1/2} \theta_1$ ,  $n = 1 + \epsilon n_1$ .

Если воспользоваться подстановкой

$$n_1 = \partial_{YY}^2 \ln \Phi(X, Y + \check{v}_{kp} T),$$

то можно показать, что у уравнения Кадомцева–Петвиашвили есть решение в виде двумерных солитонов, локализованных как по  $Y$ , так и по  $X$  [37]:

$$n_1 = - \frac{16\tilde{v}_{kp} \left[ 3 + 16\tilde{v}_{kp}^2 X^2 - 8\tilde{v}_{kp} (Y + \tilde{v}_{kp} T)^2 \right]}{\left[ 3 + 16\tilde{v}_{kp}^2 X^2 + 8\tilde{v}_{kp} (Y + \tilde{v}_{kp} T)^2 \right]^2},$$

где  $\tilde{v}_{kp}$  ( $\tilde{v}_{kp} > 0$ ,  $\tilde{v}_{kp} \sim \epsilon$ ) — постоянная величина, характеризующая отклонение скорости солитона от скорости звука.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978).
2. Е. Р. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
3. Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **40**, 646 (1961).
4. Л. П. Питаевский, *УФН* **168**, 641 (1998).
5. Л. П. Питаевский, *УФН* **178**, 346 (2006).
6. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
7. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2003).
8. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов*, Физматлит, Москва (2005).
9. T. Frisch, Y. Pomeau, and S. Rica, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1644 (1992).
10. B. Jackson, J. F. McCann, and C. S. Adams, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3903 (1998).
11. T. Winiecki, J. F. McCann, and C. S. Adams, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5186 (1999).
12. B. Jackson, J. F. McCann, and C. S. Adams, *Phys. Rev. A* **61**, 051603(R) (2000).
13. T. Winiecki, B. Jackson, J. F. McCann, and C. S. Adams, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **33**, 4069 (2000).
14. H. Roberts and N. G. Berloff, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 4025 (2000).
15. В. А. Миронов, Л. А. Смирнов, *Изв. РАН, сер. физ.* **73**, 1793 (2009).
16. I. Carusotto, S. X. Hu, L. A. Collins, and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 260403 (2006).
17. Yu. G. Gladush, G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. A* **75**, 033619 (2007).
18. Ю. Г. Гладуш, А. М. Камчатнов, *ЖЭТФ* **132**, 589 (2007).
19. Yu. G. Gladush, L. A. Smirnov, and A. M. Kamchatnov, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **41**, 165301 (2008).
20. G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 180405 (2006).
21. A. M. Kamchatnov and L. P. Pitaevskii, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 160402 (2008).
22. C. Raman, M. Köhl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kulewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2502 (1999).
23. R. Onofrio, C. Raman, J. M. Vogels, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2228 (2000).
24. S. Inouye, S. Gupta, T. Rosenband, A. P. Chikkatur, A. Görlitz, T. L. Gustavson, A. E. Leanhardt, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080402 (2001).
25. E. A. Cornell, *Proc. Conf. on Nonlinear Waves, Integrable Systems and Their Applications* (2005); <http://jilawww.colorado.edu/bec/papers.html>.
26. И. Г. Кондратьев, Г. В. Пермитин, А. И. Смирнов, *Изв. вузов. Радиофизика* **23**, 1195 (1980).
27. G. A. El, V. V. Khodorovskii, and A. V. Tyurina, *Phys. Lett. A* **333**, 334 (2004).
28. G. A. El and A. M. Kamchatnov, *Phys. Lett. A* **350**, 192 (2006).
29. G. A. El, A. M. Kamchatnov, V. V. Khodorovskii, E. S. Annibale, and A. Gammal, *Phys. Rev. E* **80**, 046317 (2009).
30. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ* **64**, 1627 (1973).
31. Е. А. Кузнецов, С. К. Турицын, *ЖЭТФ* **94**, 119 (1988).
32. D. E. Pelinovsky, Yu. A. Stepanyants, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. E* **51**, 5016 (1995).
33. C. A. Jones and H. Roberts, *J. Phys. A: Math. Gen.* **15**, 2599 (1982).
34. C. A. Jones, S. Putterman, and H. Roberts, *J. Phys. A: Math. Gen.* **19**, 2991 (1986).
35. E. A. Kuznetsov and J. J. Rasmussen, *Phys. Rev. E* **51**, 4479 (1995).
36. S. Tsuchiya, F. Dalfovo, and L. P. Pitaevskii, *Phys. Rev. A* **77**, 045601 (2008).
37. S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its, and V. B. Matveev, *Phys. Lett. A* **63**, 205 (1977).