ЖЭТФ, 2010, том 137, вып. 5, стр. 1018–1030

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ТОРОИДАЛЬНО ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА

В. И. Ильгисонис, А. А. Сковорода [*]

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 ноября 2009 г.

Рассмотрена структура магнитного поля в области, ограниченной замкнутой тороидальной магнитной поверхностью. Показано, что даже в случае неособого поля (тороидальная составляющая которого нигде в области не обращается в нуль) внутри области возможна объемная эргодизация магнитных силовых линий. В рамках единого подхода дается описание магнитных полей с тороидально вложенной (возможно, несимметричной) структурой магнитных поверхностей, магнитных островов и эргодических силовых линий.

1. ВВЕДЕНИЕ

Силовые линии соленоидального векторного поля в ограниченной области пространства могут, как известно, быть замкнутыми, намотанными на некоторые поверхности, образующие топологические торы, а также эргодически плотно заполнять некоторые объемы в заданной области. Интерес к структуре таких линий традиционно связан с общими задачами регулярной и хаотической динамики гамильтоновых систем (см., например, [1, 2]). Хотя эргодические поля и обладают заведомо бóльшей топологической общностью, известно, что навязанная динамической системе начальными или граничными условиями структура тороидальных поверхностей фазовых траекторий выживает в присутствии не слишком больших возмущений (КАМ-теорема).

Примеры эргодических полей построены аналитически и численно, однако, как правило, аналитические примеры строятся либо в рамках теории возмущений, лишь асимптотически удовлетворяющей условию соленоидальности и/или эргодичности [2], либо относятся к полям, имеющим в заданной области особые точки, связанные обычно с обращением модуля поля в нуль или в бесконечность (см., например, [3]). Большинство численных примеров эргодических полей обладают такими же свойствами или относятся к неограниченной области [4].

В установках магнитного удержания плазмы тороидальной топологии (токамаки, стеллараторы и др.) традиционно подразумевается возможность формирования структуры тороидально вложенных магнитных поверхностей, обеспечивающей уменьшение до нуля равновесного давления плазмы к граничной магнитной поверхности. Такая поверхность может быть сформирована, например, хорошо проводящим кожухом или при помощи специальных проводников с током, расположенных вне плазмы. Нелинейность уравнения равновесия приводит, вообще говоря, к неединственности решения для плазмы внутри заданной граничной магнитной поверхности, которая может носить бифуркационный характер как при сохранении структуры вложенных магнитных поверхностей [5], так и с ее разрушением и образованием «островной» структуры [6]. Возникновение магнитных островов в токамаке, связанное с расщеплением рациональных магнитных поверхностей в присутствии возмущения, нарушающего симметрию исходного магнитного поля, достаточно хорошо изучено теоретически [7, 8] и экспериментально [9]. При этом внутри острова формируется, как правило, собственная система вложенных винтовых магнитных поверхностей. Исследована также возможная хаотизация силовых линий магнитного поля в окрестности диверторной сепаратрисы [10], т. е. при разрушении граничной магнитной поверхности. Однако простых наглядных примеров эргодизации магнитных силовых линий внутри объема, ограниченного замкнутой магнитной поверхностью, построено не было и вопрос об их реализуемости

[*] E-mail: skovorod@nfi.kiae.ru

остается открытым. Более того, в последнее время стали появляться публикации, в которых отрицается возможность такой эргодизации [11]. Утверждается, что вместо истинной эргодизации происходит измельчение островной структуры, которое лишь выглядит хаосом на фазовых портретах систем из-за ограниченности степени пространственного разрешения в численных расчетах.

Настоящая работа как раз и посвящена построению таких примеров эргодизации магнитных полей, причем для случая неособого магнитного поля, модуль которого $|\mathbf{B}|$ нигде в рассматриваемой ограниченной области пространства не обращается в нуль при точном выполнении условия соленоидальности $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$. Более того, имея в виду преимущественно системы типа токамак, мы будем предполагать возможность введения некоей «тороидальной» координаты так, что «тороидальная» компонента магнитного поля будет отлична от нуля всюду в рассматриваемой области.

2. ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Введем в тороидальной области Γ с границей $\partial\Gamma$, которую не пересекают силовые линии магнитного поля, криволинейные координаты $\{\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3\}$. Координатная поверхность $\alpha^1=\alpha^1_{\delta\Gamma}$ отмечает границу $\partial\Gamma$. Будем отсчитывать α^1 внутрь области, $0\le\alpha^1\le\alpha^1_{\delta\Gamma}$, и называть «радиальной» координатой. Координаты $\alpha^{2,3}$ выберем угловыми, изменяющимися в пределах 0–2π. Будем их называть соответственно «полоидальной» и «тороидальной». Предполагается, что имеется линия $\alpha^1=0$ (замкнутая кривая, через которую проходят все полоидальные координатные поверхности $\alpha^2=\mathrm{const}$), причем эта кривая может быть, а может и не быть магнитной осью, т. е. замкнутой силовой линией магнитного поля. Данная линия может полностью или частично лежать в области Γ. В дальнейшем будем предполагать, что величина модуля магнитного поля B нигде в области Γ не обращается в нуль.

Как всякий вектор, магнитное поле, в том числе и эргодическое, всегда может быть представлено в ковариантном и контрвариантном базисах:

$$\mathbf{B}=B^1\mathbf{e}_1+B^2\mathbf{e}_2+B^3\mathbf{e}_3=A^1\nabla\alpha^2\times\nabla\alpha^3+ \\ +A^2\nabla\alpha^3\times\nabla\alpha^1+A^3\nabla\alpha^1\times\nabla\alpha^2, \quad (1)$$

$$\mathbf{B}=B_1\nabla\alpha^1+B_2\nabla\alpha^2+B_3\nabla\alpha^3. \quad (2)$$

Здесь

$$A^{1,2,3}=\sqrt{g}\,B^{1,2,3},\quad \sqrt{g}=\frac{1}{\nabla\alpha^1\cdot(\nabla\alpha^2\times\nabla\alpha^3)}>0$$

— знакоопределенный якобиан выбранной системы координат. Из-за однозначности магнитного поля $\mathbf{B}$ в области Γ его компоненты являются периодическими функциями угловых координат. Заметим, что здесь мы оперируем с априори заданной системой координат $\{\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3\}$ и не используем популярные в многочисленных работах по геометрии магнитных полей явные или неявные преобразования координат, упрощающие представления поля (1) и (2).

3. ПОТОКОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим представление (1), называемое потоковым из-за связи с полоидальным и тороидальным магнитными потоками. Представление (1) позволяет наглядно проиллюстрировать природу магнитных полей различных типов (см., например, [12]). Если это представление может быть записано в виде только одного слагаемого для однозначно определенных в пространстве или угловых координат, то силовые линии магнитного поля в ограниченной области Γ должны быть замкнутыми. Два слагаемых в представлении (1) в общем случае соответствуют магнитному полю, силовые линии которого наматываются на некоторые магнитные поверхности. Наконец, в случае, когда в формуле (1) присутствуют все три слагаемые, которые нельзя во всей области свести к меньшему числу заменой однозначно определенных или угловых координат, силовые линии такого магнитного поля заполняют указанную область плотно.

Представление (1) обеспечивает условие $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_i\frac{\partial A^i}{\partial\alpha^i}=0.$$

Введем вместо функций $A^{2,3}$ локальные потоковые функции Ψ, Φ соотношениями

$$A^2=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^1},\quad A^3=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^1}, \quad (3)$$

где функции Ψ, Φ периодичны по угловым координатам α^2 и α^3. Тогда из условия $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ получаем уравнение для компоненты A^1:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^1}\left(2\pi A^1+\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^3}-\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^2}\right)=0, \quad (4)$$

откуда имеем

$$2\pi A^1=C-\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^3}+\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^2}, \quad (5)$$

где $C = C(\alpha^2, \alpha^3)$ — периодическая по α^2 и α^3 функция, не зависящая от α^1. Покажем, что соотношение (5) всегда можно переписать в виде

$$2\pi A^1 = C_0 - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \alpha^2}.$$

Здесь $C_0 = \text{const}$, $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$ — периодические по α^2, α^3 функции. Действительно, введя усреднение по угловой координате α^i $(i = 2, 3)$ обозначением

$$\langle \ldots \rangle_i = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ldots d\alpha^i,$$

представим функцию C в виде

$$C(\alpha^2, \alpha^3) = C_0 + C_2(\alpha^2) + C_3(\alpha^3) + C_1(\alpha^2, \alpha^3),$$
$$C_0 = \langle C \rangle_{2,3}, \quad C_2 = \langle C \rangle_3 - C_0, \quad C_3 = \langle C \rangle_2 - C_0,$$
$$\langle C_1 \rangle_2 = \langle C_1 \rangle_3 = 0.$$

Такое представление, очевидно, исчерпывающее. Функции $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$ выбираются периодическими по угловым координатам α^2, α^3, например, в виде

$$\tilde{\Psi} = \Psi + \int\limits_{\alpha_0^2}^{\alpha^2} \left[C_1(t, \alpha^3) + C_2(t) \right] dt - \\ - \left\langle \int\limits_{\alpha_0^2}^{\alpha^2} \left[C_1(t, \alpha^3) + C_2(t) \right] dt \right\rangle_{2,3},$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \int\limits_{\alpha_0^3}^{\alpha^3} C_3(t)\, dt + \left\langle \int\limits_{\alpha_0^3}^{\alpha^3} C_3(t)\, dt \right\rangle_3.$$

Здесь начальные значения $\alpha_0^{2,3}$ произвольны.

Поскольку на границе области не должно быть нормальной составляющей магнитного поля $\mathbf{B} \cdot \nabla\alpha^1|_{\partial\Gamma} = 0$, приходим к условиям $C_0 = 0$ во всей области и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha^3} - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha^2} = 0$$

на границе. С учетом этого внутри области Γ произвольное магнитное поле представляется в виде (тильду здесь и ниже опускаем)

$$2\pi \mathbf{B} = \nabla\Phi \times \nabla\alpha^2 + \nabla\Psi \times \nabla\alpha^3, \tag{6}$$

где $\Phi, \Psi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ — некоторые периодические функции угловых координат α^2, α^3.

Это представление было получено в работе [13] в предположении, что линия $\alpha^1 = 0$ является принадлежащей Γ магнитной осью, что также приводит к условию $C_0 = 0$. В противном случае, по мнению автора [13], член $C_0 \nabla\alpha^2 \times \nabla\alpha^3$ давал бы сингулярность поля на магнитной оси и δ-функциональный вклад в его дивергенцию. Это рассуждение не вполне корректно, поскольку компонента поля

$$B^1 = A^1 (\nabla\alpha^2 \times \nabla\alpha^3) \cdot \nabla\alpha^1$$

может и не иметь особенности при $\alpha^1 = 0$ при подходящем выборе α^1. Наше же рассуждение свободно от этого недостатка. Действительно, в случае, когда линия $\alpha^1 = 0$ является магнитной осью, требование

$$B^1 = \mathbf{B} \cdot \nabla\alpha^1|_{\alpha^1 = 0} = 0$$

может быть выполнено лишь при $C_0 = 0$. С другой стороны, мы получаем условие $C_0 = 0$ и приходим к форме (6) в более общей постановке — в том числе и в случае, когда кривая $\alpha^1 = 0$ не является магнитной осью.

Выясним связь введенных функций Φ, Ψ с магнитными потоками Φ_B, Ψ_B. Если кривая $\alpha^1 = 0$ описывает магнитную ось, то из соотношений (3) получаем, что

$$\Phi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = 2\pi \int\limits_0^{\alpha^1} \sqrt{g}\, \mathbf{B} \cdot \nabla\alpha^3 d\alpha^1, \tag{7}$$

$$\Psi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = \Psi_0 - 2\pi \int\limits_0^{\alpha^1} \sqrt{g}\, \mathbf{B} \cdot \nabla\alpha^2 d\alpha^1. \tag{8}$$

Здесь значение тороидальной потоковой функции Φ на магнитной оси принято нулевым, а значение полоидальной потоковой функции Ψ положено константой Ψ_0.

Напомним, что магнитный поток через элементарную площадку равен $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, а элементы площадей тороидальной ($\alpha^3 = \text{const}$) и полоидальной ($\alpha^2 = \text{const}$) координатных поверхностей равны соответственно

$$d\mathbf{S} = \sqrt{g}\, d\alpha^1 d\alpha^2 \nabla\alpha^3, \quad d\mathbf{S} = \sqrt{g}\, d\alpha^1 d\alpha^3 \nabla\alpha^2.$$

С учетом этих соотношений и формулы (7) получаем, что тороидальный магнитный поток Φ_B через угловой сегмент ($0 \le \tilde{\alpha}^1 \le \alpha^1$, $0 \le \tilde{\alpha}^2 \le \alpha^2$) на координатной поверхности $\alpha^3 = \text{const}$ равен

$$\Phi_B(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\alpha^2} \Psi\, d\tilde{\alpha}^2. \tag{9}$$

Аналогично, полоидальный магнитный поток через угловой сегмент $(0 \le \tilde{\alpha}^1 \le \alpha^1,\ 0 \le \tilde{\alpha}^3 \le \alpha^3)$ на координатной поверхности $\alpha^2 = \mathrm{const}$ и поверхности, проходящей через магнитную ось, равен

$$\Psi_B(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = \Psi_0 \frac{\alpha^3}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\alpha^3} \Psi \, d\tilde{\alpha}^3. \qquad (10)$$

Заметим, что полный магнитный поток через любую тороидальную координатную поверхность $\alpha^1 = \mathrm{const}$ при любых потоковых функциях Φ, Ψ равен нулю. Действительно,

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla\alpha^1 \sqrt{g}\, d\alpha^2 d\alpha^3 = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^3} - \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^2} \right) d\alpha^2 d\alpha^3 = 0 \qquad (11)$$

из-за периодичности функций Φ, Ψ — очевидное следствие соленоидальности магнитного поля.

Используя формулу (6), можно представить уравнения силовых линий магнитного поля в виде уравнений Гамильтона [14]. Для этого выразим функцию Ψ через функцию Φ и угловые координаты, $\Psi = \Psi(\Phi, \alpha^2, \alpha^3)$. Уравнения силовых линий магнитного поля имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^2}{d\alpha^3} &= \frac{\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^2}{\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^3} = \\ &= -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi}\right)_{\alpha^2,\alpha^3=\mathrm{const}} = \mu(\Phi, \alpha^2, \alpha^3), \\ \frac{d\Phi}{d\alpha^3} &= \frac{\mathbf{B}\cdot\nabla\Phi}{\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^3} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^2}\right)_{\Phi,\alpha^3=\mathrm{const}}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Здесь мы ввели функцию обобщенного вращательного преобразования

$$\mu = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi}\right)_{\alpha^2,\alpha^3=\mathrm{const}}.$$

Мы пришли к гамильтоновой «динамической» системе с изменяющимся во «времени» α^3 гамильтонианом Ψ. При этом роль канонически сопряженных координат играют «импульс» Φ и угол α^2.

Запись (12) удобна при рассмотрении токамаков, стеллараторов и гофрированных торов — систем, в которых тороидальная компонента магнитного поля $\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^3$ всюду отлична от нуля. В этих конфигурациях все силовые линии магнитного поля охватывают главную ось тора. Равноправность потоковых функций позволяет использовать гамильтониан $\Phi = \Phi(\Psi, \alpha^3, \alpha^2)$ и «время» α^2 в других геометриях магнитного поля.

Зависимость гамильтониана Ψ от «времени» α^3, «импульса» Φ и угла α^2 описывает как вложенные магнитные поверхности с одной и несколькими осями (с островами), так и поверхности с объемной эргодичностью магнитного поля. Продемонстрируем это на простых примерах.

4. ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА

Магнитная конфигурация с вложенными магнитными поверхностями и с одним островом относится к интегрируемым системам. Для такой системы зависимость Ψ от углов α^2, α^3 может сводиться к зависимости от их комбинации $\hat{\alpha}^2 = m\alpha^2 - n\alpha^3$, где целые числа m, n характеризуют геометрию острова. В этом случае (6) сводится к следующему выражению:

$$2\pi\mathbf{B} = \frac{1}{m}\nabla\Phi \times \nabla\hat{\alpha}^2 + \nabla W \times \nabla\alpha^3, \qquad (13)$$

где

$$W = \Psi + \frac{n}{m}\Phi. \qquad (14)$$

Легко видеть, что при $\Psi = \Psi(\Phi, \hat{\alpha}^2)$ функция $W = W(\Phi, \hat{\alpha}^2)$, и величина W является функцией магнитной поверхности, $\mathbf{B}\cdot\nabla W = 0$. Интегрируемость обеспечивается «двумерностью» гамильтониана Ψ [15].

Продемонстрируем сказанное на простом примере, моделирующем магнитную конфигурацию токамака с запасом устойчивости $q = 1$ на магнитной оси, $q = 3$ на границе и с резонансным винтовым возмущением $m/n = 3/2$ амплитуды $A_{3/2}$. Выберем безразмерный[1)] гамильтониан Ψ в виде

$$\Psi = \Psi_0 - \frac{\ln(1+2\Phi)}{2} + \\ + \Phi(1-\Phi)A_{3/2}\cos(2\alpha^3 - 3\alpha^2), \quad \Psi_0 = \mathrm{const}. \qquad (15)$$

Запас устойчивости невозмущенной системы $(A_{3/2} = 0)$ равен $q = 1 + 2\Phi$. Магнитная ось соответствует $\Phi = 0$, граница $\partial\Gamma$ — значению $\Phi = 1$, рациональная поверхность $q = 3/2$ — значению $\Phi = 1/4$. Уравнения силовых линий (12) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^2}{d\alpha^3} &= \frac{1}{1+2\Phi} + A_{3/2}(2\Phi - 1)\cos(2\alpha^3 - 3\alpha^2), \\ \frac{d\Phi}{d\alpha^3} &= 3A_{3/2}\Phi(1-\Phi)\sin(2\alpha^3 - 3\alpha^2). \end{aligned} \qquad (16)$$

1) Для приведения к безразмерному виду магнитных потоков Φ, Ψ используем, например, величину $\pi a^2 B_0$, где a и B_0 — характерные малый радиус и величина магнитного поля.

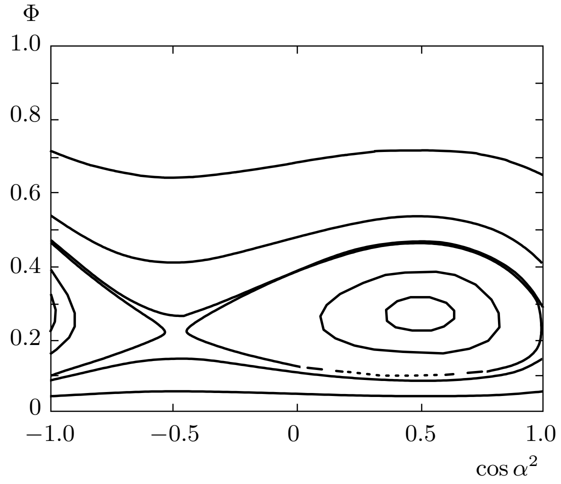

Рис. 1. Фазовый портрет магнитных силовых линий системы (16). Число тороидальных оборотов 1000

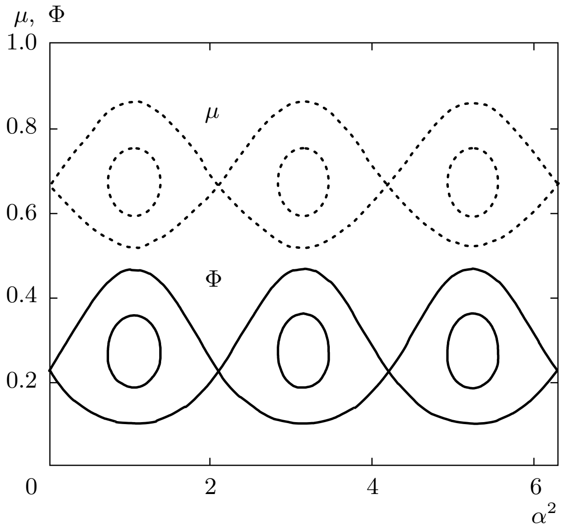

Рис. 2. Изменение μ и Φ внутри острова и на сепаратрисе

Проанализируем вид траекторий силовых линий на фазовой плоскости[2)] $\cos\alpha^2$, Φ. В невозмущенной конфигурации это система параллельных оси абсцисс линий (система магнитных поверхностей, вложенных вокруг магнитной оси $\Phi = 0$). На рис. 1 показан расчет фазового портрета уравнений (16) при амплитуде резонансной гармоники $A_{3/2} = 0.04$. Как видно из рисунка, получена система вложенных магнитных поверхностей с островом. Введя угловую переменную $\hat{\alpha}^2$ и оставляя старыми α^3, Φ, преобразуем уравнения (16) к виду

$$\frac{d\hat{\alpha}^2}{d\alpha^3} = \frac{1-4\Phi}{1+2\Phi} + 3A_{3/2}(2\Phi - 1)\cos\hat{\alpha}^2,\qquad \frac{d\Phi}{d\alpha^3} = -3A_{3/2}\Phi(1-\Phi)\sin\hat{\alpha}^2 \tag{17}$$

или к уравнению в полных дифференциалах

$$\left[\frac{4\Phi-1}{1+2\Phi} + 3A_{3/2}(1-2\Phi)\cos\hat{\alpha}^2\right] d\Phi - 3A_{3/2}\Phi(1-\Phi)\sin\hat{\alpha}^2 d\hat{\alpha}^2 = dW_1 = 0, \tag{18}$$

где интеграл W_1 равен

$$W_1 = 3\left(-\frac{1}{2}\ln(1+2\Phi) + \frac{2}{3}\Phi + A_{3/2}\Phi(1-\Phi)\cos\hat{\alpha}^2\right) = 3(W - \Psi_0). \tag{19}$$

[2)] Мы используем вместо угла α^2 величину $\cos\alpha^2$, так как она ограничена и удобна при регистрации на фазовой плоскости только точек, соответствующих полному обороту силовой линии вокруг тора.

Положение O-, X-точек можно определить аналитически из обращения в нуль правых частей уравнений (16). Они соответствуют значениям $\alpha^2 = \pi/3, 2\pi/3$ и Φ, определяемым из квадратного уравнения

$$1 - 4\Phi \pm 3A_{3/2}(1 - 4\Phi^2) = 0$$

(для параметров рис. 1 $\Phi_O = 0.271$ и $\Phi_X = 0.226$). Обобщенное вращательное преобразование в O-, X-точках рационально и равно $\mu = 2/3$. На рис. 2 показано изменение μ на сепаратрисе

$$W_{1s} = -\frac{3}{2}\ln(1+2\Phi) + 2\Phi + 3A_{3/2}\Phi(1-\Phi)\cos\hat{\alpha}^2.$$

Для условий рис. 2 $W_{1s} = -0.08645$ и $W_1 = -0.121$ на магнитной поверхности внутри острова.

На рис. 3 показаны уровни функции $\Phi = \Phi(W, \hat{\alpha}^2)$ при $A_{3/2} = 0.04$, рассчитанные по формуле (19). Характерной особенностью является многозначность зависимости $\Phi = \Phi(W)$ при фиксированном значении $\hat{\alpha}_2$.

Заметим, что в рассуждениях данного раздела (как, впрочем, и в последующих) мы не конкретизируем Φ как функцию точек пространства. Φ может быть произвольной, однако при условии $\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^3 \neq 0$ всюду в Γ ее естественно выбирать монотонной и обеспечивающей значения $\Phi|_{\alpha^1=0} = 0$ и $\Phi|_{\alpha^1=\alpha^1_{\delta\Gamma}} = 1$.

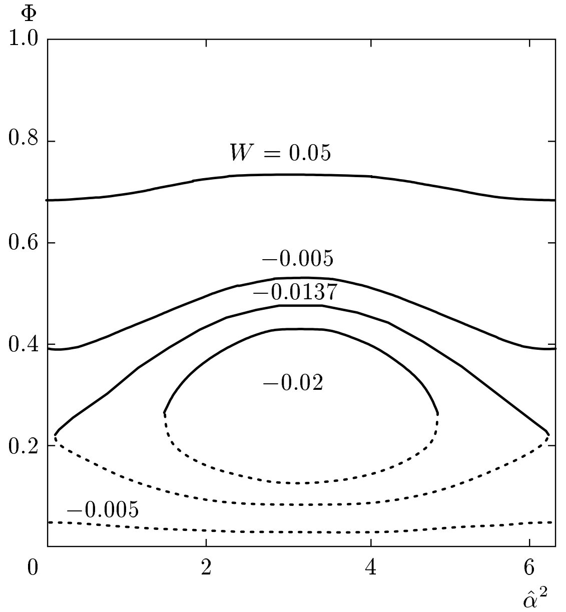

Рис. 3. Магнитные поверхности (19) с островом (здесь обозначение W сохраняется для величины $W - \Psi_0$). Сплошные и пунктирные линии отмечают многозначность функции $\Phi(W)$

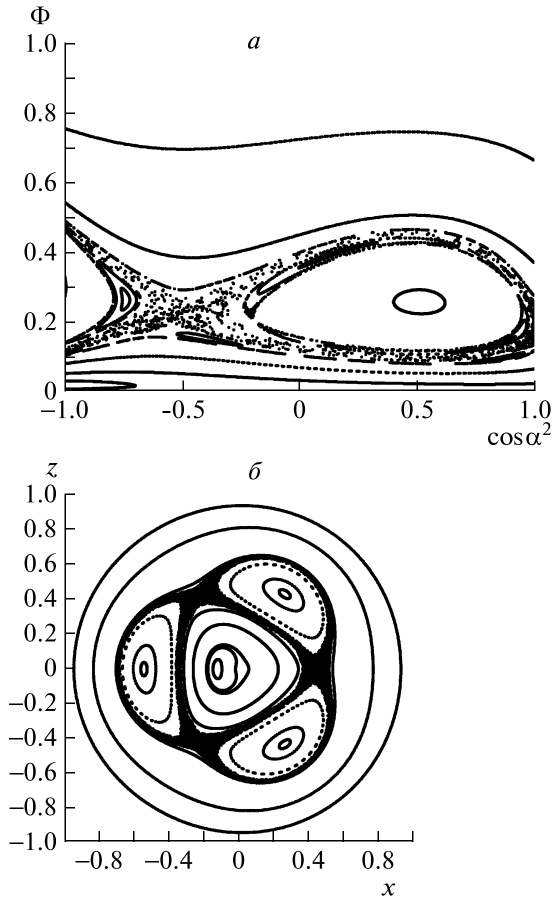

Рис. 4. Фазовый портрет магнитных силовых линий гамильтониана (20) при $A_{1/1} = A_{3/2} = 0.04$. Число тороидальных оборотов 1000 (*а*), 10000 (*б*)

5. НЕИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА

Добавим к (15) еще одну винтовую гармонику, резонирующую с магнитной осью,

$$\Psi = \Psi_0 - \frac{\ln(1+2\Phi)}{2} + \Phi(1-\Phi) \times$$

$$\times \left[A_{3/2}\cos(2\alpha^3 - 3\alpha^2) + A_{1/1}\cos(\alpha^3 - \alpha^2)\right]. \quad (20)$$

На рис. 4 показан фазовый портрет системы с гамильтонианом (20), рассчитанный в двух наборах переменных: (а) $\{\cos\alpha^2, \Phi\}$ и (б) $\{X = \sqrt{\Phi}\cos\alpha^2, Z = \sqrt{\Phi}\sin\alpha^2\}$ для случая $A_{1/1} = A_{3/2} = 0.04$. Отчетливо наблюдается образование крупных островов и эргодической области между ними вокруг сепаратрисы рис. 1, «острова» возле оси, а также вторичных более мелких островов. На рис. 5 вторичные острова показаны отдельно. Введя новые координаты $\hat\alpha^2 = 3\alpha^2 - 2\alpha^3$, $\hat\alpha^3 = \alpha^3 - \alpha^2$ ($\alpha^2 = \hat\alpha^2 + 2\hat\alpha^3$, $\alpha^3 = \hat\alpha^2 + 3\hat\alpha^3$), приведем уравнения силовых линий к виду

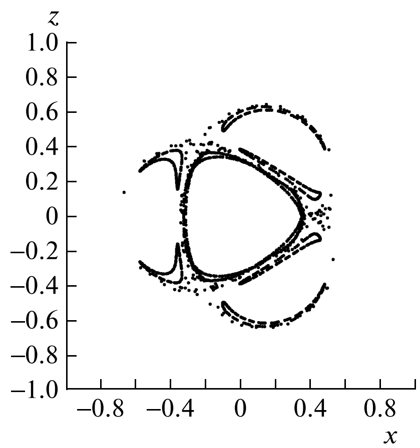

Рис. 5. Вторичные острова. Число тороидальных оборотов 1000

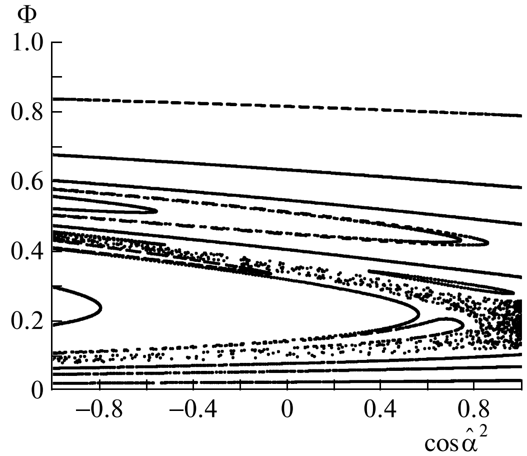

Рис. 6. Фазовый портрет магнитных силовых линий системы (21) при $\varepsilon = 1$, $A_{3/2} = 0.04$. Число тороидальных оборотов 1000

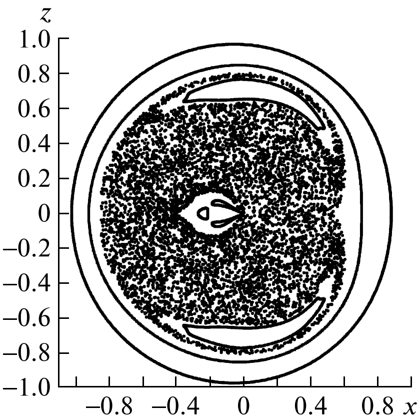

Рис. 7. Фазовый портрет системы силовых линий с гамильтонианом $\Psi = \Psi_0 - 0.5\ln(1+2\Phi) + 0.04\Phi(1-\Phi)\cos(2\alpha^3 - 3\alpha^2) + 0.08(\alpha^3 - \alpha^2)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\hat{\alpha}^2}{d\hat{\alpha}^3} = \\
&= \frac{1 - 4\Phi + 3A_{3/2}(4\Phi^2 - 1)(\cos\hat{\alpha}^2 + \varepsilon\cos\hat{\alpha}^3)}{2\Phi - A_{3/2}(4\Phi^2 - 1)(\cos\hat{\alpha}^2 + \varepsilon\cos\hat{\alpha}^3)}, \\
&\frac{d\Phi}{d\hat{\alpha}^3} = \\
&= -\frac{A_{3/2}\Phi(1-\Phi)(1+2\Phi)(3\sin\hat{\alpha}^2 - \varepsilon\sin\hat{\alpha}^3)}{2\Phi - A_{3/2}(4\Phi^2 - 1)(\cos\hat{\alpha}^2 + \varepsilon\cos\hat{\alpha}^3)},
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $\varepsilon = A_{1/1}/A_{3/2}$. Фазовый портрет системы в новых координатах показан на рис. 6, на котором вторичные острова выделяются более четко. Определим «стационарные» точки на этой фазовой плоскости. Полагая, что $d\hat{\alpha}^2/d\hat{\alpha}^3 = 0$, находим стационарные точки основного острова из условий

$$\sin\hat{\alpha}^2 = 0, \quad 1 - 4\Phi + 6A_{3/2}(1 - 4\Phi^2) = 0, \quad 1 - 4\Phi = 0.$$

Стационарные точки вторичных островов находятся из условий $d\hat{\alpha}^2/d\hat{\alpha}^3 = \pm 1$[3)] и $\sin\hat{\alpha}^2 = 0$. Соответствующие значения Φ_s определяются из уравнений

$$
\begin{aligned}
\pm 1 &= \frac{1 - 4\Phi + 3A_{3/2}(4\Phi^2 - 1)(1+\varepsilon)\cos\hat{\alpha}^2}{2\Phi - A_{3/2}(4\Phi^2 - 1)(1+\varepsilon)\cos\hat{\alpha}^2}, \\
\frac{d\Phi}{d(\cos\hat{\alpha}^2)} &= \frac{A_{3/2}\Phi(1-\Phi)(1+2\Phi)(\pm 3 - \varepsilon)}{2\Phi - A_{3/2}(4\Phi^2 - 1)(1+\varepsilon)\cos\hat{\alpha}^2}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Решение последнего уравнения (22) ищется в виде $\Phi = \Phi_s + A_{3/2} f(\cos\hat{\alpha}^2)$ и подставляется в первое уравнение для определения Φ_s. Из рис. 6 видно, что $f(\cos\hat{\alpha}^2) \sim \cos\hat{\alpha}^2$, и это позволяет просто оценить поправки к получающимся значениям $\Phi_s \sim 1/2$ и $\Phi_s \sim 1/6$.

В эргодической области вокруг «сепаратрисы» основного острова нет более мелких островов. Это проверялось запуском силовой линии с одного и того же положения с последовательным увеличением числа тороидальных оборотов (см. рис. 4). Возникновение этой области можно прокомментировать следующим образом. Если в уравнениях (21) оставить только гармонику $A_{1/1}$, то легко получить интеграл, зависящий от «времени»,

$$V = \frac{\ln(1+2\Phi)}{2} - \Phi - \Phi(1-\Phi)A_{1/1}\cos\hat{\alpha}^3.$$

Следовательно, $\Phi = \Phi(\hat{\alpha}^3)$ и в системе (21) это приводит к «колебанию» положения неустойчивой X-точки основного острова. Большая чувствительность этой области к начальным условиям естественно ведет к эргодичности. Расчет показывает, что эргодичность сепаратрисы основного острова наблюдается даже при уменьшении величины ε на два–три порядка величины.

В заключение этого раздела на рис. 7 приведен пример образования большой эргодической области, ограниченной узким слоем вложенных магнитных поверхностей вблизи граничной поверхности $\partial\Gamma$. Как видно, увеличение в два раза величины амплитуды $A_{1/1}$ полностью меняет вид фазового портрета, который оказывается весьма чувствитель-

---

3) При $\varepsilon = 1$ используем равенство

$$A_{3/2}\cos(2\alpha^3 - 3\alpha^2) + A_{1/1}\cos(\alpha^3 - \alpha^2) = = 2A_{1/1}\cos\left(\frac{3}{2}\alpha^3 - 2\alpha^2\right)\cos\left(\frac{1}{2}\alpha^3 - \alpha^2\right),$$

чтобы получить $d\hat{\alpha}^2/d\hat{\alpha}^3 = \pm 1$.

ным к соотношению амплитуд различных резонансных гармоник.

К примеру, дальнейшее увеличение амплитуды $A_{1/1}$ по сравнению с $A_{3/2}$ приводит к развитию крупных островов вблизи магнитной оси и относительному уменьшению области эргодичности. Сказанное отчасти объясняет трудности в численном обнаружении крупных эргодических областей.

6. ТОКОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим теперь представление магнитного поля (2), называемое токовым из-за связи с полоидальным и тороидальным токами. В представлении (2) введем новые функции следующими формулами:

$$\upsilon(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)=\int^{\alpha^1}B_1d\alpha^1,\quad I=B_2-\frac{\partial\upsilon}{\partial\alpha^2},\qquad P=B_3-\frac{\partial\upsilon}{\partial\alpha^3}, \tag{23}$$

и представим выражение (2) в виде

$$2\pi\mathbf{B}=I\nabla\alpha^2+P\nabla\alpha^3+\nabla\upsilon, \tag{24}$$

где токовые функции $I,P(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ — произвольные периодические функции угловых координат α^2, α^3, а $\upsilon(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ определяется из условия $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, приводящего к уравнению Пуассона. Формула (24) позволяет получить для плотности тока $\mathbf{j}=\nabla\times\mathbf{B}$ представление, вполне аналогичное представлению магнитного поля (6):

$$2\pi\mathbf{j}=\nabla I\times\nabla\alpha^2+\nabla P\times\nabla\alpha^3. \tag{25}$$

Выясним связь введенных функций I,P с токами I_c,P_c. Из формулы (25) получаем, что

$$I(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)=2\pi\int_0^{\alpha^1}\sqrt{g}\,\mathbf{j}\cdot\nabla\alpha^3d\alpha^1, \tag{26}$$

$$P(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)=P_0-2\pi\int_0^{\alpha^1}\sqrt{g}\,\mathbf{j}\cdot\nabla\alpha^2d\alpha^1. \tag{27}$$

Здесь значение функции I на магнитной оси принято нулевым, а значение функции P положено константой P_0. Ток через элементарную площадку равен $\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$. С учетом выражений для элементов площадей тороидальной ($\alpha^3=\mathrm{const}$) и полоидальной ($\alpha^2=\mathrm{const}$) координатных поверхностей получаем тороидальный ток I_c через угловой сегмент ($0\le\tilde\alpha^1\le\alpha^1$, $0\le\tilde\alpha^2\le\alpha^2$) на координатной поверхности $\alpha^3=\mathrm{const}$ в виде

$$I_c(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha^2}I\,d\tilde\alpha^2. \tag{28}$$

Аналогично, полоидальный ток через угловой сегмент ($0\le\tilde\alpha^1\le\alpha^1$, $0\le\tilde\alpha^3\le\alpha^3$) на координатной поверхности $\alpha^2=\mathrm{const}$ и поверхности, проходящей через магнитную ось, равен

$$P_c(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)=P_0\frac{\alpha^3}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha^3}P\,d\tilde\alpha^3. \tag{29}$$

Заметим, что полный ток через любую тороидальную координатную поверхность $\alpha^1=\mathrm{const}$ при любых функциях I, P равен нулю. Действительно,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbf{j}\cdot\nabla\alpha^1\sqrt{g}\,d\alpha^2d\alpha^3=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial I}{\partial\alpha^3}-\frac{\partial P}{\partial\alpha^2}\right)d\alpha^2d\alpha^3=0 \tag{30}$$

из-за периодичности функций I, P как и следовало ожидать в силу соленоидальности вектора $\mathbf{j}$.

Используя представление (25), можно представить уравнения линий тока в виде уравнений Гамильтона. Для этого выразим функцию P через функцию I и угловые координаты, $P=P(I,\alpha^2,\alpha^3)$. Уравнения линий тока имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha^2}{d\alpha^3}&=\frac{\mathbf{j}\cdot\nabla\alpha^2}{\mathbf{j}\cdot\nabla\alpha^3}=\\&=-\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)_{\alpha^2,\alpha^3=\mathrm{const}}=\mu_I(I,\alpha^2,\alpha^3),\\\frac{dI}{d\alpha^3}&=\frac{\mathbf{j}\cdot\nabla I}{\mathbf{j}\cdot\nabla\alpha^3}=\left(\frac{\partial P}{\partial\alpha^2}\right)_{I,\alpha^3=\mathrm{const}}.\end{aligned} \tag{31}$$

Здесь мы ввели обобщенное токовое вращательное преобразование $\mu_I=-(\partial P/\partial I)_{\alpha^2,\alpha^3=\mathrm{const}}$.

При произвольности функций I, P не составляет труда повторить анализ токовых поверхностей, токовых «островов», токовой эргодичности, буквально следуя предыдущим разделам. Магнитная конфигурация со вложенными токовыми поверхностями и одним токовым островом относится к интегрируемым «динамическим» системам. Переходя в формуле (25) к угловой координате $\hat\alpha^2$, получаем представление

$$2\pi\mathbf{j}=\frac{1}{m}\nabla I\times\nabla\hat\alpha^2+\nabla U\times\nabla\alpha^3, \tag{32}$$

где

$$U = P + \frac{n}{m} I. \qquad (33)$$

Величина U является функцией токовой поверхности $\mathbf{j} \cdot \nabla U = 0$, если $U = U(I, \hat{\alpha}_2)$ при $P = P(I, \hat{\alpha}_2)$. Интегрируемость обеспечивается «двумерностью» токового гамильтониана P [15]. Иллюстрации, приведенные в первом разделе, переносятся и на токи с заменой $I \to \Phi$, $P \to \Psi$.

7. СВЯЗЬ ПОТОКОВОГО И ТОКОВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛЯ

Функции I, P связаны с функциями Φ, Ψ, так как оба представления описывают одно и то же магнитное поле:

$$\nabla\Phi \times \nabla\alpha^2 + \nabla\Psi \times \nabla\alpha^3 = I\nabla\alpha^2 + P\nabla\alpha^3 + \nabla\upsilon. \qquad (34)$$

Используя общие соотношения между ковариантными и контрвариантными базисными векторами, перепишем формулу (34) в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^1}\frac{\mathbf{e}_3}{\sqrt{g}} - \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^1}\frac{\mathbf{e}_2}{\sqrt{g}} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^3}\right)\frac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{g}} = \left(I + \frac{\partial\upsilon}{\partial\alpha^2}\right)\nabla\alpha^2 + \left(P + \frac{\partial\upsilon}{\partial\alpha^3}\right)\nabla\alpha^3 + \frac{\partial\upsilon}{\partial\alpha^1}\nabla\alpha^1. \qquad (35)$$

Далее в этом разделе ограничим наше рассмотрение ортогональной системой координат $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$, для которой $g_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$. Последовательно умножая (35) на ковариантные базисные векторы, приходим к системе уравнений

$$P + \frac{\partial\upsilon}{\partial\alpha^3} = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^1}\frac{g_{33}}{\sqrt{g}}, \qquad (36)$$

$$I + \frac{\partial\upsilon}{\partial\alpha^2} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^1}\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}, \qquad (37)$$

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial\alpha^1} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^3}\right)\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}. \qquad (38)$$

Из уравнения (38) получаем выражение для υ:

$$\upsilon = \int_0^{\alpha^1}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^3}\right)\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\,d\alpha^1, \qquad (39)$$

где мы положили $\upsilon = 0$ на магнитной оси $\alpha^1 = 0$. Подставляя решение (39) в (36) и (37), вычисляем I и P:

$$P = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^1} - \int_0^{\alpha^1}\frac{\partial}{\partial\alpha^3}\left[\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^3}\right)\right]d\alpha^1, \qquad (40)$$

$$I = -\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^1} - \int_0^{\alpha^1}\frac{\partial}{\partial\alpha^2}\left[\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^3}\right)\right]d\alpha^1. \qquad (41)$$

Отметим, что появление метрических коэффициентов означает возросшую роль геометрии в рассматриваемой задаче. Для примера (15) рассмотрим цилиндрическую геометрию $x = \sqrt{\Phi}\cos\alpha^2$, $y = \sqrt{\Phi}\sin\alpha^2$, z $\{\alpha^1 = \Phi, \alpha^2, \alpha^3 = z\}$ с метрикой $g_{33} = 1$, $g_{22} = \Phi$, $g_{11} = 1/4\Phi$, $g = 1/4$. Используя формулы (40), (41), (33), получаем

$$P = 2 - A_{3/2}\Phi\left(1 - \frac{\Phi}{2}\right)\sin\hat{\alpha}_2,$$

$$I = 2\Phi\left(\frac{1}{1+2\Phi} - A_{3/2}(1-2\Phi)\cos\hat{\alpha}_2\right) + \frac{3}{2}A_{3/2}\Phi\left(1 - \frac{\Phi}{2}\right)\sin\hat{\alpha}_2$$

и токовый интеграл

$$U = 2 + \frac{4}{3}\Phi\left(\frac{1}{1+2\Phi} - A_{3/2}(1-2\Phi)\cos\hat{\alpha}^2\right). \qquad (42)$$

Токовые поверхности, сечения которых плоскостью $\alpha^3 = \text{const}$ являются линиями уровня величины U (42), показаны на рис. 8. Видно, что эти поверхности даже качественно не совпадают с магнитными поверхностями на рис. 1.

Поскольку токовое вращательное преобразование невозмущенной системы ($A_{3/2} = 0$) равно нулю, $\mu_I = 0$, резонансов с возмущениями не может быть. Следовательно, в этом примере нет ни токовых островов, ни эргодичности токов.

Пример сложной интегрируемой динамической системы дает магнитное поле в равновесии с плазмой изотропного давления $p = p(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$. Равновесие описывается уравнением баланса сил

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p. \qquad (43)$$

Поскольку $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$, $\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$, в качестве интеграла выступает изобарическая тороидальная поверхность $p(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = \text{const}$. Поскольку давление плазмы за счет движения заряженных частиц

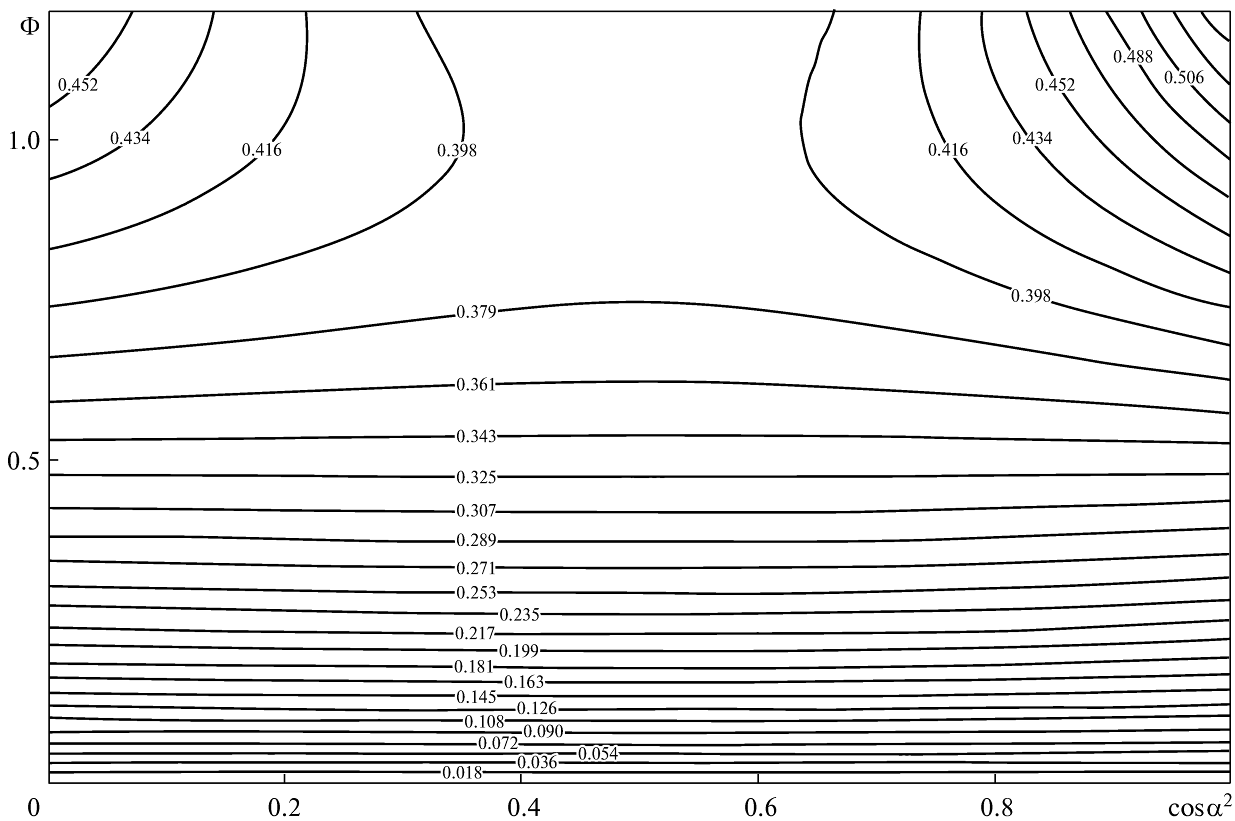

Рис. 8. Линии уровня $U-2$ при $A_{3/2}=0.04$ (42)

стремится выравниваться вдоль силовых линий на магнитных поверхностях, в качестве метки изобарической тороидальной поверхности естественно выбрать интеграл $W=W(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$, $P=P(W)$. При этом, разумеется,

$$\mathbf{B}\cdot\nabla W=0,\quad \mathbf{j}\cdot\nabla W=0. \tag{44}$$

Локальные потоковые и токовые функции Φ, Ψ, I, P представляются в виде $\Phi=\Phi(W,\alpha^2,\alpha^3)$, $\Psi = \Psi(W,\alpha^2,\alpha^3)$, $I=I(W,\alpha^2,\alpha^3)$, $P=P(W,\alpha^2,\alpha^3)$. В Приложении мы обсуждаем возникающую при этом многозначность, которая является основной проблемой при анализе равновесия с островами.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возможность введения и использования потокового и токового представлений анализируется для магнитной конфигурации общей тороидальной топологии, в том числе с магнитными островами и эргодическими в объеме силовыми линиями. Продемонстрировано, что ограниченность тороидальной области системой вложенных магнитных поверхностей не устраняет возможности образования островов и больших объемов эргодического поведения силовых линий магнитного поля.

Благодарим за разработку кода расчета фазового портрета гамильтониана Я. В. и Е. Д. Длугач, а также А. Ю. Куянова. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2009–2012 гг.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Равновесие плазмы в магнитной ловушке с островами

С использованием общих представлений поля и тока (6), (25) условия (44) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha^3}\right)_{W,\alpha^2}-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^2}\right)_{W,\alpha^3}=0,\\ &\left(\frac{\partial I}{\partial\alpha^3}\right)_{W,\alpha^2}-\left(\frac{\partial P}{\partial\alpha^2}\right)_{W,\alpha^3}=0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Общее решение (А.1) запишем в виде[4)]

$$\begin{aligned} \Phi = \overline{\Phi}(W) + \frac{\partial\chi}{\partial\alpha^2}, \quad \Psi = \overline{\Psi}(W) + \frac{\partial\chi}{\partial\alpha^3}, \\ I = \overline{I}(W) + \frac{\partial\xi}{\partial\alpha^2}, \quad P = \overline{P}(W) + \frac{\partial\xi}{\partial\alpha^3}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

где $\chi = \chi(W, \alpha^2, \alpha^3)$, $\xi = \xi(W, \alpha^2, \alpha^3)$. Вводя обозначения $\varphi = \upsilon + \xi$, $\eta = \partial\chi/\partial W$, $\nu = \partial\xi/\partial W$, приведем представления магнитного поля и тока к виду

$$2\pi\mathbf{B} = \frac{d\overline{\Phi}}{dW}\nabla W \times \nabla\alpha^2 + \\ + \frac{d\overline{\Psi}}{dW}\nabla W \times \nabla\alpha^3 + \nabla W \times \nabla\eta, \tag{A.3}$$

$$2\pi\mathbf{B} = \overline{I}\nabla\alpha^2 + \overline{P}\nabla\alpha^3 - \nu\nabla W + \nabla\varphi, \tag{A.4}$$

$$2\pi\mathbf{j} = \frac{d\overline{I}}{dW}\nabla W \times \nabla\alpha^2 + \\ + \frac{d\overline{P}}{dW}\nabla W \times \nabla\alpha^3 + \nabla W \times \nabla\nu. \tag{A.5}$$

Подставляя (А.5) в уравнение равновесия (43), получаем магнитное уравнение для определения ν:

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\nu = -\frac{d\overline{I}}{dW}\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^2 - \frac{d\overline{P}}{dW}\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^3 - 2\pi\frac{dp}{dW}. \tag{A.6}$$

Умножая выражения (А.3), (А.4) векторно и скалярно на $\mathbf{B}$, получаем магнитные уравнения для определения η, φ:

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\eta = -\frac{d\overline{\Phi}}{dW}\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^2 - \frac{d\overline{\Psi}}{dW}\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^3, \tag{A.7}$$

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\varphi = -\overline{I}\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^2 - \overline{P}\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^3 + 2\pi B^2. \tag{A.8}$$

Умножая (А.4) скалярно на $\mathbf{j}$, получаем

$$\mathbf{j}\cdot\nabla\varphi = -\overline{I}\mathbf{j}\cdot\nabla\alpha^2 - \overline{P}\mathbf{j}\cdot\nabla\alpha^3 + 2\pi\mathbf{B}\cdot\mathbf{j}. \tag{A.9}$$

С учетом соотношения

$$\frac{dl}{B} = \frac{d\alpha^2}{\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^2} = \frac{d\alpha^3}{\mathbf{B}\cdot\nabla\alpha^3}$$

проинтегрируем (А.6)–(А.8) вдоль замкнутой силовой линии. Левые части обратятся в нуль из-за периодичности функций φ, η, ν, а правые дают соотношения

$$\frac{dp}{dW}\oint\frac{dl}{B} = -\frac{d\overline{I}}{dW}\,n - \frac{d\overline{P}}{dW}\,m, \tag{A.10}$$

$$\frac{n}{m} = -\frac{d\overline{\Psi}/dW}{d\overline{\Phi}/dW} = -\frac{d\overline{\Psi}}{d\overline{\Phi}}, \tag{A.11}$$

$$\oint B\,dl = \overline{I}n + \overline{P}m. \tag{A.12}$$

Элемент объема dV между близкими магнитными поверхностями dW равен

$$dV = \sqrt{g_W}\,dW\,d\alpha^2 d\alpha^3,$$

где

$$\sqrt{g_W} = \frac{1}{\nabla W\cdot(\nabla\alpha^2\times\nabla\alpha^3)}.$$

Интегрируя (А.6)–(А.9) по этому объему, получаем с левой стороны нуль, а с правой — следующие соотношения:

$$\frac{d\overline{I}}{dW}\frac{d\overline{\Psi}}{dW} - \frac{d\overline{P}}{dW}\frac{d\overline{\Phi}}{dW} = \frac{dp}{dW}\frac{dV}{dW}, \tag{A.13}$$

$$-\overline{I}\frac{d\overline{\Psi}}{dW} + \overline{P}\frac{d\overline{\Phi}}{dW} = \frac{\iint B^2\sqrt{g_W}\,d\alpha^2 d\alpha^3}{\iint\sqrt{g_W}\,d\alpha^2 d\alpha^3}\frac{dV}{dW}, \tag{A.14}$$

$$-\overline{I}\frac{d\overline{P}}{dW} + \overline{P}\frac{d\overline{I}}{dW} = \frac{\iint \mathbf{B}\cdot\mathbf{j}\sqrt{g_W}\,d\alpha^2 d\alpha^3}{\iint\sqrt{g_W}\,d\alpha^2 d\alpha^3}\frac{dV}{dW}. \tag{A.15}$$

Просто получается общее соотношение

$$\frac{d\overline{\Phi}}{dW}\oint\frac{dl}{B} = \frac{dV}{dW},$$

с учетом которого формула (А.13) переходит в (А.10) при замкнутых силовых линиях.

Таким образом, для равновесия с островами получаются соотношения, во многом аналогичные используемым при анализе равновесия без островов. Специфика заключается в многозначности функций.

Продемонстрируем эту специфику на простом примере, аналогичном (19). Заменим в примере из третьего раздела функцию $(3/2)\ln(1+2\Phi) - 2\Phi$ близкой функцией $\Phi(1/2-\Phi)$ и получим из формулы (19) аналитическое выражение для Φ:

$$\Phi_\pm = \frac{1/2 - 3A_{3/2}\cos\hat{\alpha}^2}{2(1-3A_{3/2}\cos\hat{\alpha}^2)} + \\ + \sigma(W)\frac{1}{2(1-3A_{3/2}\cos\hat{\alpha}^2)} \times \\ \times\sqrt{\left(\frac{1}{2} - 3A_{3/2}\cos\hat{\alpha}^2\right)^2 + 4W_1(1-3A_{3/2}\cos\hat{\alpha}^2)}, \tag{A.16}$$

[4)] Возникающие произвольные угловые зависимости в выражениях $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$, $\overline{I}$, $\overline{P}$ при решении (А.1) не влияют на величины магнитных полей и токов и включаются в функции χ, ξ.

где $\sigma(W_1 > 0) = 1$, $\sigma(W_1 \le 0) = \pm 1$. Внутри сепаратрисы при $W_1 \le W_{1s} < 0$ знак плюс соответствует верхней части, а знак минус — нижней части общей границы острова. Вне острова при $W_{1s} < W_1 < 0$ знаки отмечают разные магнитные поверхности (минус ближе к оси конфигурации, см. рис. 3). Используя формулы (13) и (A.16), приходим к представлению магнитного поля

$$2\pi \mathbf{B} = \nabla W \times \nabla \alpha^3 + D \nabla W \times \nabla \hat{\alpha}^2 = \\ = 3D \nabla W \times \nabla \alpha^2 + (1 - 2D) \nabla W \times \nabla \alpha^3, \quad \text{(A.17)}$$

где

$$D = \sigma(W) \left\{ \left(\frac{1}{2} - 3A_{3/2} \cos \hat{\alpha}^2 \right)^2 + \right. \\ \left. + 12W(1 - 3A_{3/2} \cos \hat{\alpha}^2) \right\}^{-1/2},$$

$$\sigma(W > 0) = 1, \quad \sigma(W \le 0) = \pm 1.$$

В выражении для D член в знаменателе обращается в нуль в O-, X-точках и на обоих «боках эллипсов» внутри острова (см. рис. 3). Это не приводит к особенности магнитного поля, так как в этих точках $\nabla W \times \nabla \hat{\alpha}^2 = 0$. Особенности на «боках» можно устранить, вводя новые угловые координаты с центром в O-точке. Особенность в X-точке при этом сохранится, так как в ней $\nabla W = 0$.

С учетом выражений (A.16) и (A.17) получаем

$$\frac{d\overline{\Phi}}{dW} = \left\langle \frac{\partial \Phi_\pm}{\partial W} \right\rangle_{\alpha^2, \alpha^3} = \sigma(W) \frac{6}{\sqrt{1 + 48W}}, \quad \text{(A.18)}$$

$$\frac{d\overline{\Psi}}{dW} = 1 - \sigma(W) \frac{4}{\sqrt{1 + 48W}}. \quad \text{(A.19)}$$

На рис. 9 показан запас устойчивости q, рассчитанный по формуле

$$q = -\frac{d\overline{\Phi}/dW}{d\overline{\Psi}/dW} \approx \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{1 + 48W}}{6\sigma(W)}.$$

Из рис. 3, 9 видно, что одному значению W могут отвечать разные магнитные поверхности. Знак отмечает не только разные магнитные поверхности, но и отдельные участки одной магнитной поверхности внутри острова. Заметим, что на этих участках запас устойчивости, определенный выше, различен.

Такое поведение вызвано следующей геометрической причиной. На рис. 10 воспроизведен рис. 3 с указанием направления нормали к магнитной поверхности $\mathbf{n} = \nabla W / |\nabla W|$. Требование ориентируемости поверхности сепаратрисы и «островных» магнитных поверхностей приводит к смене знака направления нормали на магнитных поверхностях ниже и выше сепаратрисы. Это и вызывает появление многозначности и знаков $\pm$. Подставляя соотношения (A.18), (A.19) в представление поля (A.3), видим, что на знаки реагирует только полоидальная компонента магнитного поля.

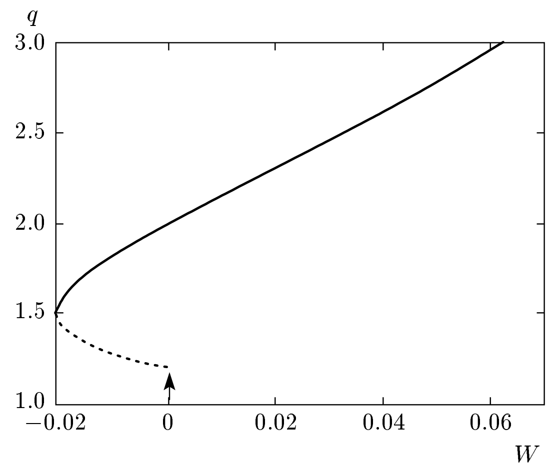

Рис. 9. Запас устойчивости $q(W)$: сплошная линия — плюс, пунктирная — минус, стрелка отмечает сепаратрису

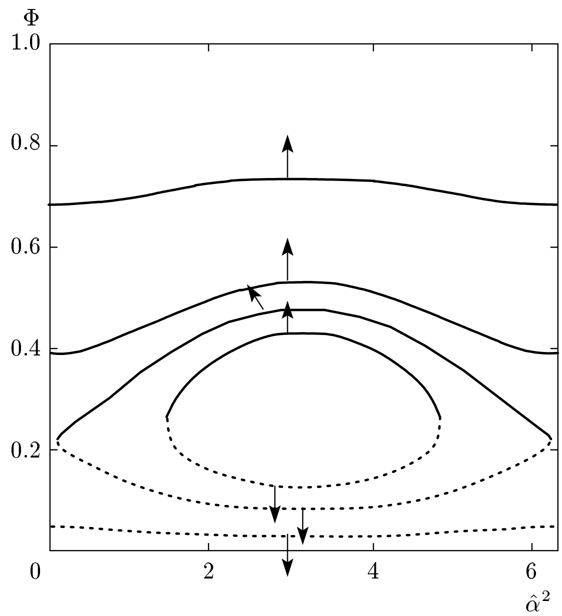

Рис. 10. Направление нормалей к магнитным поверхностям

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1974), с. 1.

2. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984).

3. О. В. Тельковская, В. В. Яньков, ДАН **307**, 861 (1989).

4. R. Balescu, Phys. Rev. E **55**, 2465 (1997).

5. В. И. Ильгисонис, Ю. И. Поздняков, Физика плазмы **30**, 1064 (2004).

6. Л. Е. Захаров, А. И. Смоляков, А. А. Субботин, Физика плазмы **16**, 779 (1990).

7. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, вып. 2, Госатомиздат, Москва (1963), с. 3.

8. Л. С. Соловьев, В. Д. Шафранов, *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, вып. 5, Атомиздат, Москва (1967), с. 3.

9. T. Oikawa, A. Isayama, T. Fujita, T. Suzuki, T. Tuda, and G. Kurita, Phys. Rev. Lett. **94**, 125003 (2005).

10. Tore Supra Team and A. Grosman, Fusion Engineering and Design **56–57**, 795 (2001).

11. Н. Ф. Магницкий, Дифференциальные уравнения **45**, 647 (2009).

12. В. И. Ильгисонис, в кн. А. И. Морозов, *Введение в плазмодинамику*, Физматлит, Москва (2008), с. 564.

13. A. H. Boozer, Phys. Fluids **26**, 1288 (1983).

14. A. H. Boozer, Rev. Mod. Phys. **76**, 1071 (2004).

15. М. Табор, *Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике*, Эдиториал УРСС, Москва (2001).