

# СВОЙСТВА ДВУМЕРНОГО ПОЛУМЕТАЛЛА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Э. Г. Батыев\*

*Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 29 июня 2009 г.

Изучаются свойства системы двумерных электронов и дырок в сильном магнитном поле, когда достаточно учитывать только основной уровень Ландау. Взаимодействие электронов и дырок может привести к упорядоченному состоянию. В данной задаче существенно обменное взаимодействие в подсистемах электронов и дырок. Рассмотрены два случая: а) присутствуют одна электронная и одна дырочная долины, и при определенном значении магнитного поля имеется упорядоченное состояние, как в экситонном диэлектрике; б) существуют одна электронная и две эквивалентные дырочные долины (как в эксперименте [1]), и в системе дырок в целом интервале магнитного поля имеется упорядоченное состояние типа ферромагнитного состояния Стонера. Найдены спектры элементарных возбуждений бозевского и фермиевского типов. Ферми-возбуждения имеют щель в энергетическом спектре, а бозе-возбуждения в упорядоченных состояниях начинаются с нуля (им соответствует электрический дипольный момент). Используется приближение самосогласованного поля, которое, как оказывается, является точным при равном числе электронов и дырок.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая здесь задача появилась в связи с опубликованными экспериментальными результатами [1]. В этой работе была обнаружена двумерная электрон-дырочная система в квантовой яме, изготовленной на основе HgTe с ориентацией поверхности (013).

Как известно [2], в системе электронов и дырок даже в случае слабого притяжения между ними возможно образование упорядоченного состояния (типа состояния БКШ в сверхпроводниках). Это состояние получило название экситонного диэлектрика. Для его реализации требуется условие близости поверхностей Ферми (в пространстве квазиимпульсов) электронов и дырок, т. е. близости концентраций и угловых зависимостей энергий от квазиимпульса. Для двумерных частиц в магнитном поле, когда существенно квантование Ландау, это условие не является необходимым. В этом случае волновые функции частиц не зависят от исходных зависимостей энергий от квазиимпульса (а зависят только от знака заряда). Кроме того, особенностью такой

системы является то, что из-за вырождения уровней Ландау становятся существенными обменные взаимодействия (наряду с взаимодействием, приводящим к упорядочению). Именно такая система рассматривается в данной работе.

Будем считать, что зона проводимости и валентная зона перекрываются. Начнем со случая, когда имеется по одному экстремуму в каждой из зон (разд. 2). В разд. 3 рассматриваются две эквивалентные долины для дырок. Всюду считаем, что задействована только одна проекция спина.

## 2. ОДНА ДЫРОЧНАЯ ДОЛИНА

В однодолинном случае вблизи экстремумов зоны проводимости и валентной зоны зависимости энергий от квазиимпульса в отсутствие магнитного поля имеют вид

$$\epsilon_c(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m_c}, \quad \epsilon_v(\mathbf{p}) = E_0 - \frac{p^2}{2m_v},$$

где  $m_c$  и  $m_v$  — эффективные массы электрона в соответствующих зонах.  $E_0$  — перекрытие зон (положительная величина), за начало отсчета энергий взята энергия дна зоны проводимости.

\*E-mail: batyev@isp.nsc.ru

Как обычно, удобно перейти в валентной зоне от электронов к дыркам, так что энергия дырок есть  $-\epsilon_v$ . В достаточно сильном магнитном поле  $H$ , когда можно ограничиться учетом только основного уровня Ландау, энергии электрона  $\epsilon_1$  и дырки  $\epsilon_2$  таковы:

$$\epsilon_1 = \frac{\omega_e}{2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_h}{2} - E_0. \quad (1)$$

Здесь  $\omega_{e,h} = |e|H/m_{c,v}c$ ,  $H$  — магнитное поле,  $e$  — заряд электрона ( $\hbar = 1$ ).

В калибровке векторного потенциала

$$\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$$

нормированные собственные функции для основного уровня имеют вид

$$\psi_p(x, y) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\Lambda L}} \times \exp(ipy) \exp\left\{-\frac{(x-x_p)^2}{2\Lambda^2}\right\}, \quad (2)$$

$$\Lambda^2 = \frac{c}{|e|H}, \quad x_p = \frac{pc}{eH},$$

где  $p$  — импульс по оси  $y$ ,  $L$  — размер системы,  $\Lambda$  — магнитная длина. Центр орбиты  $x_p$  по другой оси зависит от знака заряда. Соответствующую импульсу  $p$  функцию для дырок (с другим знаком заряда) обозначим  $\tilde{\psi}_p$ .

Запишем выражение для гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \sum_p (\epsilon_1 a_p^\dagger a_p + \epsilon_2 b_p^\dagger b_p) + \mathcal{H}_{e-e} + \mathcal{H}_{h-h} + \mathcal{H}_{e-h}, \quad (3)$$

где

$$\mathcal{H}_{e-h} = - \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_2^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \Psi_2(\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}),$$

$$\mathcal{H}_{e-e} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}),$$

$$\mathcal{H}_{h-h} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi_2^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_2^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \Psi_2(\mathbf{r}') \Psi_2(\mathbf{r}).$$

Здесь приведены вклады различного типа (индекс «1» относится к электронам, индекс «2» — к дыркам). Операторы рождения и уничтожения,  $(a_p^\dagger, a_p)$  и  $(b_p^\dagger, b_p)$ , относятся соответственно к электронам и дыркам, так что полевые операторы

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = \sum_p a_p \psi_p(\mathbf{r}), \quad \Psi_2(\mathbf{r}) = \sum_p b_p \tilde{\psi}_p(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Функция  $U(\mathbf{r})$  соответствует взаимодействию частиц, в дальнейшем нам понадобится фурье-компонента этой величины:

$$U(k_1, k_2) = \int dx dy U(\mathbf{r}) \exp(-ik_1 x - ik_2 y). \quad (5)$$

Для кулоновского взаимодействия  $U(\mathbf{r}) = e^2/\epsilon r$  в двумерном случае имеем

$$U(k_1, k_2) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

( $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная).

Для решения задачи будем использовать приближение самосогласованного поля. Оператор взаимодействия  $\mathcal{H}_{e-h}$  в гамильтониане (3) в общем случае запишется в виде

$$\mathcal{H}_{e-h} = - \frac{1}{L} \sum_{p,p',q} \lambda(p-p', q) a_p^\dagger b_{-p+q}^\dagger b_{-p'+q} a_{p'}, \quad (6)$$

где

$$\lambda(p, q) = \frac{1}{L} \sum_{k_1} U(k_1, p) \exp\left\{-\Lambda^2 \frac{p^2 + k_1^2}{2} + i\Lambda^2 q k_1\right\}.$$

Эта запись годится для произвольного взаимодействия.

В приближении самосогласованного поля в операторе (6) учитывается взаимодействие пар только с противоположными импульсами, чему соответствует  $q = 0$  (как в теории сверхпроводимости). При этом расположение электронов и дырок совпадает, т. е. притяжение между ними максимально. Кроме того, учитывается усредненное взаимодействие зарядов, что получается при  $p' = p$ . В результате оператор (6) упрощается:

$$\mathcal{H}_{e-h} \approx - \frac{1}{L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p', 0) (a_p^\dagger b_{-p}^\dagger) (b_{-p'} a_{p'}) - \frac{1}{L} \sum_{p,p'} \lambda(0, p-p') (a_p^\dagger a_p) (b_{-p'}^\dagger b_{-p'}). \quad (7)$$

Рассмотрим теперь оператор  $\mathcal{H}_{e-e}$  (для  $\mathcal{H}_{h-h}$  аналогично). В указанном приближении среднее значение этого оператора можно получить, используя следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}) \rangle &\approx \\ &\approx \langle \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_1(\mathbf{r}) \rangle \langle \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}') \rangle - \\ &- \langle \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_1(\mathbf{r}') \rangle \langle \Psi_1^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_1(\mathbf{r}) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое соответствует усредненному взаимодействию зарядов, а второе — обменно-взаимодействию. Это значит, что исходный оператор

$$\mathcal{H}_{e-e} = \frac{1}{2L} \sum_{p,p',q} \tilde{\lambda}(p,p',q) a_p^\dagger a_{-p+q}^\dagger a_{-p'+q} a_{p'},$$

где

$$\tilde{\lambda}(p,p',q) = \frac{1}{L} \sum_{k_1} U(k_1, p-p') \times \exp \left\{ -\Lambda^2 \frac{(p-p')^2 + k_1^2}{2} - i\Lambda^2 (p+p'-q)k_1 \right\},$$

запишется в виде

$$\mathcal{H}_{e-e} \approx \frac{1}{2L} \sum_{p,p'} \lambda(0, p-p') (a_p^\dagger a_p) (a_{p'}^\dagger a_{p'}) - \frac{1}{2L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p', 0) (a_p^\dagger a_p) (a_{p'}^\dagger a_{p'}). \quad (8)$$

Второе слагаемое — вклад обменного взаимодействия (во взаимодействии электронов с дырками этого нет).

Первое слагаемое в выражении (8) описывает взаимодействие электронов друг с другом, как в классике. Подобный вклад имеется также во взаимодействии дырок друг с другом и (с другим знаком и удвоенный) во взаимодействии электронов с дырками (второе слагаемое в выражении (7)). Для системы с равным числом электронов и дырок в сумме эти вклады дают нуль, а если их число не равно, то надо еще учесть внешний компенсирующий заряд с тем же результатом. Далее эта часть взаимодействия не учитывается.

В результате гамильтониан (3) принимает вид

$$\mathcal{H} \approx \sum_p \left( \epsilon_1 a_p^\dagger a_p + \epsilon_2 b_{-p}^\dagger b_{-p} \right) - \frac{1}{L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p') (a_p^\dagger b_{-p}^\dagger) (b_{-p'} a_{p'}) - \frac{1}{2L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p') (a_p^\dagger a_p) (a_{p'}^\dagger a_{p'}) - \frac{1}{2L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p') (b_{-p}^\dagger b_{-p}) (b_{-p'}^\dagger b_{-p'}), \quad (9)$$

где

$$\lambda(p) = \frac{1}{L} \sum_{k_1} U(k_1, p) \exp \left\{ -\Lambda^2 \frac{p^2 + k_1^2}{2} \right\}.$$

Оператор (9) есть наш исходный модельный гамильтониан в однодолинном случае.

### 1.1. Квазиспиновый подход

Сначала рассмотрим случай равного числа электронов и дырок. Для определения основного состояния и спектра возбуждений бозевского типа удобно применить подход, который был использован Андерсоном для сверхпроводников [3]. В соответствии с этим вводим квазиспиновые операторы  $1/2$  вместо исходных операторов рождения и уничтожения пары электрон-дырка (далее будем говорить просто о спинах, путаницы не будет). Именно, занятому парой состоянию сопоставляем проекцию спина  $+1/2$ , а пустому состоянию — проекцию  $-1/2$ . Это выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} (a_p^\dagger b_{-p}^\dagger) &\rightarrow S^+(p) \equiv S_\xi(p) + iS_\eta(p), \\ (b_{-p} a_p) &\rightarrow S^-(p) \equiv S_\xi(p) - iS_\eta(p), \\ a_p^\dagger a_p + b_{-p}^\dagger b_{-p} &\rightarrow 2\{S_\zeta(p) + 1/2\}, \\ (a_p^\dagger a_p), (b_{-p}^\dagger b_{-p}) &\rightarrow S_\zeta(p) + 1/2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь координаты  $\xi, \eta, \zeta$  соответствуют пространству квазиспинов.

Используя соотношения (10), вместо (9) получим

$$\mathcal{H} \approx N_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \Delta_0}{2} - \Omega_0 \sum_p S_\zeta(p) - \frac{1}{L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p') \mathbf{S}(p) \cdot \mathbf{S}(p'). \quad (11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} -\Omega_0 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0, \\ 2\Delta_0 &= \frac{1}{L} \sum_p \lambda(p), \quad N_0 = \frac{V}{2\pi\Lambda^2} \end{aligned} \quad (12)$$

( $V$  — площадь двумерной системы,  $N_0$  — число состояний на уровне Ландау,  $2\Delta_0$  — энергия связи одиночного экситона с нулевым импульсом, см. ниже).

В случае кулоновского взаимодействия

$$2\Delta_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\epsilon\Lambda}. \quad (13)$$

В результате имеем как бы одномерную цепочку квазиспинов, взаимодействующих друг с другом ферромагнитным образом, во внешнем магнитном поле, причем магнитной энергии соответствует величина  $\Omega_0$ . Для основного состояния (все спины параллельны) выражение (11) упрощается:

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0 = (\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0) \sum_p \left\{ S_\zeta(p) + \frac{1}{2} \right\}. \quad (14)$$

Если энергия  $\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0 = 0$ , то система изотропна (энергия равна нулю), так что полный спин может быть ориентирован произвольным образом (т. е. числа заполнения могут быть любыми). В других случаях будет или полное заполнение уровня, или полное опустошение. Это напоминает ситуацию без взаимодействия, когда при абсолютном нуле имеем: 1) безразличное равновесие при  $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ ; 2) полное заполнение уровня Ландау для электронов и дырок при  $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 0$ ; 3) пустые уровни при  $\epsilon_1 + \epsilon_2 > 0$ .

О смысле величины  $2\Delta_0$ . Пусть имеются один электрон и одна дырка. Найдем энергию связи этой пары (т. е. экситона). Волновую функцию экситона с нулевым импульсом ищем в виде

$$\Phi_{ex} = \sum_p C_p a_p^\dagger b_{-p}^\dagger |0\rangle,$$

где  $|0\rangle$  — вакуумное состояние. Уравнение Шредингера запишем только с учетом взаимодействия (второе слагаемое в операторе (9)):

$$E_{ex} C_p = -\frac{1}{L} \sum_{p'} \lambda(p-p') C_{p'}$$

( $E_{ex}$  — энергия экситона без учета кинетической энергии). Поскольку имеется вырождение по энергии, для основного состояния  $C_p = \text{const}$  и

$$E_{ex} = -\frac{1}{L} \sum_p \lambda(p) \rightarrow -2\Delta_0.$$

Волновая функция экситона в координатном представлении имеет вид

$$\Psi_{ex}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \propto \sum_p \psi_p(\mathbf{r}) \tilde{\psi}_{-p}(\mathbf{r}').$$

Вычисление дает

$$\Psi_{ex} \propto \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4\Lambda^2} + \frac{i(x+x')(y-y')}{2\Lambda^2} \right\}. \quad (15)$$

### 1.2. Бозе-возбуждения

Сначала о спиновой волне (магнон). Это возбуждение соответствует распространению перевернутого спина (по отношению к выстроенным спинам). Пусть спины направлены по оси  $\zeta$  вверх. Это возможно при  $\Omega_0 \geq 0$  (результат легко обобщается на отрицательные значения  $\Omega_0$ ). Тогда волновую функцию  $\Psi_M$  магнона можно искать в виде

$$\Psi_M = \sum_k D_k S^-(k) |0\rangle,$$

где  $|0\rangle$  — исходное состояние (все спины вверх). Уравнение для энергии  $\Omega$  магнона имеет вид

$$\Omega D_k = \left\{ \Omega_0 + \frac{1}{L} \sum_q \lambda(q) \right\} D_k - \frac{1}{L} \sum_{k'} \lambda(k-k') D_{k'}.$$

Ищем решение в виде  $D_k \sim \exp(ilk)$ , где  $l$  — величина размерности длины (изменяется в пределах  $-L/2 < l < L/2$ , всего  $N_0$  значений). В результате получим спектр магнона:

$$\Omega(l) = |\Omega_0| + \frac{1}{L} \sum_q \lambda(q) - \frac{1}{L} \sum_{k'} \lambda(k-k') \times \exp \{ il(k' - k) \}. \quad (16)$$

Эта запись годится для произвольного знака  $\Omega_0$ . Последнее слагаемое при  $l = 0$  соответствует приведенному выше выражению для энергии экситона.

Для того чтобы получить представление о спектре магнона, рассмотрим простой случай короткодействующего взаимодействия (в виде  $\delta$ -функции, когда  $U(\mathbf{k}) = \text{const}$ ). В этом пределе из (16) получаем

$$\Omega(l) = |\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0| + 2\Delta_0 \{ 1 - \exp(-l^2/2\Lambda^2) \}. \quad (17)$$

Итак, мы имеем одномерный спектр магнонов. На самом деле система двумерная, поэтому в системе должны быть и двумерные возбуждения подобного типа. Для того чтобы в этом убедиться, надо выйти за рамки спиновой модели (11). Рассмотрим опять один электрон и одну дырку, как выше, но в более общем виде. Именно, будем искать энергию экситона с произвольным импульсом. Это значит, что волновая функция экситона имеет вид

$$\Phi_{ex}(q) = \sum_p C(p, q) a_p^\dagger b_{-p+q}^\dagger |0\rangle.$$

Записываем уравнение Шредингера с гамильтонианом (6) и ищем решение в виде  $C(p, q) \propto \exp(ilp)$ . Для энергии получаем выражение

$$E_{ex}(q, l) = -\frac{1}{L} \sum_k \lambda(k, q) \exp(-ilk). \quad (18)$$

При  $q = 0$  это выражение совпадает с последним слагаемым в (16).

Таким образом, энергия экситона и, соответственно, энергия возбуждения (магнона) в нашей системе, зависит от двух величин,  $q$  и  $l$ , как и положено в двумерном случае. Если ввести двумерный импульс  $\mathbf{Q} = (q, l/\Lambda^2)$ , то спектр в пределе короткодействующего взаимодействия, как в (17), запишется в виде

$$\Omega(\mathbf{Q}) = |\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0| + 2\Delta_0 \left\{ 1 - \exp \left( -\frac{\Lambda^2 Q^2}{2} \right) \right\}.$$

Это выражение справедливо и для кулоновского взаимодействия в пределе  $\Lambda Q \ll 1$ , когда величина  $\Delta_0$  определена соотношением (13). Итак, для малых значений импульса  $Q$  имеем

$$\Omega(\mathbf{Q}) \approx \Omega(0) + \Delta_0 (\Lambda Q)^2 \quad (\Lambda Q \ll 1), \quad (19)$$

$$\Omega(0) = |\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0|.$$

Это и есть спектр элементарных возбуждений (бозевского типа), который надо использовать при вычислении термодинамических величин. Но если воспринимать его буквально, то при  $\Omega(0) = 0$  может получиться логарифмическая расходимость на малых импульсах. Эта расходимость снимается, если учесть взаимодействие возбуждений.

**Дипольный момент.** Отметим одно интересное свойство магнона — он обладает электрическим дипольным моментом. Это лучше всего видно в случае, когда пара имеет импульс, а заряды электрона и дырки пространственно раздвинуты (тогда дипольный момент направлен по оси  $x$ ). Разумеется, это будет и для других состояний магнона (с другой ориентацией дипольного момента). Рассмотрим состояние

$$\Phi_{ex} = \sum_p C_p a_p^\dagger b_{-p}^\dagger |0\rangle, \quad C_p = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \exp(ilp).$$

Записываем волновую функцию в координатном представлении,

$$\Phi_{ex} = \sum_p C_p \psi_p(x, y) \tilde{\psi}_{-p}(x', y'), \quad (20)$$

и вычисляем дипольный момент  $\mathbf{d} = e(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , что дает

$$d_y = -el.$$

Функция  $\Phi_{ex}$  (20) отличается от приведенной раньше функции (15) заменой  $y - y' \rightarrow y - y' + l$ . Для такого состояния дипольный момент направлен по оси  $y$ . В общем случае дипольный момент определяется импульсом:

$$\mathbf{d} = -e\Lambda^2 \mathbf{Q}.$$

Это перекликается с подобным свойством движущегося экситона в слабом магнитном поле, когда в системе координат, в которой экситон покоится, возникает электрическое поле. Но здесь другой предельный случай, и экситон не двигается (достаточно вспомнить, что в состоянии Ландау имеются только замкнутые электрические токи).

В электрическом поле должно образоваться состояние системы с дипольным моментом (в сколь

угодно слабом поле, если спектр магнона начинается с нуля). Соответствующую этому состоянию функцию можно написать по аналогии с пробной функцией типа БКШ: если для основного состояния без поля имеем функцию

$$\Phi_{BCS} = \prod_p \left\{ u + v a_p^\dagger b_{-p}^\dagger \right\} |0\rangle,$$

то для состояния с дипольным моментом можно написать

$$\Phi = \prod_p \left\{ u + v \exp(ilp) a_p^\dagger b_{-p}^\dagger \right\} |0\rangle.$$

Фазовый множитель как раз соответствует накоплению магнов с дипольным моментом. Для ферромагнитной цепочки это есть спиновая волна конечной амплитуды.

### 1.3. Ферми-возбуждения

Для определения спектра возбуждений фермиевского типа, а также для рассмотрения случая с неравным числом электронов и дырок, используется подход, как в теории сверхпроводимости (с введением параметра порядка). Кроме того, можно сделать выводы о точности использованного приближения и увидеть, как получаются прежние результаты для спектра бозе-возбуждений.

Рассмотрим электронную часть оператора (9) в приближении самосогласованного поля (которое для него подходит идеально). Его можно переписать в виде

$$\mathcal{H}_{e-e} \approx -\frac{1}{L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p') a_p^\dagger a_p \langle a_{p'}^\dagger a_{p'} \rangle - \frac{1}{2L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p') \langle a_p^\dagger a_p \rangle \langle a_{p'}^\dagger a_{p'} \rangle.$$

Из первого слагаемого видно, какова добавка  $\delta_e$  к энергии электрона:

$$\delta_e = -\frac{1}{L} \sum_{p'} \lambda(p-p') \langle a_{p'}^\dagger a_{p'} \rangle = -2\Delta_0 \nu_e, \quad (21)$$

где  $\nu_e$  — степень заполнения уровня Ландау электронами. Аналогично для дырок:  $\delta_h = -2\Delta_0 \nu_h$ . Величины  $\delta_e$  и  $\delta_h$  — это соответственно добавки к  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ .

С учетом сказанного оператор (9) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\langle \mathcal{H}_{e-e} \rangle - \langle \mathcal{H}_{h-h} \rangle + \\ & + \sum_p (\xi_1 a_p^\dagger a_p + \xi_2 b_p^\dagger b_p) - \\ & - \frac{1}{L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p') a_p^\dagger b_{-p}^\dagger b_{-p'} a_{p'}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\xi_1 = \frac{\omega_e}{2} + \delta_e, \quad \xi_2 = \frac{\omega_h}{2} + \delta_h - E_0.$$

Последнее слагаемое в операторе (22) можно записать с использованием следующего соотношения:

$$\begin{aligned} a_p^\dagger b_{-p}^\dagger b_{-p'} a_{p'} = & \left( a_p^\dagger b_{-p}^\dagger \langle b_{-p'} a_{p'} \rangle + \text{H.c.} \right) - \\ & - \langle a_p^\dagger b_{-p}^\dagger \rangle \langle b_{-p'} a_{p'} \rangle. \end{aligned}$$

Далее проводим диагонализацию квадратичного гамильтониана (преобразованиями Боголюбова). Рассмотрим пару операторов с импульсами  $\pm p$ , введем параметр порядка  $\Delta$  (вещественный) и перейдем к операторам квазичастиц:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} = & \xi_1 a_p^\dagger a_p + \xi_2 b_{-p}^\dagger b_{-p} + \Delta (a_p^\dagger b_{-p}^\dagger + b_{-p} a_p), \\ \Delta = & -\frac{1}{L} \sum_{p'} \lambda(p-p') \langle b_{-p'} a_{p'} \rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

$$a = u\alpha + v\beta^\dagger, \quad b = u\beta - v\alpha^\dagger, \quad u^2 + v^2 = 1$$

(в последних соотношениях индексы опущены). Условие диагонализации оператора  $\mathbf{h}$  дает соотношение

$$(\xi_1 + \xi_2)uv + \Delta(u^2 - v^2) = 0.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} (u^2, v^2) = & \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \right\}, \\ uv = & -\frac{\Delta}{2\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \quad \left( \xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

После этого оператор  $\mathbf{h}$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} = & E_1 \alpha^\dagger \alpha + E_2 \beta^\dagger \beta + \left( \xi - \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \right), \\ E_{1,2} = & \pm \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} + \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для числа частиц имеем

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger a \rangle = & v^2 + u^2 \langle \alpha^\dagger \alpha \rangle - v^2 \langle \beta^\dagger \beta \rangle, \\ \langle b^\dagger b \rangle = & v^2 + u^2 \langle \beta^\dagger \beta \rangle - v^2 \langle \alpha^\dagger \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнение для параметра порядка (23) запишется в виде

$$\sqrt{\xi^2 + \Delta^2} = \Delta_0 (1 - \langle \alpha^\dagger \alpha \rangle - \langle \beta^\dagger \beta \rangle), \quad (27)$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{2L} \sum_q \lambda(q).$$

В случае кулоновского взаимодействия

$$\Delta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\varepsilon \Lambda}.$$

Разумеется, есть еще решение с  $\Delta = 0$ . Приведенные результаты годятся и для конечных температур.

Энергия основного состояния в расчете на одно состояние на уровне Ландау при равном числе электронов и дырок, т.е. при условии отсутствия квазичастиц ( $\langle \alpha^\dagger \alpha \rangle = \langle \beta^\dagger \beta \rangle = 0$ ), вычисляется усреднением оператора (9) с использованием полученных выше соотношений и равна

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathcal{H} \rangle}{N_0} = & (\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0)v^2 = \\ = & (\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0) \frac{1 - \xi/\Delta_0}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

С другой стороны, для величины  $\xi$  по определению имеем

$$\xi = \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0 \left( 1 - \frac{\xi}{\Delta_0} \right) \right\}$$

(здесь было использовано, что  $\delta_e = \delta_h = -2\Delta_0 v^2$ ). Отсюда следует условие

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0 = 0, \quad (29)$$

а величина  $\xi$  не определена, т.е. может принимать значения  $|\xi| \leq \Delta_0$ , как это видно из уравнения (27) для параметра порядка. Это случай безразличного равновесия — энергия системы постоянна (равна нулю) независимо от числа частиц (согласуется с прежним результатом, см. (14)). Только при условии (29) можно говорить о каком-то упорядочении системы. В других случаях уровни электронов и дырок или пустые ( $\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0 > 0$ ), или полностью заполнены ( $\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0 < 0$ ).

Теперь рассмотрим случай неравного числа электронов и дырок. Пусть, например, электронов больше. Тогда в основном состоянии имеются квазичастицы типа  $\alpha$ , т.е.

$$\langle \alpha^\dagger \alpha \rangle \equiv \nu_\alpha \neq 0, \quad \langle \beta^\dagger \beta \rangle = 0.$$

Расписывая выражение для  $\xi$ , опять получаем условие (29), а величина  $\xi$  не определена. Поэтому надо найти энергию системы, что дает

$$\frac{\langle \mathcal{H} \rangle}{N_0} = \frac{\nu_\alpha}{2} \left\{ \epsilon_1 - \epsilon_2 - \nu_\alpha \Delta_0 + \frac{\xi^2(2 - \nu_\alpha)}{\Delta_0(1 - \nu_\alpha)^2} \right\}.$$

Таким образом, минимуму энергии соответствует  $\xi = 0$ , т. е. максимально возможная степень упорядочения.

Для определения размера пары надо найти среднее  $\langle \Psi_1(\mathbf{r})\Psi_2(\mathbf{r}') \rangle$ . Для этой величины получается выражение (15). Видно, что размер пары порядка магнитной длины (не зависит от температуры и от величины параметра порядка).

**О роли флуктуаций.** До сих пор мы имели дело с модельным гамильтонианом (22). Возникает вопрос, какие могут быть поправки. Для выяснения этого надо взять исходный гамильтониан, перейти в нем к квазичастицам и искать поправки хотя бы по теории возмущений.

Оператор взаимодействия  $\mathcal{H}_{e-h}$  в гамильтониане (3) в общем случае запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{e-h} &= -\frac{1}{L} \sum_{p,p',q} \lambda(p-p', q) a_p^\dagger b_{-p+q}^\dagger b_{-p'+q} a_{p'}, \\ \lambda(p, q) &= \frac{1}{L} \sum_{k_1} U(k_1, p) \times \\ &\times \exp \left\{ -\Lambda^2 \frac{p^2 + k_1^2}{2} + i\Lambda^2 q k_1 \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Для электрон-электронного взаимодействия  $\mathcal{H}_{e-e}$  получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{e-e} &= \frac{1}{2L} \sum_{p,p',q} \tilde{\lambda}(p, p', q) a_p^\dagger a_{-p+q}^\dagger a_{-p'+q} a_{p'}, \\ \tilde{\lambda}(p, p', q) &= \frac{1}{L} \sum_{k_1} U(k_1, p-p') \times \\ &\times \exp \left\{ -\Lambda^2 \frac{(p-p')^2 + k_1^2}{2} - i\Lambda^2 (p+p'-q) k_1 \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично для взаимодействия дырок (с заменой  $a_p \rightarrow b_{-p}$ ).

Далее надо перейти к квазичастицам по формулам (23), (24), после чего можно было бы найти вклад флуктуаций. Например, в гамильтониане мог бы появиться вклад, соответствующий рождению (уничтожению) четырех квазичастиц (типа  $\alpha^\dagger \alpha^\dagger \beta^\dagger \beta^\dagger$ ). Можно убедиться, что такой вклад в сумме в точности обращается в нуль (если  $U(k_1, k_2)$  зависит только от модуля импульса  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ ).

Все выглядит так, как будто приближение самосогласованного поля в данной модели является точным. Действительно, формально мы имеем одномерную задачу (каждый импульс можно воспринимать как одномерную координату), и при конечных (в расчете на единицу площади) концентрациях одномерные расстояния между частицами много меньше радиуса взаимодействия, который не меньше магнитной длины (для точечного взаимодействия — магнитная длина). Это значит, что каждая частица взаимодействует сразу со многими. В этом случае флуктуации не существенны. Эти соображения, видимо, имеют ограничения (достаточно вспомнить о дробном квантовом эффекте Холла, в котором существенны двумерные корреляции), в рассматриваемой здесь задаче они проходят для одинакового числа электронов и дырок, потому что пары нейтральны. Если же изначально имеются квазичастицы какого-нибудь типа (при неравном числе электронов и дырок), то упомянутые корреляции тоже могут быть существенными, и тогда приближения самосогласованного поля может быть не достаточно.

Теперь о других возбуждениях (магнонах по прежней терминологии). Если записать взаимодействие ферми-возбуждений различного типа, то получается в точности то же взаимодействие, как для электронов и дырок. Дело в том, что каждое возбуждение несет тот же заряд, что и исходные частицы, именно, возбуждение типа  $\alpha$  имеет заряд электрона, а возбуждение типа  $\beta$  имеет заряд дырки. Поэтому связанное состояние таких возбуждений совпадает с подобным состоянием электрона и дырки. В результате (с учетом исходной энергии двух возбуждений) получается как раз энергия магнона. Это подтверждает полученный выше результат и, возможно, проясняет его смысл.

### 3. ДВЕ ДЫРОЧНЫЕ ДОЛИНЫ

Рассмотрим более интересный случай. Дело в том, что в предыдущем случае упорядочение имеет место только при определенном значении магнитного поля, когда выполняется условие (29). Для других значений будет или полное заполнение, или полное опустошение электронного и дырочного уровней (для равного числа электронов и дырок). Этого нельзя было предугадать.

В данном разделе рассматривается упорядочение в системе дырок, которое происходит в некотором интервале магнитных полей, видимо, именно это соответствует эксперименту [1]. Кроме того,

в экспериментах с пространственно-разделенными двумерными электронами (или дырками), о которых говорится в работе [4], тоже происходит примерно то же самое.

Конкретно будем рассматривать случай с одной электронной и двумя дырочными долинами. По-видимому, если существенны корреляции электронов и дырок (т.е. если их уровни достаточно близки), то для одинаковых концентраций электронов и дырок будет все так же, как и раньше. Именно, существенна только одна из дырочных долин, а другая остается пустой.

Интересен предел достаточно малых магнитных полей, когда электронная долина выбывает из игры, т.е. она заведомо заполнена, а дырочные долины заполнены частично (наполовину, если числа электронов и дырок совпадают). Это осуществляется при условии  $\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\Delta_0 < 0$ , как и раньше. Похоже на то, что именно этот случай соответствует экспериментальной ситуации. Возникает вопрос об упорядочении в системе дырочных долин.

Сначала о том, как выглядят эти долины. Соответствующие энергии в зависимости от квазиимпульса можно записать в виде:

$$\mathcal{E}_{1,2} = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{(p_y \pm p_0)^2}{2m_y}$$

(с точностью до несущественного сейчас постоянно слагаемого). Вектор  $\mathbf{p}_0 = (0, p_0)$  дает смещение долин от центра ячейки Бриллюэна. В магнитном поле, используя прежнюю калибровку векторного потенциала, для оператора энергии имеем

$$\hat{\mathcal{E}}_{1,2} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m_x} + \left(\frac{eH}{c}\right)^2 \frac{(x - x_{p\pm})^2}{2m_y},$$

$$x_{p\pm} = (p \pm p_0)\Lambda^2.$$

Здесь  $p$  — импульс по оси  $y$ , как и раньше. Отсюда видно, что в выражении для энергии уровня Ландау надо заменить  $m_y \rightarrow \sqrt{m_x m_y}$ .

Рассмотрим предел  $p_0\Lambda \gg 1$ . В этом случае при одном и том же значении импульса  $p$  перекрытием различных волновых функций по оси  $x$ , локализованных вблизи точек  $x_{p\pm}$ , можно пренебречь. После этого можно вообще забыть о сдвиге  $\pm p_0$  и просто считать, что имеется двукратно вырожденный уровень (с волновыми функциями (2)), а их ортогональность описывать, например, как для спина 1/2.

Отметим, что, по-видимому, эффективная масса дырок в несколько раз больше эффективной массы электрона. Будем считать, что для электронов можно учитывать только основной уровень Ландау, и

пусть энергетически выгодно появление электронов и дырок. Тогда для равного количества электронов и дырок имеет значение только основной уровень Ландау и для дырок. Это будет также и для неравного числа электронов и дырок, пока они все могут поместиться на основном уровне Ландау, и тогда возбужденные дырочные уровни не надо учитывать, хотя по энергетическим соображениям они могли бы играть роль. Именно этот случай только и будет рассматриваться.

Итак, двукратно вырожденная дырочная долина (обобщение на большее число эквивалентных долин очевидно). Обозначим различные состояния индексами 1, 2. По аналогии с выражением для  $\mathcal{H}_{e-e}$  (перед формулой (8)) гамильтониан системы можно записать в виде

$$\mathcal{H}_h = \frac{1}{2L} \sum_{p,p',q} \tilde{\lambda}(p,p',q) \times b_\mu^\dagger(p) b_\nu^\dagger(-p+q) b_\nu(-p'+q) b_\mu(p'). \quad (32)$$

По повторяющимся индексам подразумевается суммирование ( $\mu, \nu = 1, 2$ ). В выражении (32) не учтена исходная энергия невзаимодействующих частиц, которая в данном случае не существенна.

Рассмотрим сначала наполовину заполненные дырочные долины (числа электронов и дырок совпадают). Опять используем приближение самосогласованного поля. В этом случае части, соответствующие взаимодействию однородных зарядов, компенсируются учетом заряда электронов. В операторах с одинаковыми индексами остаются только обменные части, а в операторе с разными индексами — часть, соответствующая упорядочению, т.е. появлению средних типа  $\langle b_2^\dagger(p) b_1(p) \rangle$  (это аналог прежнего среднего  $\langle a_p b_{-p} \rangle$ ). Для пояснения рассмотрим полностью заполненную одну из дырочных долин, в то время как другая пустая. Если перенести дырку из первой долины во вторую, то имеется притяжение между этой дыркой и пустым местом в первой долине и образуется связанное состояние между ними. Этому и соответствует появление упомянутого среднего  $\langle b_2^\dagger(p) b_1(p) \rangle$ .

После этих замечаний в приближении самосогласованного поля имеем

$$\mathcal{H}_h = -\frac{1}{2L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p') b_\mu^\dagger(p) b_\nu(p) b_\nu^\dagger(p') b_\mu(p'). \quad (33)$$

Далее опять переходим к операторам квазиспина 1/2, как в (10), разумеется, немного по-другому. Именно:



$$\begin{aligned}
b_1^\dagger(p)b_2(p) &= S^+(p), & b_2^\dagger(p)b_1(p) &= S^-(p), \\
b_1^\dagger(p)b_1(p) &\rightarrow \frac{1}{2} + S_\zeta(p), \\
b_2^\dagger(p)b_2(p) &\rightarrow \frac{1}{2} - S_\zeta(p).
\end{aligned} \quad (34)$$

В результате гамильтониан  $\mathcal{H}_h$  запишется в виде:

$$\mathcal{H}_h = -N_0 \frac{\Delta_0}{2} - \frac{1}{L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p') \mathbf{S}(p) \cdot \mathbf{S}(p'). \quad (35)$$

В основном состоянии (все спины параллельны) энергия равна  $-N_0\Delta_0$  — это энергия обменного взаимодействия для полностью заполненной одной долины, в то время как другая пустая. Произвольная ориентация полного квазиспина соответствует вырождению по степени заполнения долин. Смысл этого заключается в том, что всегда заполнена только одна из долин, волновые функции частиц которой являются некоторой линейной комбинацией волновых функций в исходных долинах 1, 2. Иначе говоря, обменное взаимодействие удерживает частицы в пределах одной долины, а упорядочение (т. е. учет среднего  $\langle b_2^\dagger(p)b_1(p) \rangle$ ) позволяет выбрать эту долину произвольным образом (в виде любой комбинации исходных долин).

В результате получается полная поляризация квазиспина при сколь угодно слабом отталкивании из-за обменного взаимодействия. Фактически мы получаем (на квазиспинах) идеальное воплощение механизма ферромагнетизма Стонера, когда можно все сосчитать.

Что касается бозе-возбуждений, то получаются прежние результаты (16)–(19), если положить в них  $\Omega_0 = 0$ . Для электрического дипольного момента  $\mathbf{d}$  получается  $\mathbf{d} = |e|\Lambda^2 \mathbf{Q}$ . В этом проще всего убедиться, рассмотрев возбужденное состояние

$$\Phi(q) \propto \sum_p b_2^\dagger(p+q)b_1(p)|0\rangle,$$

где в данном случае  $|0\rangle$  соответствует полному заполнению долины 1 и пустой долине 2. Действительно, в состоянии  $\Phi(q)$  убирается заряд в точке  $\Lambda^2 p$ , а создается в точке  $\Lambda^2(p+q)$ .

В пределе  $p_0\Lambda \leq 1$  вырождение по долинам снимается, и основному состоянию соответствует симметричная волновая функция  $\Psi_S(x)$  (и операторы  $b_S(p), b_S^\dagger(p)$ ). Тем самым опять получается случай одной долины дырок, как раньше, со всеми вытекающими последствиями. Но конкретные результаты получить нельзя, потому что не известна волновая функция  $\Psi_S(x)$ .

### 3.1. Ферми-возбуждения

Здесь рассмотрим случай с двумя дырочными долинами (как в (22)–(24)), который, видимо, наиболее интересен в связи с экспериментами [1].

Исходным является гамильтониан (22). В приближении самосогласованного поля имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_h &= \sum_p \left\{ \delta_1 b_1^\dagger(p)b_1(p) + \delta_2 b_2^\dagger(p)b_2(p) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta \left[ b_1^\dagger(p)b_2(p) + b_2^\dagger(p)b_1(p) \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2L} \sum_{p,p'} \lambda(p-p') \langle b_\mu^\dagger(p)b_\nu(p) \rangle \langle b_\nu^\dagger(p')b_\mu(p') \rangle. \quad (36)
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
\delta_i &= -\frac{1}{L} \sum_{p'} \lambda(p-p') \langle b_i^\dagger(p')b_i(p') \rangle, \\
\Delta &= -\frac{1}{L} \sum_{p'} \lambda(p-p') \langle b_2^\dagger(p')b_1(p') \rangle.
\end{aligned} \quad (37)$$

Рассмотрим один из импульсов и приведем операторную часть гамильтониана (36),

$$h_h = \delta_1 b_1^\dagger b_1 + \delta_2 b_2^\dagger b_2 + \Delta \left[ b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1 \right],$$

к диагональному виду. Это, как обычно, достигается преобразованиями

$$\begin{aligned}
b_1 &= u\beta_1 + v\beta_2, & b_2 &= u\beta_2 - v\beta_1, & (u^2, v^2) &= \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\delta_-}{\sqrt{\delta_-^2 + \Delta^2}} \right\}, & (38) \\
uv &= -\frac{\Delta}{2\sqrt{\delta_-^2 + \Delta^2}} \left( \delta_\pm = \frac{\delta_1 \pm \delta_2}{2} \right).
\end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
h_h &= \tilde{E}_1 \beta_1^\dagger \beta_1 + \tilde{E}_2 \beta_2^\dagger \beta_2, \\
\tilde{E}_{1,2} &= \delta_+ \pm \sqrt{\delta_-^2 + \Delta^2}.
\end{aligned} \quad (39)$$

Наконец, для параметра порядка имеем уравнение

$$\Delta = -\frac{1}{L} \sum_{p'} \lambda(p-p') uv \left\{ \langle \beta_2^\dagger \beta_2 \rangle - \langle \beta_1^\dagger \beta_1 \rangle \right\}_{p'},$$

нетривиальное решение которого имеет вид

$$\sqrt{\delta_-^2 + \Delta^2} = \Delta_0 (\nu_2 - \nu_1). \quad (40)$$

Здесь  $\nu_{1,2}$  — степень заполнения уровня Ландау соответствующими квазичастицами.

**Температура перехода.** Как оказывается, использованный подход годится для случая с равным числом электронов и дырок (об этом позже). В других случаях приближение самосогласованного поля может быть не очень хорошим, но все же рассмотрим произвольную степень заполнения, когда величина  $\nu_1 + \nu_2$  может быть как больше, так и меньше единицы. Прежде всего заполняется нижняя ветвь возбуждений ( $\nu_2 > \nu_1$ ). Величина  $\delta_-$  по-прежнему оказывается неопределенной, что было видно для половинного заполнения в квазиспиновой модели (максимально возможная поляризация квазиспина):

$$|\delta_-| \leq \Delta_0(\nu_2 - \nu_1), \quad \delta_+ = -\Delta_0(\nu_1 + \nu_2),$$

$$\langle b_1^\dagger b_1 \rangle, \langle b_2^\dagger b_2 \rangle = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \mp \frac{\delta_-}{2\Delta_0}. \quad (41)$$

Эти формулы годятся для произвольной температуры (вплоть до точки перехода). Энергия системы при абсолютном нуле равна

$$\mathcal{H}_h/N_0 = -\Delta_0(\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

При  $\nu_2 = 1, \nu_1 = 0$  это совпадает с тем, что получается из выражения (35).

Примем  $\delta_- = 0$  (что можно ввиду произвольности этой величины). Введем химический потенциал  $\mu$  (отсчитан от  $\delta_+$ ) и функции распределения

$$\nu_{1,2} = \left\{ \exp \frac{\pm \Delta - \mu}{T} + 1 \right\}^{-1}.$$

Записывая  $\nu_1 + \nu_2 = 1 + \nu_0$ , получим условие для химического потенциала:

$$(1 + \nu_0) \exp \left( -\frac{\mu}{T} \right) = -\nu_0 \operatorname{ch}^2 \left( \frac{\Delta}{T} \right) + \sqrt{1 + \nu_0^2 \operatorname{sh}^2 \left( \frac{\Delta}{T} \right)}, \quad (42)$$

откуда в точке перехода ( $T \rightarrow T_c, \Delta \rightarrow 0$ ) имеем

$$\exp \left( -\frac{\mu}{T_c} \right) \rightarrow \frac{1 - \nu_0}{1 + \nu_0}.$$

С другой стороны, из уравнения (40) при  $\delta_- = 0$  в точке перехода ( $\nu_1 \rightarrow \nu_2$ ) получим

$$\frac{2\Delta_0}{T_c} \frac{\exp(-\mu/T_c)}{[1 + \exp(-\mu/T_c)]^2} = 1.$$

Сравнивая эти выражения, получим точку перехода:

$$T_c = \frac{1 - \nu_0^2}{2} \Delta_0. \quad (43)$$

Приведенные результаты не зависят от знака  $\nu_0$ .

Отметим, что бозе-возбуждения влияют на параметр порядка при низких температурах, когда вклад ферми-возбуждений мал. Вблизи точки перехода основное — это ферми-возбуждения, что и было использовано.

**О флуктуациях.** Как и раньше, можно рассмотреть вклад флуктуаций. Пусть  $T = 0$  и заполнена квазичастицами нижняя ветвь ( $\nu_2 = 1, \nu_1 = 0$ ), что соответствует равному числу электронов и дырок. Берем исходный гамильтониан (32), переходим к квазичастицам с помощью преобразований (38) и выделяем слагаемые типа  $\beta_1^\dagger \beta_1^\dagger \beta_2 \beta_2$ , которые и могли бы дать искомый вклад. Нетрудно убедиться, что различные вклады взаимно уничтожаются. Поэтому можно сделать вывод, что в данном случае (при половинном заполнении дырочных долин) использованный подход является точным.

Наконец, взаимодействие квазичастиц разного типа можно получить, если выделить из (32) оператор типа  $\beta_1^\dagger \beta_2^\dagger \beta_2 \beta_1$ . При этом, естественно, получается взаимодействие, как в случае разных частиц с одинаковым зарядом. Если рассмотреть связанное состояние квазичастицы  $\beta_1$  с дыркой на фоне квазичастицы  $\beta_2$ , то опять получится тот же спектр бозе-возбуждений, что и при использовании гамильтониана (35) (с соответствующим обобщением).

В заключение отметим следующее. В работе [5] рассматривалась подобная задача (подразумевалась структура металл–диэлектрик–полупроводник на основе кремния). В случае двух эквивалентных электронных долин, который соответствует разд. 3 нашей работы, на точное решение можно рассчитывать только при заполнении одной долины, что при заданном заряде имеет место при определенном значении магнитного поля. В нашей системе при заданном заряде (нулевом, т. е. для равного числа электронов и дырок) заполнение одной из дырочных долин происходит в целом интервале значений

магнитных полей. Это относительно объекта исследования. Теперь о спектре элементарных возбуждений, который, естественно, должен быть одинаков при одинаковых условиях. В работе [5] рассматриваются только бозе-возбуждения, а в нашей статье найден также спектр возбуждений фермиевского типа и, кроме того, отмечается одно из свойств бозе-возбуждения — ему соответствует электрический дипольный момент.

Благодарю за обсуждение А. В. Чаплика и М. В. Энтина, а также З. Д. Квона за сообщение о некоторых экспериментальных результатах до их опубликования и за интерес к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-02-00152-а, 09-02-12291 офи-м).

## ЛИТЕРАТУРА

1. З. Д. Квон, Е. Б. Ольшанецкий, Д. А. Козлов, Н. Н. Михайлов, С. А. Дворецкий, Письма в ЖЭТФ **87**, 588 (2008).
2. Л. В. Келдыш, Ю. В. Копаев, ФТТ **6**, 2791 (1964).
3. P. W. Anderson, Phys. Rev. **112**, 1900 (1959).
4. J. P. Eisenstein and A. H. MacDonald, Nature **432**, 691 (2004).
5. Ю. А. Бычков, С. В. Иорданский, ФТТ **29**, 2442 (1987).