ЖЭТФ, 2010, том 137, вып. 6, стр. 1120–1125

РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ ЭЛЕКТРОНОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ПОРОГА ПРОЦЕССА

О. П. Новак [a*], *Р. И. Холодов* [a**], *П. И. Фомин* [a,b***]

[a] *Институт прикладной физики Национальной академии наук Украины 40030, Сумы, Украина*

[b] *Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Национальной академии наук Украины 03680, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 22 декабря 2009 г.

Рассмотрен процесс рождения электрон-позитронной пары электроном в сильном магнитном поле вблизи порога процесса. Показано, что процесс более вероятен, если спин начального электрона ориентирован вдоль поля, при этом вероятность процесса составляет 10^{13} с$^{-1}$ в случае, когда напряженность магнитного поля равна $H = 4 \cdot 10^{12}$ Гс.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование квантово-электродинамических процессов сохраняет свою актуальность в связи с наличием нейтронных звезд с магнитными полями, которые сравнимы или превышают критическое швингеровское поле $H_c \approx 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс [1].

Рождение электрон-позитронных пар является важным элементом в моделях пульсаров, поскольку наличие электрон-позитронной плазмы считается необходимым условием возникновения когерентного радиоизлучения. Большое число теоретических работ посвящено объяснению отсутствия радиопульсаров с большими периодами, что может быть связано с прекращением образования пар. Например, в работе [2] рассмотрены механизмы генерации плазмы посредством одно- и двухфотонного фоторождения. Процесс рождения пары электроном может составить конкуренцию указанным процессам в сильных полях.

В лабораторных условиях магнитные поля достаточной напряженности пока недостижимы. Рекордное постоянное магнитное поле составляет 10^6 Гс [3], импульсное — $3 \cdot 10^7$ Гс [4]. Однако процесс рождения пары электроном экспериментально наблюдался в сильном лазерном поле в СЛАК (США) [5]. Как отмечают авторы [5], последовательная квантово-электродинамическая (КЭД) теория данного процесса не построена.

Отметим также, что КЭД-процессы имеют место при столкновениях тяжелых ионов. Если прицельный параметр имеет порядок 10^{-11} см, то магнитные поля в области между ионами могут достигать величины 10^{12} Гс. Мы предполагаем, что подобные процессы наблюдались в Дармштадте, GSI (Германия) [6]. В настоящее время в GSI строится новый проект FAIR, одной из задач которого является проверка квантово-электродинамической теории в сильных электромагнитных полях. В принципе, в рамках FAIR возможна постановка экспериментов по наблюдению КЭД-процессов в магнитном поле, создаваемом тяжелыми ионами.

Процесс рождения электрон-позитронной пары электроном в магнитном поле впервые упоминается в работах [7, 8]. Тем не менее, последовательное квантово-электродинамическое вычисление вероятности не проводилось. Кросс-каналом данного процесса является рассеяние электрона на электроне [9].

Целью данной работы является вычисление в рамках картины Фарри вероятности рождения пары электроном вблизи порога процесса. При этом напряженность магнитного поля близка к критической H_c, но не превышает ее значения, так что

*E-mail: novak-o-p@ukr.net
**E-mail: rkholodov@yahoo.com
***E-mail: pfomin@bitp.kiev.ua

$$h = H/H_c \ll 1. \tag{1}$$

Мы ограничимся рассмотрением только тех случаев, когда конечные частицы оказываются на основных уровнях Ландау.

2. КИНЕМАТИКА

Диаграммы Фейнмана процесса рождения электрон-позитронной пары электроном представлены на рис. 1. Прямые линии на рисунке представляют решения уравнения Дирака в присутствии классического однородного магнитного поля. При этом напряженность поля по порядку величины меньше критической $H_c \approx 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс.

Выберем систему координат, в которой магнитное поле $\mathbf{H}$ направлено вдоль оси z. Тогда собственные значения энергии электрона в магнитном поле равны

$$E_l = \sqrt{p_z^2 + m^2 + m^2 2lh}. \tag{2}$$

Здесь l — номер уровня Ландау, p_z — z-компонента импульса электрона.

Магнитное поле не изменится при переходе в систему отсчета, которая движется вдоль оси z, поэтому без потери общности продольную компоненту импульса начального электрона можно положить равной нулю: $p_z = 0$. Следовательно,

$$E = \tilde{m} = m\sqrt{1 + 2lh} \tag{3}$$

для начального электрона.

Кинематика процесса определяется следующими законами сохранения:

$$\begin{aligned} &E_1 + E_2 + E_+ = E, \\ &p_{1z} + p_{2z} + p_{+z} = p_z = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где E и p_z — энергия и продольный импульс начального электрона, E_1, E_2, E_+ — энергии конечных электронов и позитрона, p_{1z}, p_{2z}, p_{+z} — их продольные импульсы.

Прежде всего отметим, что процесс невозможен, если энергии начального электрона недостаточно для рождения пары. Нетрудно убедиться, что условие порога имеет вид

$$\begin{aligned} &p_{1z} = p_{2z} = p_{+z} = 0, \\ &\tilde{m} = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \tilde{m}_+. \end{aligned} \tag{5}$$

В общем случае данное условие не может быть выполнено, поскольку эффективные массы являются дискретными величинами. Таким образом, имеют место ненулевые пороговые значения продольных импульсов конечных частиц. Разлагая выражение (4) в ряд по импульсам, получим следующее соотношение:

$$\frac{p_{1z}^2}{b_1^2} + \frac{p_{2z}^2}{b_2^2} + \frac{p_{+z}^2}{b_+^2} = 1, \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} b_f^2 = 2\tilde{m}_f \Delta, \\ \Delta = \tilde{m} - \tilde{m}_1 - \tilde{m}_2 - \tilde{m}_+, \end{gathered}$$

а индекс f нумерует конечные частицы ($f = 1, 2, +$).

Легко убедиться, что на пороге процесса, когда

$$l_f = 0, \tag{7}$$

выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} &\tilde{m}_f = m, \\ &\Delta \le mh, \\ &p_{fz} \lesssim m\sqrt{h}. \end{aligned} \tag{8}$$

В системе координат, где по осям отложены импульсы p_{1z}, p_{2z}, p_{+z}, закон сохранения энергии (6) задает эллипсоид. Возможные значения импульсов соответствуют точкам эллипса, образованного пересечением эллипсоида (6) и плоскости, которая задается законом сохранения импульса (рис. 2):

$$p_{1z} + p_{2z} + p_{+z} = 0. \tag{9}$$

3. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОЦЕССА

Согласно общим правилам квантовой электродинамики амплитуда вероятности процесса имеет вид

$$S_{fi} = i\alpha \iint d^4x\, d^4x' \left[(\bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \Psi) D_{\mu\nu} (\bar{\Psi}'_1 \gamma^\nu \Psi'_+) - \right. \\ \left. - (\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \Psi) D_{\mu\nu} (\bar{\Psi}'_2 \gamma^\nu \Psi'_+) \right]. \tag{10}$$

Здесь штрих у волновой функции означает, что она зависит от компонент штрихованного 4-радиус-вектора x'. Подставим в амплитуду волновые функции [10] и фотонный пропагатор [11]:

$$D_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-x')} \frac{4\pi}{k^j k_j}. \tag{11}$$

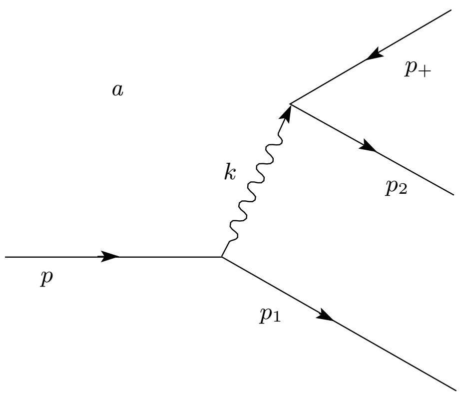


Рис. 1. Прямая (a) и обменная ($б$) диаграммы Фейнмана процесса рождения электрон-позитронной пары электроном в магнитном поле

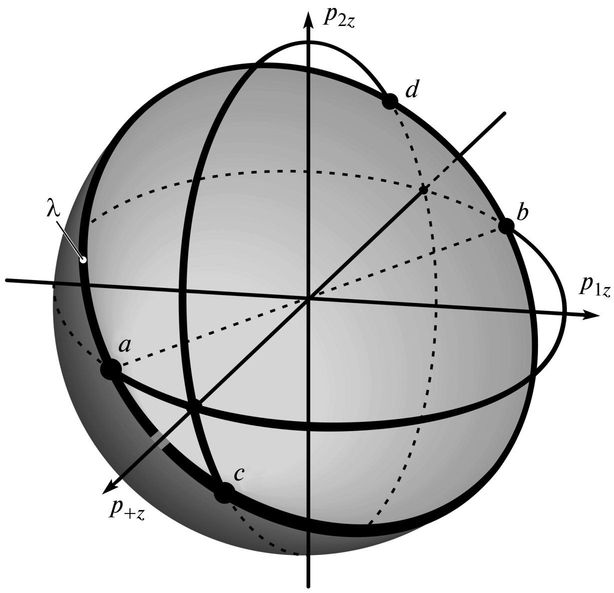


Рис. 2. Пороговые импульсы частиц — точки эллипса λ. Точки a и b представляют собой точки пересечения эллипса λ с плоскостью (p_{+z}, p_{1z}), c и d — с плоскостью (p_{2z}, p_{+z})

Зависимости волновых функций от времени и координат y, z, y', z' имеют такой же вид, как для плоских волн, поэтому интегрирование по этим величинам дает δ-функции, выражающие законы сохранения энергии и импульса. Интегралы по координатам x и x' могут быть выражены через специальные функции, изученные в работах [7, 8]. Подставляя их явный вид при $l_f = 0$, получим следующее выражение для амплитуды вероятности процесса:

$$S_{fi} = S_1 - S_2. \tag{12}$$

Здесь

$$S_1 = \frac{i\alpha\, 2\pi^3}{S^2\sqrt{\tilde{m}EE_1E_2E_+}}\,\frac{B_1^{\pm}\sqrt{\tilde{m}-\mu m}}{m\sqrt{l!h}}e^{-a^2}X_1 \times \\ \times\,\delta(E-E_1-E_2-E_+)\delta(p_y-p_{1y}-p_{2y}-p_{+y}) \times \\ \times\,\delta(p_z-p_{1z}-p_{2z}-p_{+z}),$$

S_2 — обменное слагаемое,

$$X_1 = \int \frac{(a+i\xi)^l}{\rho^2-\xi^2}e^{-\xi^2-2ib\xi}d\xi, \tag{13}$$

$$a = \frac{p_y - p_{1y}}{m\sqrt{2h}}, \quad b = \frac{p_y - p_{2y}}{m\sqrt{2h}}, \quad \xi = \frac{k_x}{m\sqrt{2h}}, \quad \rho^2 = \Omega^2 - a^2, \quad \Omega^2 = h/2, \tag{14}$$

$$B_1^+ = 4m\sqrt{m\tilde{m}}, \quad B_1^- = 4p_{1z}\sqrt{m\tilde{m}}. \tag{15}$$

Вероятность процесса получим, умножив квадрат модуля амплитуды на число конечных состояний:

$$dW = |S_{fi}|^2\frac{Sd^2p_1}{(2\pi)^2}\,\frac{Sd^2p_2}{(2\pi)^2}\,\frac{Sd^2p_+}{(2\pi)^2}, \tag{16}$$

где $d^2p_f = dp_{fy}\,dp_{fz}$. Возводя модуль (12) в квадрат, получим дифференциальную вероятность процесса в единицу времени:

$$dW = M\left|e^{-a^2}X_1B_1^{\pm} - e^{-b^2}X_2B_2^{\pm}\right|^2 \times \\ \times\,\delta(E-E_1-E_2-E_+)\delta(p_y-p_{1y}-p_{2y}-p_{+y}) \times \\ \times\,\delta(p_z-p_{1z}-p_{2z}-p_{+z})d^2p_1d^2p_2d^2p_+, \tag{17}$$

где

$$M = \frac{\alpha^2(\tilde{m} - \mu m)}{2^7 \pi^3 m^2 \tilde{m} E E_1 E_2 E_+ h l!}. \qquad (18)$$

Интегрирование по d^2p_+ легко провести при помощи δ-функций $\delta(p_y - p_{1y} - p_{2y} - p_{+y})\delta(p_z - p_{1z} - p_{2z} - p_{+z})$. После этого вероятность принимает следующий вид:

$$dW = 2m^2 h M \left[\left((B_1^\pm)^2 + (B_2^\pm)^2\right) Y - 2B_1^\pm B_2^\pm Y'\right] \times \times \delta(E - E_1 - E_2 - E_+)\, dp_{1z} dp_{2z}, \qquad (19)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} Y &= \iint da\, db \left| e^{-a^2} X_1 \right|^2, \\ Y' &= \iint da\, db\, e^{-a^2-b^2} \operatorname{Re}(X_1 X_2^*). \end{aligned} \qquad (20)$$

Величина Y' определяет интерференционное слагаемое в вероятности процесса.

В выражении (19) δ-функцию от энергий частиц преобразуем к δ-функции от компонент импульса:

$$\delta(E - E_1 - E_2 - E_+) = \frac{m \sum\limits_{j=\pm} \delta(p_{1z} - g_j)}{\sqrt{4m\Delta - 3p_{2z}^2}}, \qquad (21)$$

где

$$g_\pm = \frac{1}{2}\left(-p_{2z} \pm \sqrt{4m\Delta - 3p_{2z}^2}\right).$$

В силу выбранных условий (1), (7) и (8) зависимостью вероятности от z-компонент импульсов можно пренебречь везде, кроме множителей B_1^-, B_2^- и δ-функции (21), поэтому интегрирование вероятности (19) легко провести в конечном виде. В результате получим следующие выражения:

$$W^+ = \frac{\alpha^2 \cdot 2m}{3\pi^2\sqrt{3} l!}(Y - Y'), \qquad (22)$$

$$W^- = \frac{\alpha^2 \cdot 4\Delta}{9\pi^2\sqrt{3} l!}(2Y + Y'). \qquad (23)$$

Вычислим величины Y, Y'. Прежде всего отметим, что из физических соображений в общем случае можно считать, что $a \sim \xi$, поэтому в разложении бинома в формуле (13) основной вклад дает среднее слагаемое с $\xi^{l/2}$. Кроме того, численный анализ данного выражения показывает, что интегралом в смысле главного значения можно пренебречь по сравнению с вычетом в полюсе. Используя эти предположения, можно легко вычислить интеграл X_1, а затем получить следующий результат для Y и Y':

$$\begin{aligned} Y &= 4\sqrt{2}\pi^2 \Omega^{2l} e^{-2\Omega^2} \frac{l!}{l\Gamma(l/2+1)^2}, \\ Y' &\ll Y, \end{aligned} \qquad (24)$$

где Γ — гамма-функция.

Подставляя Y в формулы (22), (23) и пренебрегая интерференционным слагаемым, получим окончательные выражения для полной вероятности процесса (в единицу времени, c^{-1}):

$$W^+ = \alpha^2 \frac{mc^2}{\hbar} \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{\Omega^{2l} e^{-2\Omega^2}}{l\Gamma(l/2+1)^2}, \qquad (25)$$

$$W^- = \alpha^2 \frac{mc^2}{\hbar} \frac{\Delta}{m} \frac{32\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \frac{\Omega^{2l} e^{-2\Omega^2}}{l\Gamma(l/2+1)^2}. \qquad (26)$$

4. АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТИ

Проанализируем полученный результат. Прежде всего отметим, что полная вероятность не содержит особенностей, когда продольные импульсы частиц равны нулю, характерных для процесса фоторождения $\gamma \to ee^+$ [12–14].

Из формул (25), (26) легко получить отношение вероятностей:

$$\frac{W^-}{W^+} = \frac{4}{3}\frac{\Delta}{m}, \qquad (27)$$

где $\Delta = E - 3m$. Как было указано ранее, вблизи порога процесса $\Delta \lesssim mh$, поэтому $W^- \ll W^+$. В частном случае, когда магнитное поле равно $h = 4/l$, выполняется равенство $\Delta = 0$ и поэтому $W^- = 0$ (в пределах точности приближения).

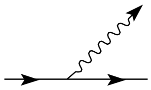
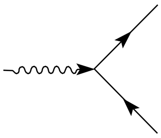
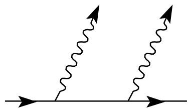
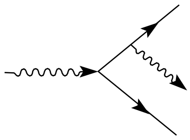
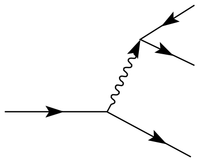
На рис. 3 представлены графики зависимости полной вероятности от номера уровня Ландау начального электрона. Магнитное поле принимается равным $h = 0.1$, при этом пороговое значение уровня Ландау начального электрона $l = 40$. Как видим, вероятность процесса имеет порядок 10^{13} c^{-1}:

$$W^+ \sim 10^{13}\ c^{-1}. \qquad (28)$$

С возрастанием номера l обе вероятности убывают, а вблизи порога W^- стремится к нулю.

В заключение сравним вероятность рассмотренного процесса с вероятностями других процессов. В таблице приведены значения вероятностей процессов излучения, фоторождения, двойного синхротронного излучения (подобный процесс в поле ла-

Таблица. Сравнение вероятностей процессов, $h = 0.1$

Процесс	Излучение	Фоторождение	Двойное излучение	Фоторождение с излучением	Рождение пары электроном
Диаграмма					
Начальные условия	$l = 40,\ l' = 0$	$\omega = 2m$, $l_- = l_+ = 0$	Нижайшие уровни	Нижайшие уровни	$l = 40,\ E = 2m$, $l_f = 0$
Вероятность, с^{-1}	$W^{total}_{e\to\gamma e} \sim 10^{17}$ $W^{\omega>2m}_{e\to\gamma e} \sim 10^{14}$ $W^{1\to 0}_{e\to\gamma e} \sim 10^{16}$	$W_{\gamma\to ee^+} \sim 10^9$	$W^{res}_{e\to e\gamma\gamma} \sim W^{1\to 0}_{e\to\gamma e}$	$W^{nonres}_{\gamma\to\gamma ee^+} \sim 10^6$ $W^{res}_{\gamma\to\gamma ee^+} \sim W_{\gamma\to ee^+}$	$W \sim 10^{13}$
Литература	[7, 14, 18]	[7, 13, 14, 17, 19]	[20]	[21]	–

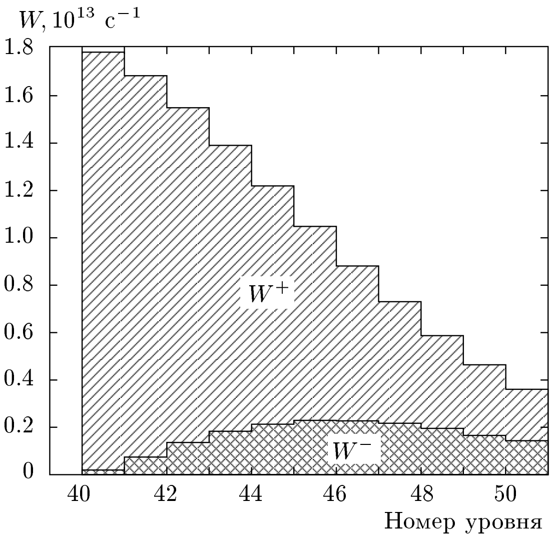


Рис. 3. Зависимости полной вероятности рождения пары на основные уровни от номера уровня Ландау начального электрона, $h = 0.1$

зерной волны рассмотрен в работах [15, 16]), фоторождения с испусканием фотона, рождения пары электроном. Магнитное поле равно $h = 0.1$ ($\approx 4.4\cdot 10^{12}$ Гс).

Для вероятности фоторождения используем выражение, полученное в рамках ультраквантового приближения [14, 17]. Положим частоту начального фотона $\omega = 2m$, номера уровней электрона и позитрона $l_f = 0$, магнитное поле $h = 0.1$. Вероятность фоторождения имеет резонансный характер и существенно зависит от величины z-компоненты импульсов частиц. Выберем их порядка $m\sqrt{h}$, исходя из полученной оценки (8). Тогда

$$W_{\gamma\to ee^+} \approx 3.7\cdot 10^9\ \text{с}^{-1}.$$

Для оценки вероятности излучения необходимо использовать ультрарелятивистское приближение [7, 14]. Выбрав энергию начального электрона равной $3m$, получим оценку полной вероятности синхротронного излучения

$$W^{total}_{e\to\gamma e} \approx 2.8\cdot 10^{17}\ \text{с}^{-1}.$$

Сюда, однако, входят процессы излучения фотона с энергией, недостаточной для рождения пары. Вероятность излучить фотон с энергией от $2m$ до $\omega_{max} \approx 3m$ приблизительно равна

$$W_{e\to\gamma e}^{\omega>2m} \approx 6.8 \cdot 10^{14}\ \text{c}^{-1}.$$

Авторы выражают благодарность С. П. Рощупкину и В. Е. Сторижко за ценные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Шапиро, С. Тьюколски, *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Физика компактных объектов*, Мир, Москва (1985).
2. A. K. Harding, A. G. Muslimov, and B. Zhang, Astrophys. J. **576**, 366 (2002).
3. N. Harrison and S. Crooker, Mag Lab Reports, Vol. 14, Rep. №1, p. 11 (2007).
4. А. Д. Сахаров, УФН **161**(5), 29 (1991).
5. D. L. Burke et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 1626 (1997).
6. I. Koenig, E. Berdermann, F. Bosch et al., Z. Phys. A **346**, 153 (1993).
7. Н. П. Клепиков, ЖЭТФ **26**, 19 (1954).
8. А. И. Никишов, *Труды ФИАН*, Наука, Москва (1979), т. 111, с. 152.
9. C. Graziani, A. K. Harding, and R. Sina, Phys. Rev. D **51**, 7097 (1995).
10. П. И. Фомин, Р. И. Холодов, ЖЭТФ **117**, 319 (2000).
11. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, Москва (2001).
12. А. Е. Шабад, *Труды ФИАН*, Наука, Москва (1988), т. 192, с. 5.
13. A. K. Harding, Phys. Rep. **206**, 327 (1991).
14. O. P. Novak and R. I. Kholodov, Phys. Rev. D **80**, 025025 (2009).
15. O. I. Voroshilo and S. P. Roshchupkin, Probl. Atom. Sci. Thechnol. **3**, 221 (2007).
16. E. Lötstedt and U. D. Jentschura, Phys. Rev. Lett. **103**, 110404 (2009).
17. O. P. Novak and R. I. Kholodov, Ukr. J. Phys. **53**, 185 (2008).
18. R. I. Kholodov and P. V. Baturin, Ukr. J. Phys. **46**, 621 (2001).
19. V. N. Baier and V. M. Katkov, Phys. Rev. D **75**, 073009 (2007).
20. П. И. Фомин, Р. И. Холодов, ЖЭТФ **123**, 356 (2003).
21. P. I. Fomin and R. I. Kholodov, Probl. Atom. Sci. Thechnol. **3**, 179 (2007).