

АТОМНО-ФОТОННЫЙ КЛАСТЕР КАК ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ

*А. М. Башаров**

*Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 декабря 2009 г.

В терминах полиномиальной алгебры третьего порядка дано описание взаимодействия атомного ансамбля, локализованного в микрорезонаторе, с внешними электромагнитными полями в условиях комбинационного резонанса с оптически запрещенным атомным переходом с участием квантов микрорезонаторной моды. Показано, что в подобных задачах атомы и фотоны, локализованные в микрорезонаторе, выступают как единый объект — атомно-фотонный кластер, на состояниях которого реализуются неприводимые представления полиномиальной алгебры. В качестве внешних полей рассмотрены классическое когерентное и квантованное широкополосное электромагнитные поля. Найдены эффективный гамильтониан, эффективный оператор дипольного момента и релаксационный оператор атомно-фотонного кластера, которые выражены через образующие полиномиальной алгебры, которая является алгеброй динамической симметрии задачи. В качестве примера применения развитого математического аппарата описаны основные излучательные процессы — спонтанное излучение и нутационный эффект на атомно-фотонных кластерах. Все эти эффекты своеобразны и отличаются от аналогичных явлений на двухуровневых атомах, однако в статье рассмотрены только самые простые случаи указанных излучательных процессов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы излучения и рассеяния фотонов атомами несут фундаментальную информацию о веществе и являются основными элементарными процессами, лежащими в основе работы самых разнообразных оптических устройств. В последнее время активно изучаются излучение искусственных объектов, таких как квантовые точки, ямы, проволоочки, а также различных частиц в искусственных средах со сложной структурой фотонного спектра, как в фотонных кристаллах и т. п. Сохраняется активный интерес к излучательным процессам в микрорезонаторах и к задачам о взаимодействии конечного числа локализованных квантовых мод с атомами. В данной статье описан новый искусственный излучатель — атомно-фотонный кластер, состоящий из атомов и фотонов, локализованных в микрорезонаторе при условии комбинационного резонанса с участием одного или нескольких классических и/или квантовых внешних электромагнитных полей. Атомно-фотонный кластер выступает как единое целое в задачах резонансного взаимодействия с внешним

классическим когерентным полем, внешним квантованным широкополосным электромагнитным полем (термостатом), при наличии обоих типов полей. При этом возможно проявление всего спектра эффектов нелинейной и квантовой оптики — радиационный распад и спонтанное излучение, сверхизлучение, оптическая нутация и другие когерентные явления. С математической точки зрения на состояниях атомно-фотонного кластера реализуется неприводимое представление полиномиальной алгебры и это решающее обстоятельство в пользу выделения рассматриваемого атомно-фотонного кластера как самостоятельного элементарного объекта или элементарного излучателя.

Полиномиальная алгебра — новый математический объект, введенный Карасевым в 1993 г. [1, 2], при помощи которого удалось аналитически рассмотреть ряд проблем квантовой оптики [3–12], среди которых особо отметим неполяризованный свет [8], концепцию квазиспина [11] и аналитическую диагонализацию гамильтониана Тависа–Каммингса для произвольного числа атомов [12]. С прагматической точки зрения с полиномиальными алгебрами связаны такие понятия, как обобщения ал-

*E-mail: basharov@gmail.com

гебры осцилляторов (алгебры Гейзенберга–Вейля) и алгебры углового момента ($su(2)$) [1, 2], представления Холштейна–Примакова [13, 14] или представление спиновых переменных через бозонные переменные. Полиномиальные алгебры являются естественным языком в описании многих типов кластерных состояний [6].

Резонансное взаимодействие локализованной бозонной (фотонной, фононной) моды с атомом или группой атомов является одной из основных и самой плодотворной моделью квантовой оптики, в рамках которой впервые удалось аналитически рассмотреть полностью квантовую задачу излучательной динамики системы фотонов и атомов, а также проанализировать многочисленные представления квантовой оптики. Введенная Джейнсом и Каммингсом в 1963 г. для одного атома [15] и обобщенная Тависом и Каммингсом на случай нескольких атомов [16], эта модель стала предметом многочисленных обсуждений и обобщений, основные из которых можно найти в монографиях [17–20]. Здесь лишь отметим, что понадобилось 40 лет, чтобы аналитически диагонализировать гамильтониан резонансного взаимодействия локализованной бозонной моды с произвольным числом атомов при дополнительных предположениях [12]. При этом основную роль сыграл аппарат полиномиальных алгебр. Работы, в которых бы изучалось взаимодействие локализованной бозонной моды с произвольным числом атомов в условиях комбинационного резонанса с участием внешних электромагнитных полей, в том числе широкополосных квантованных, автору неизвестны. В работах [21, 22] рассматривались некоторые случаи взаимодействия одного атома, локализованной фотонной моды и классического электромагнитного поля при двухфотонном резонансе, а в недавней работе [23] изучалась релаксация одного атома и локализованной фотонной моды во внешнем широкополосном квантованном электромагнитном поле в дисперсионном пределе.

Обычно в атомно-фотонной системе рассматриваются так называемые одетые состояния атомов или бозонов [19], из самого названия которого следует неравноправная роль атомной и бозонной подсистем. В работе [12] система атомов и фотонов в условиях однофотонного резонансного взаимодействия уже описывается как единый объект, реализующий неприводимое представление полиномиальной алгебры. Однако этот объект возник как вспомогательное средство в диагонализации гамильтониана и не является самостоятельным — с ним не протекают никакие процессы с участием внешних полей.

В данной статье получены кинетическое уравнение и эффективный оператор поляризации для описания динамики произвольного числа атомов и фотонов, локализованных в одномодовом микрорезонаторе во внешнем классическом когерентном и квантованном широкополосном электромагнитных полях. Считается, что локализованные фотоны микрорезонаторной моды не находятся в резонансе с оптически разрешенными атомными переходами, отсутствуют потери на зеркалах на частоте микрорезонаторной моды, а квантовый переход между задействованными в процессах атомными энергетическими уровнями является оптически запрещенным. Фотонный спектр системы состоит из локализованной частоты микрорезонаторной фотонной моды и полосы пропускания внешнего электромагнитного поля, которое совместно с локализованными фотонами микрорезонатора находится в комбинационном резонансе с квантовым оптически запрещенным атомным переходом. Показано, что можно говорить об излучении именно атомно-фотонного кластера — в отсутствие возбуждений в одной из подсистем задачи (микрорезонаторной моды или атомного ансамбля) атомно-фотонный кластер не излучает. При наличии возбуждений в обеих подсистемах и широкополосном внешнем электромагнитном поле с нулевой средней плотностью фотонов (вакуумное поле) возможно спонтанное излучение кластера из атомов и фотонов, локализованных в микрорезонаторе. Если атомно-фотонный кластер не возбужден, то во внешнем когерентном поле в условиях комбинационного резонанса имеют место когерентные переходные процессы, в которых атомно-фотонный кластер выступает как единое целое. Дано описание такого атомно-фотонного кластера и процессов его взаимодействия с внешними полями в терминах полиномиальной алгебры третьего порядка, причем излучательная динамика атомно-фотонного кластера представлена квантовыми стохастическими дифференциальными уравнениями и кинетическими уравнениями с релаксационным оператором в форме Линдблада.

Статья организована следующим образом. В следующем разделе даны постановка задачи и основные приближения. Далее получен эффективный гамильтониан атомов и фотонов микрорезонатора, взаимодействующих с резонансными внешними когерентным и квантованным электромагнитными полями. В разд. 4 эффективный гамильтониан выражен через образующие полиномиальной алгебры третьего порядка и рассмотрены представления этой полиномиальной алгебры. В разд. 5 по-

лучен эффективный оператор дипольного момента атомно-фотонного кластера, который также выражен через образующие введенной ранее полиномиальной алгебры. Далее, в разд. 6 получены кинетические уравнения атомно-фотонного кластера с релаксационным оператором в форме Линдблада, которые определены через образующие полиномиальной алгебры. В двух последующих разделах рассмотрено применение развитого аппарата к описанию спонтанного излучения и нутационного эффекта в случае атомно-фотонного кластера. Показаны отличия указанных эффектов от случая обычных двухуровневых атомов. Наконец, в Заключении подчеркнуто, что развитый в статье математический аппарат дает основу для анализа любых других эффектов нелинейной и квантовой оптики с участием одного или нескольких атомно-фотонных кластеров.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть имеется одномодовый микрорезонатор, в котором содержатся одинаковые неподвижные частицы (атомы, молекулы, квантовые точки и т. п.), и внешние классическое и квантовое электромагнитные поля. Будем характеризовать имеющиеся объекты следующим образом.

1. Микрорезонатор отличается высокой добротностью, единственной собственной модой частоты ω_c , операторами рождения c^+ и уничтожения c фотонов этой моды и квантовыми состояниями указанных фотонов. Потерями на зеркалах, наличием других мод пренебрегаем. Гамильтониан микрорезонатора дается выражением

$$H_c = \hbar\omega_c N, \quad (1)$$

где $[N, c] = -c$, $[N, c^+] = c^+$, $[c, c^+] = 1$, $N = c^+c$.

2. Атомы, молекулы, квантовые точки для простоты будем именовать просто атомами с квантовыми невырожденными состояниями $|E_j\rangle$ энергии E_j . Считаем, что уровень $|E_0\rangle$ является основным, а некоторый уровень $|E_1\rangle$ связан с основным оптически запрещенным (двухквантовым) переходом $E_1 \rightarrow E_0$. Атомы сосредоточены в объеме с размерами, много меньшими длин электромагнитных волн, а взаимодействием между атомами пренебрегаем. Число атомов N_a со временем не меняется. Гамильтониан отдельного i -го атома имеет вид

$$H_a^{(i)} = \sum_j E_j |E_j\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \quad \sum_j |E_j\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)} = 1^{(i)},$$

$$\langle E_j|^{(i)} |E_k\rangle^{(i)} = \delta_{jk},$$

а гамильтониан всей атомной подсистемы является прямой суммой гамильтонианов отдельных атомов:

$$H_a = \sum_{i=1}^{N_a} H_a^{(i)}. \quad (2)$$

Верхний индекс у векторов состояний и операторов отмечает пространство состояний i -го атома.

3. Внешнее классическое когерентное электромагнитное поле характеризуется напряженностью электрического поля $E = \mathcal{E} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \nu t)}$ + с.с. с несущей частотой ν , волновым вектором \mathbf{k} и медленно меняющейся по сравнению с $e^{\pm i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \nu t)}$ амплитудой \mathcal{E} .

4. Внешнее квантованное электромагнитное поле представляется гамильтонианом H_Γ :

$$H_\Gamma = \sum_\omega \hbar\omega b_\omega^+ b_\omega, \quad (3)$$

операторами рождения b_ω^+ и уничтожения b_ω фотонов частоты ω с коммутационными соотношениями $[b_\omega, b_{\omega'}^+] = \delta_{\omega\omega'}$, вектором состояния $|\Phi_\Gamma\rangle$, центральной частотой ω_Γ распределения плотности фотонов по частотам.

5. Предполагаем, что электромагнитные поля задачи, как внешние, так и микрорезонаторной моды, взаимодействуют электродипольным образом с атомами, что описывается операторами взаимодействия

$$\begin{aligned} V_{coh} &= -E \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)}, \\ V_\Gamma &= \sum_\omega \Gamma_\omega (b_\omega^+ + b_\omega) \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)}, \\ V_c &= g(c^+ + c) \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $d_{kj} = \langle E_k | d | E_j \rangle$ — матричные элементы оператора дипольного момента атома $d = \sum_{k,j} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|$.

Для квантованных полей параметры связи представлены как произведение параметра, зависящего от геометрии электромагнитного поля, и матричного элемента оператора дипольного момента атома. В случае трехмерного электромагнитного поля $\Gamma_\omega = \sqrt{\hbar\omega^3/\pi c^3}$, $g = \Gamma_{\omega_c}$.

6. Рассматриваемые электромагнитные поля находятся в условиях комбинационного резонанса с атомным переходом $E_1 \rightarrow E_0$ (рис. 1):

$$\begin{aligned} \frac{E_1 - E_0}{\hbar} &\equiv \omega_0 \approx \omega_\Gamma - \omega_c, \\ \frac{E_1 - E_0}{\hbar} &\equiv \omega_0 \approx \nu - \omega_c, \end{aligned} \quad (5)$$

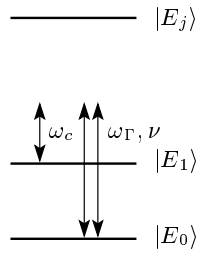


Рис. 1. Схематическое изображение энергетических уровней атомов в одномодовом микрорезонаторе в условиях комбинационного резонанса уровней $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$ с микрорезонаторной модой частоты ω_c и внешними полями с приблизительно одинаковыми несущими частотами $\omega_\Gamma \approx \nu$

причем ни микрорезонаторная мода, ни внешние электромагнитные поля не находятся в резонансе с каким-либо оптически разрешенным переходом атома с участием уровней E_0 или E_1 . Отсутствуют также другие двухфотонные резонансы с участием внешних полей, микрорезонаторной моды и рассмотренных энергетических уровней частицы. Энергетические атомные уровни $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$ будем называть резонансными.

7. Будем также пренебрегать тепловым движением атомов, эффектами отдачи при излучении/поглощении квантов и поляризационными состояниями квантов. Считаем, что атомы расположены в области пространства вблизи точки $\mathbf{r} = 0$.

Тогда гамильтониан рассматриваемой системы состоит из гамильтониана ансамбля изолированных атомов H_a , гамильтониана локализованной фотонной моды H_c , гамильтониана широкополосного внешнего поля (термостата) H_Γ , оператора взаимодействия атомов и фотонов микрорезонаторной моды V_c , оператора взаимодействия атома с классическим когерентным полем V_{coh} и оператора взаимодействия атома с широкополосным внешним полем V_Γ :

$$H = H_a + H_c + H_\Gamma + V_c + V_{coh} + V_\Gamma. \quad (6)$$

Вектор состояния $|\Psi\rangle$ всей системы удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H|\Psi\rangle. \quad (7)$$

Уравнение (7) совместно с определением гамильтониана (1)–(4), (6), коммутационными соотношениями и начальными условиями дает решение задачи об эволюции атомов и поля в одномодовом резонаторе в условиях комбинационного резонанса (5) и при остальных сделанных предположениях.

3. ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТониАН АТОМОВ И ФОТОНОВ МИКРОРЕЗОНАТОРА В УСЛОВИЯХ КОМБИНАЦИОННОГО РЕЗОНАНСА С ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ

Кинетические уравнения следуют из соотношений (1)–(7) при дополнительных предположениях относительно начального состояния внешнего термостата. Однако в случае широкополосного внешнего поля непосредственное применение к гамильтониану (6) стандартных методов получения кинетических уравнений приведет к ошибке — сначала надо из исходного гамильтониана (3) получить эффективный гамильтониан, отвечающий резонансному условию (5), и лишь затем применять стандартные методы получения кинетических уравнений [24].

Чтобы получить эффективный гамильтониан задачи, существенно упрощающий уравнение (7), совершим унитарное преобразование [24]

$$|\tilde{\Psi}\rangle = U|\Psi\rangle. \quad (8)$$

Переход от вектора $|\Psi\rangle$ к новому вектору (8) сопровождается изменением гамильтониана,

$$\tilde{H} = UHU^+ - i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} U^+, \quad (9)$$

так что теперь описание квантовой системы дается уравнением Шредингера с преобразованным гамильтонианом (9):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\Psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\Psi}\rangle. \quad (10)$$

Представим унитарный оператор U через эрмитовый оператор

$$U = e^{-iS}, \quad S^+ = S, \quad (11)$$

чтобы использовать формулу Бейкера–Хаусдорфа для произвольного оператора O :

$$e^{-iS} O e^{iS} = O + \frac{-i}{1!} [S, O] + \frac{(-i)^2}{2!} [S, [S, O]] + \frac{(-i)^3}{3!} [S, [S, [S, O]]] + \dots$$

Преобразованный гамильтониан (9) и оператор S разложим в ряды по константам взаимодействия с фотонами микрорезонаторной моды и внешних полей:

$$S = S^{(100)} + S^{(010)} + S^{(001)} + \dots, \\ \tilde{H} = \tilde{H}^{(000)} + \tilde{H}^{(100)} + \tilde{H}^{(010)} + \tilde{H}^{(001)} + \\ + \tilde{H}^{(110)} + \tilde{H}^{(011)} + \tilde{H}^{(101)} + \tilde{H}^{(200)} + \tilde{H}^{(020)} + \\ + \tilde{H}^{(002)} + \dots, \quad (12)$$

где левый индекс каждой тройки верхних индексов указывает порядок разложения по константе связи с микрорезонаторной модой, а правый — по константе связи с квантованными волнами внешнего широкополосного электромагнитного поля (термостата). Центральный индекс указывает порядок разложения по взаимодействию с классическим когерентным полем. Подставляя (11), (12) в (9) с учетом формулы Бейкера–Хаусдорфа и приравнивая выражения одного порядка малости, получаем

$$\tilde{H}^{(000)} = H_a + H_c + H_\Gamma, \quad (13)$$

$$\tilde{H}^{(100)} = V_c - i[S^{(100)}, \tilde{H}^{(000)}] + \hbar \frac{\partial S^{(100)}}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\tilde{H}^{(001)} = V_\Gamma - i[S^{(001)}, \tilde{H}^{(000)}] + \hbar \frac{\partial S^{(001)}}{\partial t}, \quad (15)$$

$$\tilde{H}^{(010)} = V_{coh} - i[S^{(010)}, \tilde{H}^{(000)}] + \hbar \frac{\partial S^{(010)}}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(101)} = & -\frac{i}{2}[S^{(001)}, V_c] - \frac{i}{2}[S^{(100)}, V_\Gamma] - \\ & -\frac{i}{2}[S^{(001)}, \tilde{H}^{(100)}] - \frac{i}{2}[S^{(100)}, \tilde{H}^{(001)}] - \\ & - i[S^{(101)}, \tilde{H}^{(000)}] + \hbar \frac{\partial S^{(101)}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(110)} = & -\frac{i}{2}[S^{(010)}, V_c] - \frac{i}{2}[S^{(100)}, V_{coh}] - \\ & -\frac{i}{2}[S^{(100)}, \tilde{H}^{(010)}] - \frac{i}{2}[S^{(010)}, \tilde{H}^{(100)}] - \\ & - i[S^{(110)}, \tilde{H}^{(000)}] + \hbar \frac{\partial S^{(110)}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(011)} = & -\frac{i}{2}[S^{(001)}, V_{coh}] - \frac{i}{2}[S^{(010)}, V_\Gamma] - \\ & -\frac{i}{2}[S^{(001)}, \tilde{H}^{(010)}] - \frac{i}{2}[S^{(010)}, \tilde{H}^{(001)}] - \\ & - i[S^{(011)}, \tilde{H}^{(000)}] + \hbar \frac{\partial S^{(011)}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(200)} = & -\frac{i}{2}[S^{(100)}, V_c] - \frac{i}{2}[S^{(100)}, \tilde{H}^{(100)}] - \\ & - i[S^{(200)}, \tilde{H}^{(000)}] + \hbar \frac{\partial S^{(200)}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(020)} = & -\frac{i}{2}[S^{(010)}, V_{coh}] - \frac{i}{2}[S^{(010)}, \tilde{H}^{(010)}] - \\ & - i[S^{(020)}, \tilde{H}^{(000)}] + \hbar \frac{\partial S^{(020)}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(002)} = & -\frac{i}{2}[S^{(002)}, V_\Gamma] - \frac{i}{2}[S^{(001)}, \tilde{H}^{(001)}] - \\ & - i[S^{(002)}, \tilde{H}^{(000)}] + \hbar \frac{\partial S^{(002)}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (22)$$

Цель унитарного преобразования — получить такой эффективный гамильтониан, недиагональные матричные элементы которого в представлении взаимодействия не содержат быстроосциллирующих слагаемых [24]. Поэтому в силу условия (5) прежде всего избавляемся от слагаемых в гамильтониане, линейных по константам связи атомов с фотонами и с классическим когерентным электромагнитным полем:

$$\tilde{H}^{(100)} = \tilde{H}^{(010)} = \tilde{H}^{(001)} = 0.$$

Это позволяет найти матричные элементы операторов $S^{(100)}$, $S^{(010)}$ и $S^{(001)}$:

$$S^{(100)} = -igc \sum_{i,k,j} \frac{d_{kj}}{\hbar(\omega_{jk} + \omega_c)} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)} + \text{H.c.},$$

$$S^{(001)} = -i \sum_{\omega} \Gamma_{\omega} b_{\omega} \sum_{i,k,j} \frac{d_{kj}}{\hbar(\omega_{jk} + \omega)} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)} + \text{H.c.},$$

$$\begin{aligned} S^{(010)} = & -i \sum_{i,k,j} \left(\frac{\mathcal{E} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \nu t)}}{\hbar(\omega_{kj} - \nu)} + \right. \\ & \left. + \frac{\mathcal{E}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \nu t)}}{\hbar(\omega_{kj} + \nu)} \right) d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)}. \end{aligned}$$

Найденные матричные элементы по формулам

$$\tilde{H}^{(110)} = -\frac{i}{2}[S^{(010)}, V_c]' - \frac{i}{2}[S^{(100)}, V_{coh}]',$$

$$\tilde{H}^{(200)} = -\frac{i}{2}[S^{(100)}, V_c]',$$

$$\tilde{H}^{(020)} = -\frac{i}{2}[S^{(010)}, V_{coh}]',$$

$$\tilde{H}^{(101)} = -\frac{i}{2}[S^{(001)}, V_c]' - \frac{i}{2}[S^{(100)}, V_\Gamma]',$$

$$\tilde{H}^{(011)} = -\frac{i}{2}[S^{(001)}, V_{coh}]' - \frac{i}{2}[S^{(010)}, V_\Gamma]'$$

определяют основные слагаемые эффективного гамильтониана задачи:

$$\begin{aligned} H^{eff} = & \tilde{H}^{(000)} + \tilde{H}^{(110)} + \tilde{H}^{(011)} + \tilde{H}^{(101)} + \\ & + \tilde{H}^{(200)} + \tilde{H}^{(020)} + \tilde{H}^{(002)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Штрих у коммутаторов означает отсутствие слагаемых, имеющих в представлении взаимодействия быстро осциллирующие множители: диагональные

матричные элементы H^{eff} не содержат быстро осциллирующих множителей, тогда как недиагональные матричные элементы H^{eff} содержат только слагаемые, операторно-временная часть которых имеет вид

$$|E_1\rangle\langle E_0|c^+ \exp(-i\nu t),$$

$$|E_1\rangle\langle E_0|c^+ b_\omega, \quad |E_0\rangle\langle E_1|c \exp(i\nu t)$$

или

$$|E_0\rangle\langle E_1|cb_\omega^*.$$

Оставшиеся слагаемые в формулах (17)–(22) определяют матричные элементы операторов второго порядка малости по константам связи $S^{(110)}$, $S^{(011)}$, $S^{(101)}$, $S^{(200)}$ и т. п.

Несложные, но громоздкие вычисления приводят к выражениям

$$\tilde{H}^{(110)} = gc^+ \sum_i |E_1\rangle\langle E_0|^{(i)} \mathcal{E} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\nu t)} \Pi_{10}(-\omega_c) + \text{H.c.},$$

$$\tilde{H}^{(101)} = -gc^+ \sum_i |E_1\rangle\langle E_0|^{(i)} \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega \Pi_{10}(-\omega_c) + \text{H.c.},$$

$$\tilde{H}^{(011)} = -\mathcal{E}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\nu t)} \times$$

$$\times \sum_{i,k} \Pi_k(\nu) |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)} \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega + \text{H.c.},$$

$$\tilde{H}^{(020)} = \mathcal{E}^* \mathcal{E} \sum_{i,k} \Pi_k(\nu) |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)},$$

$$\tilde{H}^{(200)} = g^2 \sum_{i,j,k} |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)} \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj} - \omega_c)} +$$

$$+ g^2 c^+ c \sum_{i,k} |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)} \Pi_k(\omega_c),$$

$$\tilde{H}^{(002)} = \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^+ \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega'} b_{\omega'} \sum_{i,k} \Pi_k(\omega_\Gamma) |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)} +$$

$$+ \sum_\omega \Gamma_\omega^2 \sum_{i,k,j} \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj} - \omega_\Gamma)} \sum_{i,k,j} |E_k\rangle\langle E_k|^{(i)},$$

где введены стандартные параметры теории оптических резонансных процессов [24]:

$$\Pi_{nm}(\nu) = \sum_j \frac{d_{nj} d_{jm}}{\hbar} \left(\frac{1}{\omega_{jn} + \nu} + \frac{1}{\omega_{jm} - \nu} \right) =$$

$$= \Pi_{mn}^*(-\nu),$$

$$\Pi_k(\nu) = \sum_j \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar} \left(\frac{1}{\omega_{kj} + \nu} + \frac{1}{\omega_{kj} - \nu} \right).$$

В силу условия резонанса (5) для резонансных атомных энергетических уровней $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$ справедливы соотношения $\Pi_{10}(\nu) = \Pi_{10}(\omega_\Gamma) = \Pi_{10}(-\omega_c)$.

Отметим, что оператор $\tilde{H}^{(110)}$ описывает резонансные переходы в системе локализованных атомов и фотонов под действием внешнего когерентного поля напряженности $E = \mathcal{E} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\nu t)} + \text{с.с.}$ Оператор $\tilde{H}^{(101)}$ характеризует стохастические переходы, связанные со спонтанным распадом системы локализованных атомов и фотонов. Оператор $\tilde{H}^{(020)}$ отвечает сдвигу энергетических уровней в силу высокочастотного эффекта Штарка во внешнем классическом когерентном электромагнитном поле. Этот же эффект в поле локализованной фотонной моды описывают слагаемые $\tilde{H}^{(200)}$, содержащие параметр Π_k . Слагаемые в операторах $\tilde{H}^{(200)}$ и $\tilde{H}^{(002)}$, не содержащие параметры Π_k , соответствуют лэмбовскому сдвигу энергетических уровней. Наконец, $\tilde{H}^{(011)}$ и слагаемые в $\tilde{H}^{(002)}$ с параметром Π_k описывают случайную фазовую модуляцию (сдвиги частот атомных переходов). Как правило, этими слагаемыми в $\tilde{H}^{(002)}$ можно пренебречь по сравнению с $\tilde{H}^{(011)}$ в силу наличия в классическом поле достаточного количества фотонов.

Уравнение Шредингера (10) с эффективным гамильтонианом (23) для резонансных атомных энергетических уровней $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$ имеет замкнутую форму. Это позволяет для рассматриваемой задачи записать эффективный гамильтониан, отвечающий резонансному условию (5), в виде

$$H^{eff} = H_{cl} + H_\Gamma + H_{cl}^{St} + V_{cl-coh} + V_{cl-\Gamma} + W_{cl-\Gamma}, \quad (24)$$

где $H_{cl} = H'_a + H'_c + H^{(St)}$ — гамильтониан локализованного в микрорезонаторе кластера из атомов и фотонов, V_{cl-coh} — оператор взаимодействия атомно-фотонного кластера с классическим когерентным электромагнитным полем, H_{cl}^{St} — оператор штарковского сдвига уровней атомно-фотонного кластера, $V_{cl-\Gamma}$ — оператор взаимодействия атомно-фотонного кластера с термостатом, а $W_{cl-\Gamma}$ описывает случайные сдвиги энергии резонансных уровней, вызванные совместным действием классического когерентного и вакуумного электромагнитных полей.

Гамильтониан локализованного в микрорезонаторе кластера из атомов и фотонов определяется следующими операторами. Гамильтониан «изолированных» атомов имеет диагональный вид:

$$H'_a = \hbar\omega'_0 R_3,$$

с частотой перехода между уровнями $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$, учитывающей лэмбовские сдвиги,

$$\omega'_0 = \omega_0 + g^2 \sum_j \left(\frac{|d_{1j}|^2}{\hbar^2(\omega_{1j} - \omega_c)} - \frac{|d_{0j}|^2}{\hbar^2(\omega_{0j} - \omega_c)} \right) + \sum_\omega \Gamma_\omega^2 \left(\sum_j \frac{|d_{1j}|^2}{\hbar^2(\omega_{1j} - \omega_\Gamma)} - \sum_j \frac{|d_{0j}|^2}{\hbar^2(\omega_{0j} - \omega_\Gamma)} \right).$$

Гамильтониан локализованных фотонов также имеет диагональный вид:

$$H'_c = \hbar\omega'_c N,$$

с частотой локализованной моды

$$\omega'_c = \omega_c + \frac{g^2}{2} (\Pi_0(\omega_c) + \Pi_1(\omega_c)).$$

Оператор штарковского сдвига уровней локализованных фотонов и атомов

$$H^{(St)} = \hbar\Pi^{(St)} NR_3$$

определяется величиной

$$\Pi^{(St)} = g^2 (\Pi_1(\omega_c) - \Pi_0(\omega_c)).$$

О слагаемых гамильтониана атомно-фотонного кластера, содержащих $\Pi^{(St)}$, будем также говорить как об операторе штарковского взаимодействия атомной и фотонной подсистем атомно-фотонного кластера.

Взаимодействие атомно-фотонного кластера с внешними полями представляется операторами

$$V_{cl-coh} = gc^+ R_+ \mathcal{E} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \nu t)} \Pi_{10}(-\omega_c) + \text{H.c.},$$

$$H_{cl}^{St} = \mathcal{E}^* \mathcal{E} (\Pi_1(\nu) - \Pi_0(\nu)) R_3$$

с классическим полем;

$$V_{cl-\Gamma} = -gc^+ R_+ \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega \Pi_{10}(-\omega_c) + \text{H.c.},$$

$$W_{cl-\Gamma} = -\mathcal{E}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \nu t)} (\Pi_1(\nu) - \Pi_0(\nu)) R_3 \times \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega + \text{H.c.}$$

с квантованным полем.

Оператор термостата H_Γ считаем неизменным, пренебрегая обратным влиянием на него других подсистем. Также пренебрегаем оператором

$$P_{cl-\Gamma} = (\Pi_1(\omega_\Gamma) - \Pi_0(\omega_\Gamma)) R_3 \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^+ \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega'} b_{\omega'} \quad (25)$$

из выражения для $\tilde{H}^{(002)}$. Основания для такого упрощения были указаны выше. Кроме того, если предположить наличие в атоме квазирезонансного уровня E_q , такого что $E_0 < E_1 < E_q$ и дипольный переход $E_1 \rightarrow E_q$ «сильнее» перехода $E_0 \rightarrow E_q$, т. е. $|d_{1q}| \gg |d_{0q}|$, то можно ожидать, что будут справедливы неравенства

$$|\Pi_1(\omega_c)| \gg |\Pi_{10}(-\omega_c)| \gg |\Pi_0(\omega_\Gamma)|$$

в силу соотношения между дипольными моментами,

$$|\Pi_{10}(-\omega_c)| \gg |\Pi_1(\omega_\Gamma)|$$

в силу отсутствия квазирезонансного уровня, так что окажется выполненным следующее соотношение между параметрами:

$$|\Pi_{10}(-\omega_c)| \gg |\Pi_1(\omega_\Gamma) - \Pi_0(\omega_\Gamma)|. \quad (26)$$

Тогда при не очень больших интенсивностях классического когерентного поля можно также пренебречь оператором $W_{cl-\Gamma}$. В любом случае, выполнение неравенства (26) и пренебрежение оператором (25) (а в ряде случаев и оператором $W_{cl-\Gamma}$) можно рассматривать как требования рассматриваемой модели. С точки зрения квантовых уравнений движения для операторов атомно-фотонного кластера рассматриваемая модель характеризуется квантовыми уравнениями типа Ито, представляющих собой корректную форму уравнений Ланжевена (см. ниже формулу (42)). Выход за рамки требований модели и учет оператора (25) приводит к неланжевовскому типу уравнений движения для операторов атомно-фотонного кластера и, как следствие, к нелиндабловскому характеру релаксации атомно-фотонного кластера.

В силу условия комбинационного резонанса (5) имеем соотношения $\Pi_{10}(\nu) = \Pi_{10}(\omega_\Gamma) = \Pi_{10}(-\omega_c)$.

Наконец, введены стандартные образующие $su(2)$ -алгебры, описывающие резонансные переходы в атомах:

$$R_3 = \sum_i |E_1\rangle \langle E_1|^{(i)} - \sum_i |E_0\rangle \langle E_0|^{(i)},$$

$$R_+ = \sum_i |E_1\rangle \langle E_0|^{(i)}, \quad R_- = \sum_i |E_0\rangle \langle E_1|^{(i)},$$

с коммутационными соотношениями

$$[R_3, R_\pm] = \pm R_\pm, \quad [R_+, R_-] = 2R_3.$$

4. АТОМНО-ФОТОННЫЙ КЛАСТЕР

Гамильтониан атомно-фотонного кластера H_{cl} определяется образующими двух различных алгебр: алгебры осцилляторов (или Гейзенберга–Вейля) — c, c^\dagger и N — и алгебры углового момента — R_-, R_+ и R_3 . Это результат использованной стандартной схемы квантования и для решения задачи это неудобно. Следуя работам [1, 2, 12], выразим гамильтониан H_{cl} через новые операторы, которые позволят короче и нагляднее представить исходный гамильтониан.

Вид операторов $V_{cl-\Gamma}, V_{cl-coh}$ и $H'_a + H'_c$ подсказывает, что удобно ввести новые операторы X_\pm по формулам

$$X_- = cR_-, \quad X_+ = c^\dagger R_+, \quad X_0 = \frac{R_3 + N}{2}. \quad (27)$$

При этом операторы X_0, X_- и X_+ оказываются образующими полиномиальной алгебры третьего порядка с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [X_0, X_\pm] &= \pm X_\pm, \\ [X_-, X_+] &= p_n(X_0 + 1) - p_n(X_0) \end{aligned} \quad (28)$$

и характеристическим полиномом

$$X_+ X_- = p_n(X_0) = c_0 \prod_{i=1}^n (X_0 - q_i) \quad (29)$$

третьего порядка ($n = 3$) с параметрами

$$\begin{aligned} c_0 &= -1, \quad q_1 = \frac{r - X}{2}, \\ q_2 &= \frac{X - 3r}{2}, \quad q_3 = \frac{X + r}{2} + 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Операторы

$$X = N - R_3 + r,$$

$$R^2 = R_+ R_- + R_3^2 - R_3 = R_- R_+ + R_3^2 + R_3$$

являются операторами Казимира рассматриваемой полиномиальной алгебры, причем на неприводимом представлении собственные значения оператора X неотрицательны, а оператора R^2 равны $r(r + 1)$. Будем называть описанную полиномиальную алгебру полиномиальной алгеброй атомно-фотонного кластера, поскольку образующие этой полиномиальной алгебры и ее операторы Казимира полностью определяют эффективный гамильтониан атомно-фотонного кластера:

$$\begin{aligned} H_{cl} &= \hbar(\omega'_0 + \omega'_c)X_0 + \hbar(\omega'_0 - \omega'_c)\frac{r - X}{2} + \\ &+ \hbar\Pi^{(St)}\left(X_0^2 - \frac{(r - X)^2}{4}\right), \end{aligned}$$

$$V_{cl-\Gamma} = -g \sum_{\omega} \Gamma_{\omega} (b_{\omega} X_+ \Pi_{10}(-\omega_c) + b_{\omega}^{\dagger} X_- \Pi_{10}^*(-\omega_c)),$$

$$V_{cl-coh} = g X_+ \mathcal{E} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \nu t)} \Pi_{10}(-\omega_c) + \text{H.c.},$$

$$H_{cl}^{St} = \mathcal{E}^* \mathcal{E} (\Pi_1(\nu) - \Pi_0(\nu)) \left(X_0 - \frac{X}{2} + \frac{r}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} W_{cl-\Gamma} &= -\mathcal{E}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \nu t)} (\Pi_1(\nu) - \Pi_0(\nu)) \times \\ &\times \left(X_0 - \frac{X}{2} + \frac{r}{2} \right) \sum_{\omega} \Gamma_{\omega} b_{\omega} + \text{H.c.} \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае атомно-фотонного кластера полиномиальная алгебра совпала с полиномиальной алгеброй, возникающей в задаче Тависа–Каммингса [12], хотя в модели Тависа–Каммингса реализуется одноквантовый резонанс локализованной фотонной моды с атомным переходом, тогда как у нас выполнено условие двухквантового комбинационного резонанса (5). Кроме того, при учете взаимодействия с внешними полями в модели Тависа–Каммингса гамильтониан задачи нельзя выразить только через образующие полиномиальной алгебры.

Воспользуемся неприводимыми представлениями, найденными в работе [12]. При этом следуем обозначениям лекции [25].

Введем полиномиальную алгебру второго порядка R_r , порожденную алгеброй $su(2)$, следующим образом. Из формулы для оператора Казимира $su(2)$ найдем выражение для оператора $R_+ R_-$, в котором проведем замены

$$R_{\pm} \rightarrow R_{\pm}, \quad R_3 \rightarrow R_3, \quad R^2 \rightarrow r(r + 1)I,$$

т. е. представим оператор Казимира его значением $r(r + 1)I$ на некотором неприводимом представлении (I — единичный оператор). При этом генераторы алгебры $su(2)$ становятся генераторами полиномиальной алгебры R_r , подчиняющимися тем же коммутационным соотношениям

$$[R_3, R_{\pm}] = \pm R_{\pm}, \quad [R_+, R_-] = 2R_3$$

со структурным полиномом

$$\begin{aligned} R_+ R_- &= p_2(R_3) = \sum_{i=0}^2 C_{n-i} (R_3)^i = \\ &= -(R_3 + r)(R_3 - r - 1), \end{aligned}$$

$$C_0 = -1, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = r(r + 1).$$

Для обозначения генераторов полиномиальной алгебры R_r , порожденной алгеброй $su(2)$, используем те

же буквы, что и для $su(2)$, но без наклона: R_- , R_+ и R_3 . Они определяют неприводимые представления полиномиальной алгебры атомно-фотонного кластера.

Следуя работе [12], будем говорить о представлении с заданной величиной параметра X как о зоне с номером X . Если $X < 2r$, это ближние зоны, $X > 2r$ — дальние зоны, $X = 2r$ — граничная зона. С физической точки зрения ближние зоны — это зоны, в которых число локализованных фотонов меньше числа возбужденных атомов, т. е. как бы случай с недостатком локализованных фотонов или недостаточно возбужденной фотонной подсистемы по сравнению с атомной подсистемой. Дальние зоны, наоборот, представляют ситуацию с избытком локализованных фотонов по сравнению с числом возбужденных атомов. В пограничной зоне число возбуждений атомной подсистемы равно числу возбуждений фотонной подсистемы. Как и любое равенство, этот случай редко реализуем.

Представление в дальних зонах ($X > 2r$) через генераторы R_r . Положим $r = r$. Тогда

$$X_0 = \frac{X-r}{2} + R_3, \quad X_+ = \sqrt{X-r+R_3} R_+, \quad (31)$$

$$X_- = R_- \sqrt{X-r+R_3}.$$

Эти отображения аналитичны и обратимы, поскольку множество собственных значений R_3 принадлежит отрезку $[-r, r]$, $r = r$, так что подкоренные выражения положительны.

В дальних зонах размерность представления совпадает с размерностью атомного представления. Через атомно-полевые операторы имеем

$$R_3 = R_3, \quad R_+ = \frac{1}{\sqrt{N}} c^+ R_+ = c^+ R_+ \frac{1}{\sqrt{N+1}},$$

$$R_- = c R_- \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N+1}} c R_-.$$

Равенство операторов

$$c \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N+1}} c$$

верно на состояниях, не имеющих проекции на вакуумный вектор поля.

Поскольку представление

$$X_- = R_- \sqrt{X-r+R_3}$$

можно переписать также в виде

$$X_- = \sqrt{X-r+1+R_3} R_-,$$

для середины спектра подкоренных выражений следует, что

$$X_- = R_- \sqrt{X-r} = \sqrt{X-r+1} R_-.$$

Если надо было бы выбирать нулевое приближение для X_- , то правильнее было бы взять среднее арифметическое: $X_- \approx \sqrt{X-r+1/2} R_-$ [12]. Поэтому запишем выражения для X_- и X_+ в виде

$$X_- = \frac{\Omega_z}{2} \sqrt{1 + \beta_z \left(R_3 + \frac{1}{2} \right)} R_-, \quad (32)$$

$$X_+ = R_+ \frac{\Omega_z}{2} \sqrt{1 + \beta_z \left(R_3 + \frac{1}{2} \right)},$$

$$\Omega_z = 2 \sqrt{X-r + \frac{1}{2}}, \quad \beta_z = \frac{1}{X-r+1/2}. \quad (33)$$

Представление в ближних зонах ($X < 2r$) через генераторы R_r . Здесь следует положить $r = X/2$. Тогда

$$X_0 = \frac{r}{2} + R_3, \quad X_+ = \sqrt{2r - \frac{X}{2} + R_3} R_+, \quad (34)$$

$$X_- = R_- \sqrt{2r - \frac{X}{2} + R_3}.$$

В ближних зонах размерность неприводимого представления меньше размерности инвариантного атомного подпространства, соответствующего данному кооперативному числу r . Через атомно-полевые операторы имеем

$$R_3 = N - \frac{X}{2},$$

$$R_+ = \frac{1}{\sqrt{2r-X+N}} c^+ R_+ = c^+ \frac{1}{\sqrt{r+R_3}} R_+,$$

$$R_- = c R_- \frac{1}{\sqrt{2r-X+N}} = R_- \frac{1}{\sqrt{r+R_3}} c.$$

Справедливы также формулы (32) с параметрами

$$\Omega_z = 2 \sqrt{\frac{4r-X+1}{2}}, \quad \beta_z = \frac{2}{4r-X+1}. \quad (35)$$

В ряде случаев удобно рассматривать параметры β_z в качестве параметра малости и использовать методы теории возмущений, рассматривая случаи ближней и дальней зон единым образом. Тогда в качестве нулевого приближения имеем

$$X_- = \Omega_z R_+ / 2, \quad X_+ = \Omega_z R_- / 2. \quad (36)$$

В заключение раздела подчеркнем, что на состояниях атомно-фотонного кластера реализуется неприводимое представление полиномиальной алгебры атомно-фотонного кластера, при этом размерность пространства состояний определяется наименьшим числом возбуждений в подсистемах кластера.

5. ПОЛЯРИЗАЦИЯ АТОМНО-ФОТОННОГО КЛАСТЕРА

Отклик локализованных в микрорезонаторе ансамбля атомов и фотонов на воздействие классического когерентного электромагнитного поля определяется полной поляризацией системы P , которая входит в уравнения Максвелла [24]. С учетом преобразования (8) представим поляризацию системы как

$$P = \sum_i \text{Tr}(\rho d^{(i)}) = \sum_i \text{Tr}(\tilde{\rho} e^{-iS} d^{(i)} e^{iS}) = \text{Tr}(\tilde{\rho} D),$$

где $\tilde{\rho} = e^{-iS} \rho e^{iS}$ — матрица плотности атомно-фотонного кластера,

$$D = \sum_{i,kj} e^{-iS} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)} e^{iS}$$

— оператор эффективного дипольного момента системы.

Будем интересоваться поляризацией среды в случае воздействия классического когерентного поля несущей частоты ν , удовлетворяющей условию резонанса (5) с атомно-фотонным кластером. Эффективный гамильтониан атомно-фотонного кластера не имеет матричных элементов, описывающих переходы с резонансных уровней $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$ на нерезонансные уровни, поэтому при отсутствии когерентности на нерезонансных переходах удобно поляризацию ансамбля атомов и фотонов, локализованных в микрорезонаторе, представить как сумму поляризации кластера P_{cl} и нерезонансной поляризации P_{nonres} . Основное различие между ними состоит в том, что резонансные переходы в атомно-фотонном кластере влияют на величину P_{cl} , в то время как слагаемое P_{nonres} в выражении для полной поляризации не чувствительно к ним. С точки зрения оператора эффективного дипольного момента, его слагаемые, определяющие P_{nonres} , не содержат проекционных операторов на резонансные состояния $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$.

Для вычисления поляризации среды воспользуемся формулой Бейкера – Хаусдорфа для оператора

эффективного дипольного момента и ограничимся первым порядком разложения по константам связи:

$$D \approx \sum_{i,kj} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)} - i \sum_{i,kj} \left(S^{(100)} + S^{(010)} + S^{(001)} \right) d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)} + i \sum_{i,kj} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)} \left(S^{(100)} + S^{(010)} + S^{(001)} \right). \quad (37)$$

Нерезонансная поляризация среды определяется слагаемыми

$$D \approx -i \sum_{i,kj} S^{(010)} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)} + i \sum_{i,kj} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|^{(i)} S^{(010)},$$

$$P_{nonres} = 4\pi \chi^{(1)'} E,$$

$$\chi^{(1)'} = -\frac{1}{4\pi} \text{Tr} \left(\tilde{\rho} \sum_{i,k \neq 0,1} \Pi_k(\nu) |E_k\rangle \langle E_k|^{(i)} \right).$$

Выражение для линейной восприимчивости $\chi^{(1)'}$ (штрих означает отсутствие слагаемых, определяемых матричными элементами $\tilde{\rho}$ с участием резонансных уровней $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$), вообще говоря, не сводится к стандартному выражению для невзаимодействующих между собой атомов,

$$\chi^{(1)'} = -\frac{1}{4\pi} N'_a \sum_{k \neq 0,1} \Pi_k(\nu) \tilde{\rho}_{kk}^{(1)}$$

($\tilde{\rho}_{kk}^{(1)}$ — диагональные матричные элементы одноатомной матрицы плотности [24]), поскольку состояния атомов на уровнях $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$ перепутаны как между собой, так и с фотонной подсистемой.

Поляризация атомно-фотонного кластера определяется эффективным оператором дипольного момента кластера (37) с операторами $S^{(100)}$, $S^{(010)}$ и проекционными операторами только на атомные состояния $|E_0\rangle$ и $|E_1\rangle$. В поле волнового пакета с несущей частотой ν в условиях (5) поляризация атомно-фотонного кластера наводится как на частоте внешнего поля ν , так и на комбинационных частотах 2ν и $\nu \pm \omega_0$. Также появляется квазистатическая поляризация. Для исследования класса когерентных переходных эффектов достаточно ограничиться рассмотрением поляризации атомно-фотонного класте-

ра на частоте внешнего поля $P_{cl}(\nu)$. Эта поляризация дается выражением

$$P_{cl}(\nu) = \frac{1}{2}(N'_a - N_a) (\Pi_0(\nu) + \Pi_1(\nu)) E + (\Pi_0(\nu) - \Pi_1(\nu)) \text{Tr}(\tilde{\rho}R_3) E + \text{Tr}(\tilde{\rho}D_{cl}), \quad (38)$$

$$D_{cl} = -g\Pi_{01}(\omega_c)X_- - gX_+\Pi_{10}(-\omega_c).$$

Первое слагаемое в выражении для $P_{cl}(\nu)$ включим в P_{nonres} . Вторым слагаемым в данной работе будем пренебрегать, полагая выполненным условие (26). Подчеркнем, что при учете этого слагаемого оно выражается через образующие полиномиальной алгебры атомно-фотонного кластера, поскольку

$$R_3 = X_0 + \frac{r - X}{2}$$

на неприводимом представлении.

Окончательно, переопределяя P_{nonres} и $P_{cl}(\nu)$, имеем следующее выражение для поляризации $P(\nu)$ системы на частоте ν в поле классической электромагнитной волны $E = \mathcal{E}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\nu t)} + \text{с.с.}$:

$$P(\nu) = P_{nonres}(\nu) + P_{cl}(\nu), \quad (39)$$

где

$$P_{nonres}(\nu) = 4\pi\chi^{(1)}E, \quad P_{cl}(\nu) = \text{Tr}(\tilde{\rho}D_{cl}).$$

Линейную восприимчивость,

$$\chi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \text{Tr} \left(\tilde{\rho} \sum_{i,k \neq 0,1} \Pi_k(\nu) |E_k\rangle \langle E_k|^{(i)} \right) E + \frac{1}{8\pi} (N'_a - N_a) (\Pi_0(\nu) + \Pi_1(\nu)),$$

будем рассматривать как параметр теории. О различии, связанном в определении поляризуемости при помощи непреобразованной матрицы плотности ρ и преобразованной матрицы $\tilde{\rho}$ плотности, см. в работе [26].

Слагаемое в правой части (37), определяемое $S^{(001)}$, характеризует флуктуации поляризации, которыми в данной работе будем пренебрегать.

6. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ АТОМНО-ФОТОННОГО КЛАСТЕРА

Для вывода кинетических уравнений атомно-фотонного кластера будем считать, что начальное состояние $|\tilde{\Phi}_0\rangle$ внешнего электромагнитного поля δ -коррелировано:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_0 | b_\omega^+ b_{\omega'} | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= n(\omega) \delta(\omega - \omega'), \\ \langle \tilde{\Phi}_0 | b_\omega b_{\omega'}^+ | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= (1 + n(\omega)) \delta(\omega - \omega'), \\ \langle \tilde{\Phi}_0 | b_\omega b_{\omega'} | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \langle \tilde{\Phi}_0 | b_\omega^+ b_{\omega'}^+ | \tilde{\Phi}_0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Это означает, что внешнее электромагнитное поле рассматривается как термостат с плотностью фотонов $n(\omega)$ на частоте ω . Обычному электромагнитному вакууму отвечает значение $n(\omega) = 0$.

Введем квантовые винеровские процессы $B(t, t_0)$ и их инкременты dB и dB^+ следующим образом:

$$B(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' b(t'),$$

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega(t-t_0)} b_\omega(t_0),$$

$$[B(t, t_0), B^+(t, t_0)] = (t - t_0),$$

$$dB \equiv B(t + dt, t_0) - B(t, t_0),$$

причем произведения инкрементов винеровских процессов подчиняются алгебре

$$\begin{aligned} dB^+(t) dB(t) &= N dt, \\ dB(t) dB^+(t) &= (1 + N) dt, \\ dt dt &= dt dB(t) = dt dB^+(t) = dB(t) dt = \\ &= dB^+(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Уравнение Гейзенберга для произвольного оператора A атомно-фотонного кластера в условиях (26) при пренебрежении операторами $P_{cl-\Gamma}$ и $W_{cl-\Gamma}$ имеет вид квантового уравнения Ланжевена, корректная форма которого дается следующим квантовым стохастическим дифференциальным уравнением [24, 27]:

$$dA = -\frac{i}{\hbar} [A, H_{cl}] dt - \frac{i}{\hbar} \sqrt{\chi} [A, X_+] dB(t) + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\chi} [A, X_-] dB^+(t) + I dt, \quad (42)$$

$$I = \frac{\chi}{2} \{ (n + 1) (X_+ [A, X_-] + [X_+, A] X_-) + n (X_- [A, X_+] + [X_-, A] X_+) \},$$

$$\chi = 2\pi g^2 \Gamma_{\omega\Gamma}^2 |\Pi_{10}(-\omega_c)|^2, \quad n = n(\omega_\Gamma).$$

При этом выполняется правило дифференцирования Ито:

$$d(A_1 A_2) = (dA_1) A_2 + A_1 dA_2 + (dA_1)(dA_2).$$

Из уравнения (42) стандартным образом [24, 27] получаем уравнение для матрицы плотности $\tilde{\rho}$ атомно-фотонного излучателя:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\tilde{\rho}, H_{cl}] - \hat{\Gamma} \tilde{\rho} \quad (43)$$

с релаксационным оператором

$$\hat{\Gamma}\tilde{\rho} = \frac{\chi}{2}(n+1)(\tilde{\rho}X_+X_- + X_+X_-\tilde{\rho} - 2X_-\tilde{\rho}X_+) + \frac{\chi}{2}n(\tilde{r}X_-X_+ + X_-X_+\tilde{\rho} - 2X_+\tilde{\rho}X_-). \quad (44)$$

Полученный релаксационный оператор имеет форму Линдблада [28] и поэтому его вид совпадает с релаксационным оператором [27], описывающим спонтанный распад атома или группы атомов при резонансном взаимодействии с термостатом. Разница лишь в коммутационных соотношениях для операторов, образующих релаксационный оператор. В случае атомно-фотонного кластера образующие принадлежат (бесконечномерной) полиномиальной алгебре третьего порядка, тогда как в случае обычного спонтанного излучения атомов или группы атомов образующие подчиняются коммутационным соотношениям $su(2)$ -алгебры.

От случая спонтанного излучения атома или группы атомов отличается также «невозмущенный» гамильтониан атомно-фотонного кластера H_{cl} . Он является нелинейным в силу присутствия слагаемого $\hbar\Pi^{(St)}(X_0^2 - (r - X)^2/4)$.

7. СПОНТАННЫЙ РАСПАД АТОМНО-ФОТОННОГО КЛАСТЕРА

Рассмотрим спонтанный распад атомно-фотонного кластера в простейшем случае, пренебрегая штарковскими сдвигами уровней $\Pi^{St} = 0$ при отсутствии фотонов в термостате, $n = 0$. Основными уравнениями здесь служат уравнения для матрицы плотности (43) с $n = 0$, которые для диагональных матричных элементов образуют замкнутую систему.

Пусть атомно-фотонный кластер состоит из $N_a = 2r$ возбужденных двухуровневых атомов и N фотонов микрорезонаторной моды. Оператор Казимира $X = N - R_3 + r$ имеет значение $X = N$. Полагая $N < 2r$, воспользуемся представлением (34) полиномиальной алгебры для ближней зоны с $r = N/2$ и базисными векторами $|m\rangle$: $R_3|m\rangle = m|m\rangle$, $-r \leq m \leq r$. Тогда матричные элементы оператора релаксации представляются в виде

$$(\hat{\Gamma}\tilde{\rho})_{m,m} = g_{m,m-1}\tilde{\rho}_{m,m} - g_{m+1,m}\tilde{\rho}_{m+1,m+1}, \quad (45)$$

$$g_{m,m-1} = \chi|\langle m-1|X_-|m\rangle|^2 = \chi\left(2r - \frac{N}{2} + m\right) \times \left(\frac{N}{2} + m\right)\left(\frac{N}{2} - m + 1\right). \quad (46)$$

В случае $N = 1$ распад однократно возбужденного атомно-фотонного кластера носит экспоненциальный характер — возбужденное состояние $\tilde{\rho}_{1/2,1/2}$ (в начальный момент $\tilde{\rho}_{1/2,1/2} = 1$, остальные матричные элементы равны нулю) затухает со временем как

$$\tilde{\rho}_{1/2,1/2} = \exp(-N_a\chi t).$$

При $N > 1$ атомно-фотонный кластер распадается не экспоненциальным образом. Средняя интенсивность $\bar{I}(t)$ излучения пропорциональна убыли энергии кластера:

$$\bar{I}(t) = -\alpha \frac{d}{dt} \text{Tr}(H_{cl}\tilde{\rho}),$$

где введен геометрический фактор α . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{I}(t) &= \alpha \sum_{n=-N/2}^{N/2} \hbar(\omega'_0 + \omega'_c)g_{n,n-1}\tilde{\rho}_{n,n} \equiv \\ &\equiv -\alpha' \sum_{n=-N/2}^{N/2} g_{n,n-1}\tilde{\rho}_{n,n}. \end{aligned} \quad (47)$$

В случае $N \ll 2r$ выражение для $g_{n,n-1}$ можно заменить следующим:

$$g_{n,n-1} \approx 2r\chi \left(\frac{N}{2} + n\right) \left(\frac{N}{2} - n + 1\right) \equiv 2r\chi\gamma_{n,n-1},$$

и тогда формула (47) совпадает с выражением для средней интенсивности сверхизлучения ансамбля из N двухуровневых атомов [29]. Если далее воспользоваться приближением большого числа возбужденных $N \gg 1$ и средним временем $t(n)$ излучения n фотонов, полагая, что величина (47) приближенно пропорциональна dn/dt [29], то

$$\bar{I}(t) \approx \frac{1}{4}\bar{\gamma}N^2\text{sech}^2\left[\frac{1}{2}\bar{\gamma}N(t - t_D)\right], \quad (48)$$

$$\bar{\gamma} = 2r\chi\alpha\hbar(\omega'_0 + \omega'_c), \quad t_D = (\bar{\gamma}N)^{-1} \ln \bar{\gamma}N.$$

Отличительной чертой рассматриваемого случая большого числа микрорезонаторных фотонов и еще большего числа атомов является наличие времени задержки t_D в спонтанном излучении и симметричный профиль интенсивности излучения атомно-фотонного кластера. При меньшем отличии числа фотонов и числа возбужденных атомов, т. е. с ростом первоначального числа микрорезонаторных фотонов в условиях ближней зоны $N < 2r$, время задержки уменьшается (см. рис. 2). Заметим, что более аккуратным подходом к рассмотренному приближению является разложение образующих полиномиальной алгебры по параметру

$$\beta_z = \frac{2}{4r - N + 1} \ll 1,$$

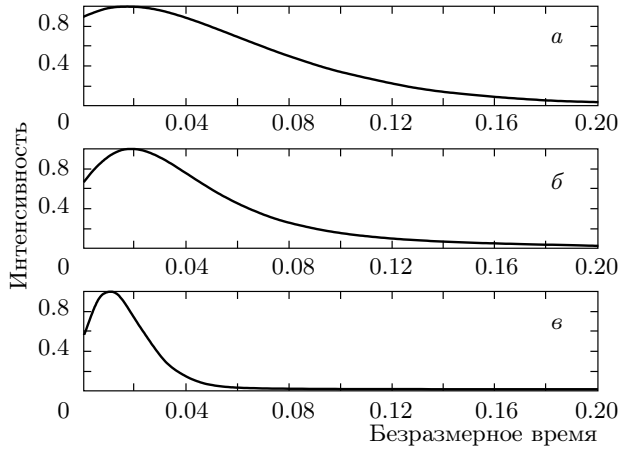


Рис. 2. Нормированные профили интенсивности спонтанного излучения атомно-фотонного кластера в зависимости от безразмерного времени. Единице интенсивности отвечают величины $44.7\alpha'\chi$ (а), $138.5\alpha'\chi$ (б), $385\alpha'\chi$ (в). Единице времени отвечает χ^{-1} . Число возбужденных атомов $2r = 10$, а первоначальное число микрорезонаторных фотонов $N = 2$ (а), 9 (б), 20 (в)

при этом в выписанных выше формулах величина $2r$ заменяется на $(\Omega_z/2)^2$,

$$\Omega_z = 2\sqrt{\frac{4r - N + 1}{2}}.$$

Пусть теперь в атомно-фотонном кластере из $N_a = 2r$ возбужденных двухуровневых атомов и N фотонов микрорезонаторной моды число фотонов превосходит число атомов $N > 2r$ (дальние зоны). Оператор Казимира по-прежнему имеет значение $X = N$. Теперь воспользуемся представлением (31) полиномиальной алгебры с $r = r$ и базисными векторами $|m\rangle$: $R_3|m\rangle = m|m\rangle$, $-r \leq m \leq r$. Тогда матричные элементы оператора релаксации представляются в виде (45) с коэффициентами

$$g_{m,m-1} = \chi|\langle m-1|X_-|m\rangle|^2 = \chi(r+m)(r-m+1)(N-r+m). \quad (49)$$

Нетрудно заметить, что формула (49) переходит в (46) при заменах $N \rightarrow 2r$ и $r \rightarrow N/2$. Таким образом, с указанными начальными условиями спонтанное излучение атомно-фотонного кластера одинаково в случаях перевозбужденной и недостаточно возбужденной фотонной подсистемы, оно определяется степенью возбуждения атомно-фотонного кластера и различием между числом фотонов и возбужденных атомов в микрорезонаторе. Так, распад одно-

кратно возбужденного атомно-фотонного кластера определяется формулой

$$\tilde{\rho}_{1/2,1/2} = \exp(-N\chi t),$$

а средняя интенсивность излучения в случае $N \gg \gg 2r \gg 1$ — формулами (48), которые теперь приобретают вид

$$\bar{I}(t) \approx \bar{\gamma}r^2 \operatorname{sech}^2[\bar{\gamma}r(t - t_D)], \quad \bar{\gamma} = N\chi\alpha\hbar(\omega'_0 + \omega'_c),$$

$$t_D = (2\bar{\gamma}r)^{-1} \ln(2\bar{\gamma}r).$$

При этом следует особо отметить, что в случае одинакового числа возбужденных атомов дальние зоны отличаются от ближних еще большим уменьшением времени задержки и увеличением интенсивности спонтанного излучения (ср. параметры $\bar{\gamma}$ написанной выше формулы и выражения (48)). Это наглядно демонстрирует рис. 2.

8. КОГЕРЕНТНЫЕ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ОПТИЧЕСКАЯ НУТАЦИЯ

Пусть на атомно-фотонный кластер, характеризуемый операторами Казимира X и r с числом атомов N_a , подается импульс резонансной классической электромагнитной волны, т. е. несущая частота ν электромагнитной волны напряженности электрического поля $E = \mathcal{E}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\nu t)} + \text{с.с.}$ удовлетворяет условию комбинационного резонанса (5) (\mathbf{r} — радиус-вектор точки, не путать с параметром r). Амплитуду напряженности электромагнитной волны считаем прямоугольной формы:

$$\mathcal{E} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ a, & t \geq 0, \end{cases} \quad (50)$$

а ее значение достаточным, чтобы пренебречь спонтанным распадом атомно-фотонного кластера. Поэтому динамика атомно-фотонного кластера в поле классической электромагнитной волны описывается уравнением для матрицы плотности с $\dot{\hat{\Gamma}} = 0$:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\tilde{\rho}, H_{cl} + H_{cl}^{St} + V_{cl-coh}]. \quad (51)$$

При этом, если начальное состояние является чистым, проще решать уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}\rangle = (H_{cl} + H_{cl}^{St} + V_{cl-coh}) |\tilde{\Psi}\rangle.$$

Для простоты и определенности будем рассматривать случай дальних зон, когда $X > 2r$ и в начальный момент времени $t = 0$ состояние атомно-фотонного кластера описывается собственным вектором

$| - r \rangle$ оператора R_3 , реализующим совместно с операторами R_{\pm} при $r = r$ представление полиномиальной алгебры. Тогда для амплитуд вероятности C_m , $|\tilde{\Psi}\rangle = \sum_{m=-r}^r C_m |m\rangle$, имеем уравнения

$$i\hbar \frac{dC_m}{dt} = \langle m | (H_{cl} + H_{cl}^{St} + V_{cl-coh}) \sum_{m'=-r}^r C_{m'} |m'\rangle,$$

в которых удобно перейти к медленно меняющимся переменным

$$C_m = \bar{C}_m \exp(-i\nu t m - i\omega'_c(X-r)t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} m).$$

Тогда получим

$$\frac{d\bar{C}_m}{dt} = i\Delta m \bar{C}_m - i\Pi^{(St)}((X-r)m + m^2) \bar{C}_m - i\bar{C}_{m-1} \Lambda \langle m | X_+ | m-1 \rangle - i\bar{C}_{m+1} \Lambda^* \langle m | X_- | m+1 \rangle, \quad (52)$$

где использованы обозначения для отстройки от резонанса $\Delta = \nu - (\omega'_0 + \omega'_c)$ и частоты Раби $\Lambda = g a \Pi_{10}(-\omega_c) \hbar^{-1}$.

Выражение поляризации атомно-фотонного кластера имеет вид

$$P = - \sum_{m=-r}^r C_m^* C_{m+1} g \Pi_{01}(\omega_c) \langle m | X_- | m+1 \rangle - \sum_{m=-r}^r C_m^* C_{m-1} g \Pi_{10}(-\omega_c) \langle m | X_+ | m-1 \rangle$$

или в медленных амплитудах

$$P = - \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\nu t) \sum_{m=-r}^r \bar{C}_m^* \bar{C}_{m+1} g \Pi_{01}(\omega_c) \times \langle m | X_- | m+1 \rangle + c.c. \equiv \mathcal{P} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\nu t) + c.c. \quad (53)$$

Медленно меняющаяся амплитуда ε электрического поля сигнала отклика в некоторой точке \mathbf{r} дается выражением

$$\varepsilon = 2\pi i k \alpha_n \mathcal{P},$$

причем интенсивность суммарного сигнала, усредненная по периоду быстрых колебаний, определяется [24] как

$$I = \frac{ca^2}{2\pi} \left(1 + 2 \frac{\varepsilon'}{a} \right). \quad (54)$$

Здесь штрих у амплитуды отклика обозначает действительную часть комплексного выражения, а параметр α_n определяется геометрией.

Простейшим случаем является случай одного атома в микрорезонаторе. Тогда $r = r = 1/2$ и основными уравнениями, определяющими отклик атомно-фотонного кластера на воздействие внешнего когерентного поля прямоугольной формы, являются

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}_{-1/2}}{dt} &= -i\delta \bar{C}_{-1/2} - i\bar{C}_{1/2} \Lambda^* \sqrt{X}, \\ \frac{d\bar{C}_{1/2}}{dt} &= i\delta \bar{C}_{1/2} - i\bar{C}_{-1/2} \Lambda \sqrt{X}, \end{aligned} \quad (55)$$

где $X = N + 1$ и введены обозначения

$$\delta = \frac{\Delta - \Pi^{(St)}(X-r)}{2}, \quad \bar{C}_m = \bar{C}_m \exp\left(-\frac{i\Pi^{(St)}t}{4}\right).$$

Амплитуда поляризации дается выражением

$$P = - \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\nu t) \bar{C}_{-1/2}^* \bar{C}_{1/2} g \Pi_{01}(\omega_c) \sqrt{X} + c.c. \equiv \mathcal{P} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\nu t) + c.c.$$

Уравнения (55) совпадают с уравнениями Блоха, описывающими резонансное взаимодействие электромагнитной волны

$$E = \mathcal{E} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \nu t)} + c.c.$$

с оптически разрешенным атомным переходом изолированного атома [24]. Отличие здесь кроется лишь в величине эффективного дипольного момента резонансного перехода. В случае атомно-фотонного кластера эффективный дипольный момент зависит от степени начального возбуждения фотонной подсистемы атомно-фотонного кластера и пропорционален величине $\sqrt{N+1}$, где N — число фотонов микрорезонаторной моды. Интенсивность волны (54) после взаимодействия с атомно-фотонным кластером, состоящим из одного атома и N фотонов, испытывает нутационные колебания, определяемые величиной

$$\begin{aligned} \text{Re} \varepsilon &= -\pi k \alpha_g \frac{a(N+1)}{\hbar \sqrt{\delta^2 + |\Lambda|^2(N+1)}} |g \Pi_{10}(-\omega_c)|^2 \times \\ &\times \sin\left(2t \sqrt{\delta^2 + |\Lambda|^2(N+1)}\right). \end{aligned} \quad (56)$$

Нутационные колебания в отсутствие релаксации являются гармоническими колебаниями и по виду совпадают с нутационными колебаниями в случае обычного резонансного взаимодействия с двухуровневыми атомами [24]. По периоду нутационных колебаний можно судить об основном параметре атомно-фотонного кластера — величине $g \Pi_{10}(-\omega_c)$, а также о степени возбуждения фотонной подсистемы,

характеризуемой параметром N . Подчеркнем, что формула (56) охватывает случаи как дальней зоны, $N \geq 1$, так и граничной зоны, $N = 0$.

Важным свойством нутационных колебаний атомно-фотонного кластера с одним атомом является независимость синусоидальной формы колебаний от отстройки от резонанса и параметра штарковского взаимодействия. Период колебаний $\pi/\sqrt{\delta^2|\Lambda|^2(N+1)}$ определяется перенормированной отстройкой δ и частотой Раби, он не зависит от параметра штарковского взаимодействия $\Pi^{(St)}$.

При наличии нескольких атомов в микрорезонаторе, как и в предыдущей ситуации с одним атомом, по-прежнему могут быть реализованы лишь случаи дальней и граничной зон, поскольку оператор Казимира $X = N + 2r \geq 2r$, если первоначально при $t = 0$ все атомы находятся на нижнем энергетическом уровне.

Основным отличием случая многоатомного атомно-фотонного кластера от рассмотренного выше случая является наличие модуляции оптической нутации. Модуляция различна для кластеров с разными значениями r и X операторов Казимира. К тому же она дополнительно зависит как от перенормированной отстройки δ , так и от параметра штарковского взаимодействия $\Pi^{(St)}$.

На рис. 3–5 представлены графики колебаний вещественной части амплитуды $\text{Re}\varepsilon$, определяющие интенсивность волны по формуле (54), для атомно-фотонного кластера из трех атомов. Рисунок 3 показывает изменение нутационных колебаний в зависимости от первоначального числа фотонов в микрорезонаторе. Видно, что с ростом первоначального числа фотонов N период модуляции увеличивается. Это вполне согласуется с представлением образующих полиномиальной алгебры (32), (33). С ростом N параметр β_z уменьшается как $\beta_z = (N+r+1/2)^{-1}$, так что при $\beta_z \ll 1$ приближенно имеем формулы (36) и нутация для не очень больших времен начинает походить на обычную нутацию от изолированных атомов с перенормированным эффективным дипольным моментом.

На рис. 4, 5 отражено влияние перенормированной отстройки от резонанса δ и параметра штарковского взаимодействия $\Pi^{(St)}$ на нутацию. Видно, что модуляция нутации усложняется — помимо увеличения периода модуляции появляется ее дополнительная структура. Максимальное значение амплитуды с ростом отстройки от резонанса δ и/или параметра штарковского взаимодействия $\Pi^{(St)}$ уменьшается.

Сравнивая рис. 3а, 4а, 5а, можно составить пред-

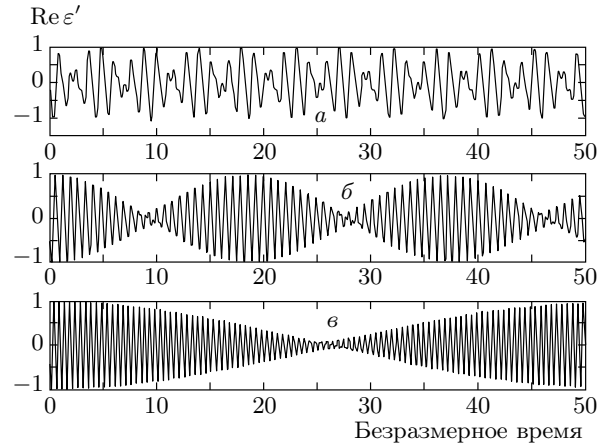


Рис. 3. Динамика модуляции нутационных колебаний в зависимости от первоначального числа микрорезонаторных фотонов в отсутствие отстройки от резонанса $\delta = 0$ и штарковского взаимодействия $\Pi^{(St)} = 0$. Первоначальное число фотонов $N = 0$ (а), 3 (б), 8 (в) при трех атомах в микрорезонаторе ($2r = 3$). Единицам оси ординат соответствует величина $2\pi k\alpha_n g |\Pi_{01}(\omega_c)| \xi$ при $\xi = 1.82$ (а), 3.30 (б), 4.73 (в). Единице оси абсцисс отвечает величина $2\hbar/ga |\Pi_{01}(\omega_c)|$ — удвоенная обратная частота Раби

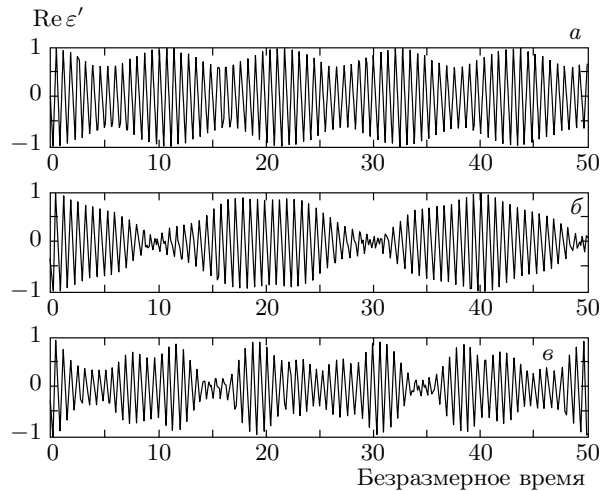


Рис. 4. Динамика модуляции нутационных колебаний в зависимости от отстройки от резонанса в отсутствие штарковского взаимодействия $\Pi^{(St)} = 0$. Отстройки $\delta = 0$ (а), $|\Lambda|/2$ (б), $2|\Lambda|$ (в) при четырех атомах в микрорезонаторе ($2r = 4$) и первоначальном числе фотонов $N = 3$. Единицам оси ординат соответствует величина $2\pi k\alpha_n g |\Pi_{01}(\omega_c)| \xi$ при $\xi = 4.60$ (а), 4.57 (б), 4.16 (в). Единице оси абсцисс отвечает величина $2\hbar/ga |\Pi_{01}(\omega_c)|$ — удвоенная обратная частота Раби

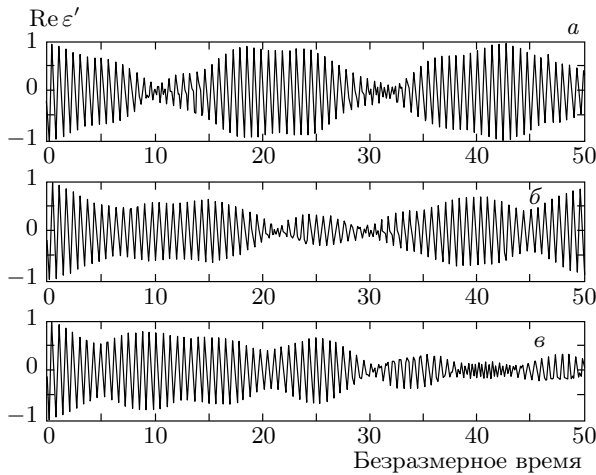


Рис. 5. Динамика модуляции нутационных колебаний в зависимости от штарковского взаимодействия $\Pi^{(St)}$ в отсутствие отстройки от резонанса $\delta = 0$. Штарковское взаимодействие $\Pi^{(St)} = 0$ (а), $|\Lambda|/10$ (б), $|\Lambda|/5$ (в) при пяти атомах в микрорезонаторе ($2r = 5$) и первоначальном числе фотонов $N = 3$. Единицам оси ординат соответствует величина $2\lambda k \alpha_n g |\Pi_{01}(\omega_c)| \xi$ при $\xi = 6.00$ (а), 5.95 (б), 5.81 (в). Единице оси абсцисс отвечает величина $2\hbar/ga |\Pi_{01}(\omega_c)|$ — удвоенная обратная частота Раби

ставление о роли числа атомов в динамике оптической нутации.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные уравнения, описывающие рассмотренные в статье спонтанный распад атомно-фотонного кластера и оптическую нутацию, по виду совпадают с аналогичными уравнениями, определяющими спонтанное излучение и нутационный эффект на обычных двухуровневых атомах. И это несмотря на различие в типе оптического резонанса и участвующих частицах и полях. Определяющая разница состоит лишь в том, что образующие алгебры угловых моментов теории оптического резонанса для двухуровневых атомов заменены на образующие полиномиальной алгебры третьего порядка. Это отчетливо видно на примере оператора релаксации в форме Линдблада [27, 28], в котором после замен

$$R_3 \rightarrow X_0, \quad R_{\pm} \rightarrow X_{\pm} \quad (57)$$

получаем уравнения (44). Также, если взять уравнения для матрицы плотности двухуровневого атома в поле резонансной когерентной волны, определяющие уравнения Блоха [24], и выполнить замены (57),

то получим уравнения (51) при $H_{cl}^{St} = 0$. Та же замена в операторе дипольного момента атома приводит к выражению (38) для оператора эффективного дипольного момента атомно-фотонного кластера.

Однако вследствие специфики коммутационных соотношений полиномиальной алгебры в теории взаимодействия атомно-фотонного кластера с резонансными электромагнитными полями появляется дополнительный параметр, связанный с оператором Казимира X . В результате динамика атомно-фотонного кластера во внешних электромагнитных полях характеризуется большим разнообразием. В данной статье рассмотрены лишь самые простые оптические эффекты на атомно-фотонном кластере, но и они дают представления о характерных отличиях атомно-фотонного кластера от обычных двухуровневых атомов. По-видимому, различия должны быть и в других задачах нелинейной и квантовой оптики, в том числе при рассмотрении оптических эффектов и эффектов перепутывания квантовых состояний на нескольких атомно-фотонных кластерах. Развитый в статье математический аппарат не только обосновывает введение атомно-фотонного кластера как элементарного излучателя, но и дает адекватную основу для анализа самых различных эффектов с участием атомно-фотонных кластеров.

Статья посвящается памяти Валерия Павловича Карасева, замечательного человека и выдающегося ученого, в годовщину его трагической гибели.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Карасев, ТМФ **95**, 3 (1993).
2. V. P. Karassiov, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 153 (1994).
3. V. P. Karassiov, Phys. Lett. A **238**, 19 (1998).
4. В. П. Карасев, Лазерные исследования в России **20**(3), 1 (1999).
5. V. P. Karassiov, A. A. Gusev, and S. I. Vinitsky, Phys. Lett. A **295**, 247 (2002).
6. E. G. Kalnins and V. P. Karassiov, J. Rus. Las. Res. **24**, 402 (2003).
7. V. P. Karassiov, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 4345 (1993).
8. В. П. Карасев, А. В. Масалов, Опт. и спектр. **74**, 928 (1993).
9. В. П. Карасев, Опт. и спектр. **103**, 143 (2007).

10. В. П. Карасев, С. П. Кулик, ЖЭТФ **131**, 37 (2007).
11. В. П. Карасев, Письма в ЖЭТФ **84**, 759 (2006).
12. I. P. Vadeiko, G. P. Miroshnichenko, A. V. Rybin, and J. Timonen, Phys. Rev. A **67**, 053808 (2003).
13. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
14. M. Tavis and F. W. Cummings, Phys. Rev. **170**, 379 (1968).
15. T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, 1098 (1940).
16. F. Persico and G. Vetri, Phys. Rev. A **12**, 2083 (1975).
17. C. C. Gerry and P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005).
18. J. Rarity and C. Weisbuch, *Microcavities and Photonic Bandgaps*, Kluwer, Dordrecht (1996).
19. Y. Yamamoto and A. Imamoglu, *Mesoscopic Quantum Optics*, Wiley, New York (1999).
20. H. Benisty, J.-M. Gérard, R. Houdré, J. Rarity, and C. Weisbuch, *Confined Photon Systems*, Springer-Verlag, Berlin (1999).
21. Р. А. Измаилов, А. Я. Казаков, ЖЭТФ **120**, 1172 (2001).
22. А. Я. Казаков, ЖЭТФ **124**, 1264 (2003).
23. В. Н. Горбачев, А. И. Трубило, ЖЭТФ **135**, 227 (2009).
24. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999); А. М. Башаров, ЖЭТФ **102**, 1126 (1992).
25. А. М. Башаров, XII Междунар. молодежная научная школа «Когерентная оптика и оптическая спектроскопия», Сб. статей, КГУ, Казань (2008), вып. 12, с. 34.
26. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **88**, 428 (2000).
27. C. W. Gardiner, *Quantum Noise*, Springer, Berlin (1991); C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer, Berlin (2004).
28. G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
29. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Super-Radiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP, Bristol and Philadelphia (1996).