

## К ТЕОРИИ МАГНИТОВЯЗКОГО ЭФФЕКТА В ФЕРРОЖИДКОСТЯХ

*А. Ю. Зубарев\*, Д. Н. Чириков*

*Уральский государственный университет  
620083, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 28 декабря 2009 г.

Теоретически исследуется вопрос о микроскопической природе вязкоупругих эффектов в феррожидкостях. Изучается кинетика роста цепочечных агрегатов, в которые объединяются магнитные феррочастицы под действием диполь-дипольного взаимодействия между ними. Показано, что темп эволюции ансамбля цепочек определяет темп изменения макроскопического напряжения среды при изменении приложенного внешнего поля и/или скорости сдвигового течения. Следовательно, вязкоупругость магнитных жидкостей может быть объяснена именно процессами формирования–разрушения цепочек. Предлагаемая микроскопическая модель феррожидкости позволяет, по-видимому впервые, получить оценки характерного времени вязкоупругости, соответствующие результатам экспериментов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Феррожидкости (ферроколлоиды, магнитные жидкости) представляют собой коллоидные взвеси однодоменных ферромагнитных частиц в немагнитной жидкой среде. Диаметр частиц в типичных феррожидкостях варьируется от 7 до 20 нм. Чтобы избежать необратимой коагуляции частиц под действием коллоидных дисперсионных сил, эти частицы покрываются специальными слоями, экранирующими дисперсионные взаимодействия. В зависимости от типа феррожидкости эти слои могут состоять из молекул поверхностно-активных веществ или иметь ионную структуру.

Сразу же после первых сообщений о синтезе феррожидкостей в 60-х годах прошлого века эти системы привлекли большой интерес исследователей и практиков, благодаря богатому набору уникальных свойств, перспективных для многих современных промышленных и биологических технологий. Классическое описание основ физики и методов синтеза феррожидкостей можно найти в книге [1]. Хорошее описание современного состояния дел в науке о феррожидкостях и направлениях их практического применения дано в сборнике [2].

Одной из примечательных особенностей феррожидкостей является их способность менять свои реологические свойства под действием внешнего маг-

нитного поля. Первые теории [3, 4] магнитовязкого эффекта в феррожидкостях рассматривали предельно разбавленные среды, в которых любыми взаимодействиями частиц можно пренебречь. Максимальный рост вязкости феррожидкостей под действием поля, предсказываемый этими моделями, не превышает нескольких процентов. Между тем эксперименты, выполненные в последние десять лет, показывают, что многие современные коммерческие феррожидкости обладают сильными магнитовязкими свойствами — рост их вязкости под действием поля достигает одного-двух порядков [5, 6]. Особо сильный магнитовязкий эффект наблюдается, если поле ориентировано вдоль направления градиента скорости течения.

Исследования показали, что такие сильные магнитореологические эффекты могут обеспечиваться только появлением гетерогенных агрегатов, состоящих из феррочастиц, объединенных силами магнитного взаимодействия [6–9]. Известны два типа гетероструктур, возникающих в объемах феррожидкостей — линейные цепочечные кластеры и объемные плотные «капли», состоящие из огромного числа феррочастиц. Теоретические и экспериментальные исследования структур обоих типов можно найти в работах [6–14]. Там же приведены многочисленные ссылки на более ранние исследования. В экспериментах [13, 15] обнаружены реологические эффекты, которые наряду с сильными магнитовязкими

\*E-mail: andrey.zubarev@usu.ru

свойствами феррожидкостей не могут быть в принципе объяснены в рамках классических одночастичных моделей.

Структуры обоих типов, как цепочки, так и плотные капли, могут вызывать сильные магнитореологические эффекты [8]. Следует признать, что на сегодняшний день отсутствует общепринятая теория, которая позволила бы ответить на вопрос, при каких условиях в феррожидкостях возникают цепочечные, а при каких — объемно-капельные микроструктуры.

Существующие теории магнитореологических свойств феррожидкостей в основном посвящены стационарным течениям, в которых размер и ориентация микроагрегатов однозначно определяются составом феррожидкости, величиной приложенного магнитного поля, а также градиентом скорости макроскопического течения среды.

Однако как с общенаучной, так и с практической точек зрения большой интерес представляет исследование течения феррожидкостей в условиях, когда либо приложенное поле, либо градиент скорости движения меняются со временем. Эксперименты [16] показали, что типичные коммерческие феррожидкости обладают выраженными вязкоупругими свойствами, а время их реологической релаксации при изменении градиента скорости варьируется от десятых долей секунды до десяти и более секунд. Эти значения времени релаксации примерно на четыре-пять порядков больше, чем предсказывают классические теории [3, 4] идеальных феррожидкостей с невзаимодействующими частицами.

Попытки построения моделей вязкоупругих свойств феррожидкостей с цепочечными агрегатами предпринимались в работах [17, 18]. В этих работах учитывалось, что каждому значению градиента скорости течения феррожидкости отвечает определенная величина угла отклонения оси цепочки от направления магнитного поля. Величина этого угла определяет величину макроскопического вязкого напряжения и, следовательно, вязкости феррожидкости. При изменении градиента скорости изменение ориентации цепочки происходит не мгновенно, а за какое-то конечное время. Именно это время поворота цепочек в моделях работ [17, 18] определяет релаксационную связь между напряжением и градиентом скорости течения, т.е. вязкоупругость феррожидкости. Следует признать, что хотя время гидродинамической релаксации, оцениваемое по этой модели, существенно ближе к результатам экспериментов [16], чем время, предсказываемое классическими моделями [3, 4], все же оно на один-два порядка меньше времени, измеренного

в этих экспериментах.

Можно ожидать, что за формирование вязкоупругих свойств феррожидкостей ответственны различные (не один) внутренние микро- и мезоскопические механизмы. В частности, существенный вклад может оказывать кинетика роста/разрушения цепочечных и других агрегатов — при изменении внешнего магнитного поля и/или градиента скорости течения изменение характерного размера цепочек происходит не мгновенно, а за конечное время. Это время вполне может определять время гидродинамической релаксации феррожидкости.

Ниже предлагается простейшая модель кинетики роста цепочечных агрегатов в феррожидкости, вовлеченной в течение простого сдвига, и на основе этой модели изучается динамика изменения вязкости феррожидкости при ступенчатом изменении внешнего поля, а также градиента скорости сдвига.

## 2. КИНЕТИКА РОСТА ЦЕПОЧЕЧНЫХ АГРЕГАТОВ

При анализе кинетики роста (разрушения) цепочек и их влияния на макроскопические реологические свойства феррожидкости, будем основываться на приближениях, использованных ранее в работах [7, 8, 17–19]. Несмотря на то что эти приближения игнорируют ряд физических факторов (см. ниже), влияющих на структуру цепочечных агрегатов, они все же позволяют получить оценки для стационарной вязкости феррожидкости [5–7, 9, 16, 20], неплохо соответствующие экспериментам.

Во-первых, необходимо иметь в виду, что все реальные феррожидкости полидисперсны, часто с широким распределением по размерам частиц. Типичные диаграммы распределения по размерам частиц в феррожидкостях можно найти в [5]. Учет существования большого числа фракций частиц с различными размерами делает задачу об определении внутренней микроструктуры феррожидкости чрезвычайно тяжелой. Для того чтобы максимально упростить вычисления и получить физические результаты в обозримом виде, поддающемся физическому анализу, будем рассматривать феррожидкость как монодисперсную суспензию идентичных однодоменных ферромагнитных сфер. Известно [5], что магнитовязкие эффекты в феррожидкостях обеспечиваются фракциями наиболее крупных частиц, способных образовывать гетерогенные структуры (цепочки, капли и т.д.). Объемная концентрация таких частиц в феррожидкости, обычно, мала — около 1–2 %.

Поэтому в нашей модели мы будем рассматривать достаточно крупные частицы, способные образовывать цепочечные структуры, предполагая, что их объемная концентрация в среде около 1.5%. Известно также [4, 5], что магнитный момент  $m$  достаточно крупной ферромагнитной частицы заморожен в ее тело — при динамических процессах частица поворачивается (вращается) вместе со своим магнитным моментом. Будем предполагать, что это условие выполнено.

Во-вторых, будем пренебрегать флуктуационной гибкостью цепочек, рассматривая их как прямые стержнеобразные агрегаты. Магнитные моменты частиц в каждой цепочке предполагаются выстроенными вдоль ее оси. В частности, это означает, что взаимодействие частиц друг с другом в цепочке предполагается существенно более сильным, чем их взаимодействие с внешним магнитным полем, причем энергия взаимодействия близко расположенных частиц существенно больше тепловой энергии  $kT$ . Последнее условие является необходимым для появления каких бы то ни было гетерогенных структур в феррожидкости.

В-третьих, пренебрежем любыми взаимодействиями между цепочками, что оправдано, если, как это и предполагается, концентрация частиц в системе мала.

### 2.1. Стационарное распределение цепочек по размерам

Цепочечные агрегаты являются специфически гетерогенными флуктуациями плотности. Поэтому число частиц в цепочке является случайной величиной, определяемой конкуренцией между магнитным притяжением частиц, их броуновским движением и, в случае макроскопического сдвигового течения, гидродинамическими силами, разрывающими цепочку. В макроскопической неподвижной среде максимальное число частиц в цепочке теоретически равно бесконечности. В деформационной движущейся среде слишком длинные цепочки разрываются гидродинамическими силами. Поэтому существует конечное максимальное число  $n_c$  частиц в цепочке. В случае, когда магнитное поле, ориентирующее ось цепей, направлено вдоль градиента скорости потока, это число может быть оценено следующим образом [5, 7]:

$$n_c \propto \sqrt{\varepsilon \frac{D_r}{\dot{\gamma}}}, \quad \varepsilon = \frac{2m^2}{d^3 kT}, \quad D_r = \frac{kT}{\pi\eta_0 d^3}. \quad (1)$$

Здесь  $d$  — гидродинамический диаметр частицы, определенный с учетом стабилизирующей оболочки,  $\eta_0$  — вязкость несущей жидкости, параметр  $\varepsilon$  — безразмерная, отнесенная к тепловой энергии  $kT$  энергия магнитодипольного взаимодействия двух контактирующих частиц,  $D_r$  — коэффициент вращательной диффузии частицы,  $\dot{\gamma}$  — градиент макроскопической скорости течения феррожидкости. Здесь и ниже мы используем гауссову систему единиц, наиболее удобную для анализа магнитных явлений.

Обозначим через  $g_n$  число  $n$ -частичных цепочек в единице объема среды. Если конвективным движением частиц вблизи цепочек можно пренебречь по сравнению с их диффузионным движением, то формирование/дезагрегирование цепочек происходит в основном аналогично тому, как это происходит в неподвижной равновесной среде. Поэтому стационарная функция распределения  $g_n$  может быть найдена так же, как и равновесная функция, с учетом ограничения на максимальную длину цепочки. Равновесная же функция распределения должна соответствовать принципу минимума свободной энергии среды.

Как отмечалось выше, мы предполагаем, что концентрация частиц в феррожидкости мала. Это позволяет, по крайней мере в первом приближении, пренебречь взаимодействием цепочек друг с другом. Свободная энергия  $F$  единицы объема ансамбля невзаимодействующих цепочек может быть записана в виде

$$F = kT \sum_{n=1}^{n_c} \left( g_n \ln \frac{g_n v}{e} + g_n f_n \right), \quad (2)$$

где  $v = \pi d^3/6$ ,  $e = 2.7 \dots$ . Первый член в скобках в выражении (2) является энтропией газа цепочек, соответствующей их трансляционному движению в пространстве,  $f_n$  — безразмерная внутренняя свободная энергия цепочки, определяемая взаимодействием частиц друг с другом и с внешним полем. Используя известное приближение ближайших соседей, в рамках принятых приближений эту энергию можно оценить как

$$f_n \approx - \left[ \varepsilon (n-1) + \ln \frac{\text{sh}(\kappa n)}{\kappa n} \right], \quad (3)$$

где  $H$  — магнитное поле, безразмерный параметр  $\kappa = mH/kT$  — отношение энергии взаимодействия частицы с полем к тепловой энергии  $kT$  среды.

Первый член в скобках в выражении (3) соответствует энергии магнитодипольного взаимодействия частиц в цепочке, оцененной в приближении ближайших соседей, второй — ланжевеновской свободной

энергии магнитной цепочки, рассматриваемой как единый кластер с магнитным моментом  $mn$ .

Подставляя соотношение (3) в (2), получаем

$$F = kT \sum_{n=1}^{n_c} g_n \left\{ \ln \frac{g_n v}{e} - \left[ \varepsilon(n-1) + \ln \frac{\text{sh}(\kappa n)}{\kappa n} \right] \right\}. \quad (4)$$

Стационарную функцию распределения по размерам цепочек будем определять из условия минимума свободной энергии (4) при учете условия нормировки

$$\sum_{n=1}^{n_c} n g_n = C = \frac{\varphi}{v}. \quad (5)$$

Здесь  $C$  — полное число частиц в единице объема,  $\varphi$  — их гидродинамическая объемная концентрация, определенная с учетом поверхностных слоев на частицах.

Минимизируя выражение (4) при условии (5), после стандартных преобразований получаем

$$g_n = \frac{1}{v} \frac{\text{sh}(\kappa n)}{\kappa n} X^n e^{-\varepsilon}, \quad (6)$$

где  $X$  — неопределенный множитель Ланжевена.

Для того чтобы определить  $X$ , нужно подставить соотношение (6) в условие нормировки (5). В результате получаем трансцендентное уравнение относительно  $X$ , которое можно решить численно.

## 2.2. Поток свободных частиц к цепочке

Кинетика роста цепочек определяется балансом потока частиц к цепочке и «испарения» из цепочки за счет их теплового движения. Здесь для описания потока ферромагнитных частиц к цепочке будем опираться на основные идеи модели в работе [21], успешно использованной для описания кинетики роста цепочек поляризующихся частиц.

В рамках этой модели мы предполагаем, что рост цепочек происходит в основном по механизму агрегирования «цепочка–частица» и пренебрегаем механизмом «цепочка–цепочка». Обоснованием этого служит то, что, во-первых, количество одиночных частиц в феррожидкости для реальных ситуаций больше, чем число цепочек; во-вторых, гидродинамическая подвижность частиц существенно больше подвижности цепочек. Все это обеспечивает то, что поток одиночных частиц к цепочке существенно больше потока к ней других цепочек. Кроме того, будем предполагать, что частицы присоединяются только к полюсам цепочки, пренебрегая, таким образом, их присоединением «сбоку». Это допущение

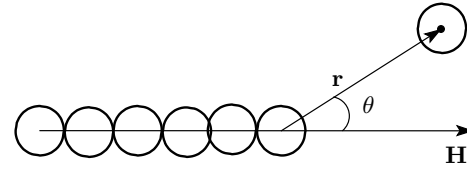


Рис. 1. Схематическое изображение цепочки и взаимодействующей с ней свободной частицы

оправдано тем, что при боковом агрегировании частиц, магнитный момент которых, как и момент цепочки, направлен параллельно приложенному полю, частицам нужно преодолеть потенциальный барьер, высота которого имеет порядок величины  $\varepsilon kT$ . Поскольку формирование цепочек, способных повлиять на физические свойства феррожидкости, возможно, только когда параметр  $\varepsilon$  существенно больше единицы, вероятность диффузионного преодоления этого барьера мала. Намного более вероятно то, что частицы под действием магнитных сил притянутся непосредственно к полюсам цепочки. Следует отметить, что, как показывает анализ [22], очень длинные цепочки термодинамически неустойчивы — они должны трансформироваться в плотные объемные капли. Мы предполагаем, что вероятность появления таких длинных цепочек ничтожно мала.

Нашей ближайшей задачей будет определение потока частиц к цепочкам, т. е. числа частиц, присоединяющихся к ним за единицу времени. Поток частиц, испаряющихся из цепочек, приводящий к их дезинтеграции, рассмотрим позже.

Рассмотрим цепочку, состоящую из  $n$  частиц, окруженную свободными частицами (рис. 1).

Обозначим через  $c_\infty$  числовую концентрацию свободных частиц (их число в единице объема) на бесконечном расстоянии от цепочки,  $c(\mathbf{r})$  — их концентрацию в точке  $\mathbf{r}$  пространства. Чтобы не превышать точности расчета энергии взаимодействия частиц в цепочке, соответствующей приближению ближайших соседей, будем учитывать взаимодействие свободной частицы только с ближайшей к ней концевой частицей цепочки. Как показано в работе [21], в этом приближении магнитное притяжение свободной частицы к цепочке подобно притяжению к одиночной частице.

Рассмотрим такую частицу, моделирующую цепочку, и поместим в ее центр начало системы координат. Удобно использовать сферическую систему координат с полярной осью, направленной вдоль приложенного поля  $\mathbf{H}$ . Эта система координат проиллюстрирована на рис. 1.

Поскольку мы предполагаем, что концентрация частиц в феррожидкости мала, можно пренебречь взаимодействием свободных частиц со всеми цепочками, кроме рассматриваемой. Тогда уравнение диффузии свободных частиц вблизи этой цепочки можно записать в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla[D(\mathbf{r})\nabla c] + \nabla[D(\mathbf{r})c\nabla u_{dd}(\mathbf{r})]. \quad (7)$$

Здесь  $u_{dd}$  — отнесенная к  $kT$  энергия диполь-дипольного взаимодействия фиксированной и свободной частицы,  $D(r) = D_0\psi(r)$ ,  $D_0$  — коэффициент диффузии изолированной частицы,  $\psi(r) = 3d/4r$  — поправка, вызванная гидродинамическим взаимодействием между свободной и фиксированной частицами [23].

Граничные условия этой задачи:

$$c \rightarrow \begin{cases} c_\infty, & r \rightarrow \infty, \\ 0, & r \rightarrow d. \end{cases} \quad (8)$$

Первое из этих условий имеет очевидный смысл; второе означает, что при соприкосновении с цепочкой свободная частица исчезает, превращаясь в связанную.

Уравнение (7) не имеет точного аналитического решения. Чтобы найти приближенное решение, мы, как и в работе [21], используем следующие приближения. Во-первых, учтем, что время, необходимое для установления стационарного распределения свободных частиц вблизи цепочки (т. е. вблизи моделирующей ее частицы), существенно меньше времени, требуемого для изменения концентрации  $c_\infty$  свободных частиц. Поэтому уравнение (7) может быть решено в квазистационарном приближении.

Потенциал  $u_{dd}$  зависит не только от расстояния  $r$  до фиксированной частицы, но и от угла  $\theta$  между радиус-вектором  $\mathbf{r}$  частицы и полем  $\mathbf{H}$ . Учитывая это, решение стационарной задачи (7), (8) можно искать в виде ряда по сферическим полиномам Лежандра от  $\cos \theta$ . Вообще говоря, такой ряд содержит бесконечное число членов и сходится довольно медленно, что весьма неудобно для практических расчетов. Чтобы получить физически приемлемые оценки для потока частиц к цепочке, усредним, как и в работе [21], потенциал  $u_{dd}$  по углам  $\theta$ , соответствующим конусу притяжения между частицами. Средняя величина усредненного потенциала равна

$$\bar{u}_{dd} = \int_{|\cos \theta| > 1/\sqrt{3}} u_{dd}(r, \theta) d \cos \theta / \int_{-1}^1 d \cos \theta. \quad (9)$$

Именно эту среднюю величину, зависящую только от расстояния  $r$  до фиксированной частицы, будем использовать в уравнении (7) вместо истинного потенциала  $u_{dd}(\mathbf{r})$ . Такое упрощение позволило авторам работы [21] достаточно точно описать эксперименты по кинетике агрегирования поляризуемых частиц.

Как известно, потенциал диполь-дипольного взаимодействия частиц с магнитными моментами  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  в гауссовой системе единиц может быть записан в виде

$$u_{dd} = -\frac{1}{kT} \left[ 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{r^3} \right]. \quad (10)$$

Учет взаимодействия частицы с цепочкой сильно осложняется тем, что как частицы, так и цепочка, вообще говоря, испытывают броуновское вращательное движение. Поэтому направления их магнитных моментов, вообще говоря, флуктуируют. Одновременный учет как пространственной, так и вращательной диффузии частицы и цепочки с учетом их взаимодействия представляет собой очень сложную математическую задачу. Здесь мы используем простейшую модель, считая, что моменты частицы и цепочки направлены вдоль приложенного поля. Конечно, такое приближение переоценивает влияние магнитного поля на кинетику роста, однако в достаточно сильных полях ( $\kappa > 1$ ), когда только и можно ожидать существенных магнитовязких эффектов, отклонения магнитных моментов частиц от поля малы. Поэтому ошибка сделанного приближения не может быть большой. В конечном итоге справедливость этого приближения определяется соответствием результатов расчетов данным экспериментов.

Поскольку магнитные моменты частиц предполагаются ориентированными вдоль поля  $\mathbf{H}$ , в формуле (10) можно положить  $m_1 = m_2 = m$ . Учитывая направление этих моментов вдоль поля и подставляя выражение (10) в (9), после несложных вычислений получаем

$$\bar{u}_{dd} = -\frac{s}{3\sqrt{3}x^3}. \quad (11)$$

Здесь  $x = r/d$  — безразмерное расстояние между свободной частицей и концевой частицей цепочки. Подставляя соотношение (11) в (9), приходим к следующей форме этого уравнения в стационарном приближении:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ D_0\psi(r)r^2 \left( \frac{\partial}{\partial r}c + c \frac{\partial}{\partial r}\bar{u}_{dd}(r) \right) \right] = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) с граничными условиями (8) непосредственно приводит к следующему выражению для потока  $J$  свободных частиц к цепочке:

$$J = Ac_\infty, \quad A = \frac{4\pi D_0 d}{W},$$

$$W = \int_1^\infty \frac{\exp(\bar{u}_{dd})}{\psi(x) x^2} dx. \quad (13)$$

### 2.3. Эволюция ансамбля цепочек

Перейдем теперь к описанию эволюции ансамбля цепочек. Изменение с течением времени функции распределения  $g_n$  происходит за счет присоединения частиц к цепочкам и их «испарения» из цепочек. Как отмечалось, мы предполагаем, что присоединение частиц происходит только к краевым частицам цепочек. Будем также предполагать, что «испаряются» только краевые частицы. Действительно, поскольку краевая частица слабее связана с цепочкой, чем внутренняя, вероятность ее испарения выше. В результате захвата свободных частиц цепочки, состоящие из  $n$  частиц, трансформируются в цепочки, состоящих из  $n + 1$  частиц.

В рамках рассматриваемого механизма роста и разрушения цепочек приходим к кинетическому уравнению Смолуховского:

$$\frac{\partial g_n}{\partial t} = -Ag_1(g_n - g_{n-1}) + B_1 \left( \frac{B_n}{B_{n+1}} g_{n+1} - \frac{B_{n-1}}{B_n} g_n \right), \quad n > 1. \quad (14)$$

Здесь  $A$  — коэффициент захвата, определенный в (13), а  $B_n$  — коэффициенты, определяющие интенсивность десорбции частиц из цепочки (они будут определены ниже).

Первый член в правой части уравнения (14) определяет кинетику изменения концентрации  $n$ -частичных цепочек за счет присоединения свободных частиц к ним, а также к  $n - 1$ -частичным, второй — за счет десорбции одиночных частиц из цепочек с  $n + 1$  и  $n$  частицами. Выбор формы коэффициентов при  $g_{n+1}$  и  $g_n$  в десорбционном члене в (14) в виде дробей сделан ради удобства.

Уравнение для  $g_1$  имеет вид

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = -2Ag_1^2 - Ag_1 \sum_{n=2}^{n_c-1} g_n + 2 \frac{B_1^2}{B_2} g_2 + B_1 \sum_{n=3}^{n_c} \frac{B_{n-1}}{B_n} g_n. \quad (15)$$

Здесь учитывается, во-первых, тот факт, что когда две частицы образуют дублет, их относительная гидродинамическая подвижность примерно вдвое больше относительной подвижности между индивидуальной частицей и неподвижной цепочкой; во-вторых, в момент, когда дублет исчезает, появляются две новые одиночные частицы. Уравнения, аналогичные (14), (15), были использованы в работе [21] при анализе эволюции ансамбля цепочек поляризующихся частиц. Отличие уравнений (14), (15) от использованных в работе [21] состоит в том, что в них учитывается зависимость коэффициентов десорбции  $B_n$  от числа частиц в цепочке.

Для цепочек с максимально возможным числом частиц  $n_c$  можно написать

$$\frac{\partial g_{n_c}}{\partial t} = Ag_{n_c-1}g_1 - B_1 \sum_{n=3}^{n_c} \frac{B_{n_c-1}}{B_{n_c}} g_{n_c}. \quad (16)$$

Система уравнений (14)–(16) является замкнутой и автоматически удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{n_c} n g_n = C, \quad (17)$$

где  $C$  — постоянная величина. Из физических соображений следует, что она должна быть равной общей концентрации  $\varphi/v$  частиц в суспензии.

Определим коэффициенты десорбции  $B_n$ . Очевидно, стационарное решение  $g_n^0$  системы уравнений (14)–(16) соответствует равновесному состоянию системы, следовательно, оно должно совпадать с равновесной функцией распределения, найденной из соображений минимума свободной энергии. Можно легко проверить, что стационарным решением (14)–(16) является

$$g_n^0 = \frac{B_n}{A} Y^n, \quad (18)$$

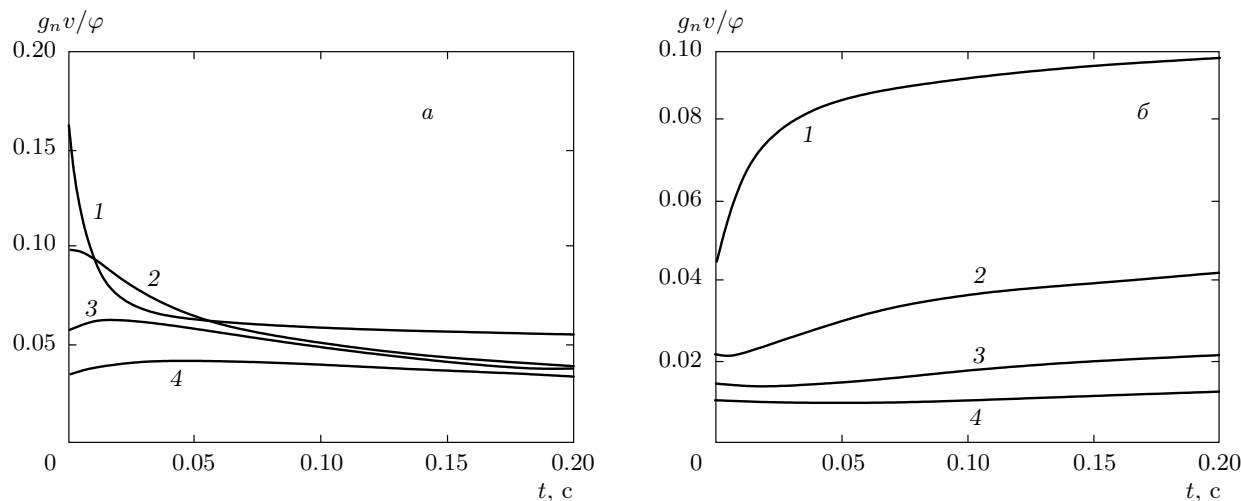
где  $Y$  — неопределенный параметр.

Приравнивая соотношения (6) и (18), получаем

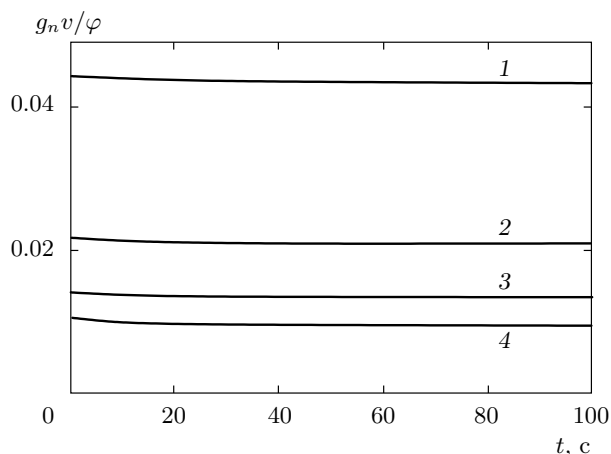
$$Y = X, \quad B_n = \frac{A}{v} \frac{\text{sh}(\kappa n)}{\kappa n} e^{-\epsilon}. \quad (19)$$

Способ вычисления параметра  $X$  указан после уравнения (6).

Система уравнений (14)–(16) может быть решена численно. Рисунки 2, 3 иллюстрируют зависимость изменения функции распределения по размерам цепочек от времени для трех различных ситуаций. Для определенности расчеты проведены для слабоконцентрированной феррожидкости класса ТТR, изготавливаемой в университете г. Тимишоара (Румы-



**Рис. 2.** Кинетика изменения концентрации цепочек со временем  $t$  при скачкообразном изменении внешнего магнитного поля для феррожидкости с магнетитовыми частицами. Параметры системы: гидродинамический диаметр частицы  $d = 16$  нм, объемная концентрация частиц  $\varphi = 0.015$ ; вязкость несущей жидкости  $\eta_0 = 0.115$  Па·с, безразмерное отношение  $\dot{\gamma}/D_r = 7 \cdot 10^{-3}$ . Безразмерное магнитное поле  $\kappa$  меняется скачком от 0 до 3 (а) и от 3 до 1 (б). Кривые 1 — число отдельных частиц; 2 — число цепочек, состоящих из двух частиц; 3 — число цепочек, состоящих из трех частиц; 4 — число цепочек, состоящих из четырех частиц



**Рис. 3.** То же, что на рис. 2 при  $\kappa = 3$ , отношение  $\dot{\gamma}/D_r$  меняется от  $7 \cdot 10^{-3}$  до  $7 \cdot 10^{-4}$

ния), широко используемой в экспериментах по изучению магнито реологических свойств феррожидкостей.

### 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОСТИ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

В работах [17, 18] предложена модель вязкоупругого поведения феррожидкостей с цепочечными

агрегатами. Кинетика изменения распределения цепочек по размерам при изменении скорости сдвига во внимание не принималась — этот процесс считался мгновенным. Учитывалась только кинетика переориентации цепочек. Последующий анализ показал, что характерное время гидродинамической релаксации, вычисленное с учетом только этого механизма, для феррожидкостей, использованных в экспериментах [16], имеет порядок величины  $10^{-2}$ – $10^{-1}$  с, в то время как в экспериментах это время было порядка нескольких и многих секунд.

В этой части работы мы предлагаем модель динамики эффективной вязкости феррожидкости с цепочечными агрегатами, учитывающую кинетику их роста. Чтобы сконцентрировать внимание именно на эффектах, порождаемых кинетикой роста цепочек, в противоположность работам [17, 18], будем предполагать, что изменение ориентации цепочек при изменении магнитного поля и/или градиента скорости течения происходит мгновенно. Как и в работах [7, 17, 18] будем моделировать цепочку, состоящую из  $n$  частиц, вытянутыми эллипсоидами вращения с малой и большой осями, равными соответственно диаметру частицы  $d$  и  $nd$ . Принципиально важно, что объем такого эллипсоида равен суммарному объему  $\pi nd^3/6$  всех частиц в цепочке. Следовательно, объемная концентрация эллипсоидов равна объемной концентрации частиц в феррожидкости.

Используя известные результаты статистической гидромеханики суспензий несферических частиц [24], выражение для декартовых компонент среднего тензора вязких напряжений  $\sigma$  можно записать в виде суммы симметричной  $\sigma_{ik}^s$  и антисимметричной  $\sigma_{ik}^a$  частей:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^s + \alpha_{ik}^a,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}^s = 2\eta_0\gamma_{ik} + \eta_0 \left\langle \left\langle \left[ (2\alpha_n\gamma_{ik} - \rho_n \langle e_j e_s \rangle_n \delta_{ik} \gamma_{js}) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (\zeta_n + \beta_n \lambda_n) (\langle e_i e_j \rangle_n \gamma_{jk} + \langle e_k e_j \rangle_n \gamma_{ji}) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \beta_n (\omega_{ij} \langle e_j e_k \rangle_n + \omega_{kj} \langle e_j e_i \rangle_n) + (\chi_n - 2\lambda_n \beta_n) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \langle e_i e_k e_j e_s \rangle_n \gamma_{js} - \beta_n \frac{d}{dt} \langle e_i e_k \rangle_n \right] \right\rangle \right\rangle, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\sigma_{ik}^a = \frac{\kappa k T}{2v} \langle \langle e_i \rangle h_k - \langle e_k \rangle h_i \rangle, \quad h_i = \frac{H_i}{H},$$

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad \omega_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Здесь и ниже

$$\langle \langle \dots \rangle \rangle = \Sigma \dots n v g_n,$$

$$\langle \dots \rangle = \int \dots \mathbf{e} \varphi_n(\mathbf{e}) d\mathbf{e}, \quad \langle \dots \rangle^0 = \int \dots \mathbf{e} \varphi_n^0(\mathbf{e}) d\mathbf{e},$$

$$i, \dots, s = x, y, z,$$

$\mathbf{u}$  — средняя скорость феррожидкости. Единичный вектор  $\mathbf{e}$  направлен вдоль оси цепочки,  $\varphi_n$  — нормированная на единицу функция распределения по  $\mathbf{e}$ ,  $\varphi_n^0$  — равновесная функция распределения. Параметры  $\alpha_n, \dots, \zeta_n$  определены и даны в Приложении.

В предположении, что  $\varepsilon \gg 1$  и  $\varepsilon \gg \kappa$  можно считать, что магнитный момент всех частиц в цепочке направлен вдоль ее оси. Следовательно, равновесная функция распределения  $\varphi_n^0(\mathbf{e})$  совпадает с таковой для жестких частиц с магнитным моментом  $m$ . Используя хорошо известные результаты равновесной теории феррожидкостей [1, 4], можно написать

$$\varphi_n^0(\mathbf{e}) = \frac{\kappa n}{4\pi \operatorname{sh}(\kappa n)} \exp[\kappa n(\mathbf{e} \cdot \mathbf{h})]. \quad (21)$$

Для того чтобы определить неравновесную функцию  $\varphi_n$ , необходимо написать решение соответствующего уравнения Фоккера–Планка. Используя модель цепочек как твердых эллипсо-

идов вращения и хорошо известную форму этого уравнения для таких частиц [24], имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \lambda_n (e_s \gamma_{sl} - e_m e_s e_l \gamma_{ms}) \frac{\partial \varphi_n}{\partial e_l} + \\ + \omega_{ls} e_s \frac{\partial \varphi_n}{\partial e_l} - 3\lambda_n e_l e_s \gamma_{ls} \varphi_n - \\ - D_n \kappa n \left[ (e_j e_m h_m - h_j) \frac{\partial \varphi_n}{\partial e_j} + 2e_j h_j \varphi_n \right] = \\ = D_n \left( \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial e_j^2} - 2e_s \frac{\partial \varphi_n}{\partial e_s} - e_j e_s \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial e_j \partial e_s} \right), \quad (22) \end{aligned}$$

где

$$D_n = \frac{kT}{\pi \eta_0 d^3 n \delta_n}, \quad \delta_n = \frac{2(n^2 + 1)}{3n(n^2 \alpha_0 + \beta_0)}.$$

Точное решение этого уравнения для произвольного  $\kappa n$  неизвестно. Для того чтобы найти приближенное решение, будем использовать метод эффективного поля, предложенный в работе [4] и развитый в работах [7, 8, 17, 18]. В рамках этого метода, являющегося вариантом метода пробных функций, неравновесную функцию распределения будем искать в виде

$$\varphi_n = \varphi_n^0 [1 + a_i (e_i - \langle e_i \rangle_n^0) + b_{ik} (e_i e_k - \langle e_i e_k \rangle_n^0)], \quad (23)$$

где  $a_i$  и  $b_{ik}$  — компоненты неизвестных вектора и тензора, которые должны быть определены. Для этой цели умножим обе части выражения (22) на компоненты вектора  $\mathbf{e}$  и тензора  $e_i e_m$  и проинтегрируем полученное выражение по всем ориентациям вектора  $\mathbf{e}$ . В результате в линейном приближении по компонентам градиента скорости потока получаем следующие уравнения [24]:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_k \rangle_n}{dt} = -\frac{1}{\tau_{1n}} \langle e_k \rangle_n + \lambda_n (\langle e_j \rangle_n^0 \gamma_{jk} - \langle e_k e_j e_s \rangle_n^0 \gamma_{js}) + \\ + \omega_{kj} \langle e_j \rangle_n^0 + D_n \kappa n (h_k - \langle e_k e_j \rangle_n h_j), \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle e_i e_k \rangle_n}{dt} = -\frac{1}{\tau_{2n}} \left( \langle e_i e_k \rangle_n - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right) + \\ + \lambda_n (\langle e_i e_s \rangle_n^0 \gamma_{sk} + \langle e_k e_s \rangle_n^0 \gamma_{si}) + \omega_{ij} \langle e_j e_k \rangle_n^0 + \\ + \omega_{kj} \langle e_j e_i \rangle_n^0 - 2\lambda_n \langle e_i e_k e_s e_j \rangle_n^0 \gamma_{sj} + \\ + D_n \kappa n (\langle e_k \rangle_n h_i - 2 \langle e_j e_i e_k \rangle_n h_j + \langle e_i \rangle_n h_k), \quad (25) \end{aligned}$$

где

$$\tau_{1n} = \frac{1}{2D_n}, \quad \tau_{2n} = \frac{1}{6D_n},$$



а верхние индексы «0» соответствуют равновесным моментам, вычисленным на равновесной функции распределения  $\varphi_n^0$ .

Вычисляя неравновесные статистические моменты в выражениях (24), (25) на пробной функции (23), приходим к системе дифференциальных уравнений относительно функций  $a_i(t)$  и  $b_{ik}(t)$  при заданном  $n$ . После решения этой системы можно использовать функцию (23) для определения неравновесных моментов в (22). Подобный подход привел к хорошему согласию аналитических расчетов с результатами лабораторных [5, 7] и компьютерных [25] экспериментов.

#### 4. РЕЛАКСАЦИЯ ВЯЗКОСТИ

В общем случае проблема вычисления  $a_i$  и  $b_{ij}$  не слишком сложна, однако очень громоздка. Введем декартову систему координат  $x, y, z$ , ось  $z$  которой параллельна внешнему магнитному полю ( $H_z = H = \text{const}$ ,  $H_{x,y} = 0$ ).

Рассмотрим случай, когда скорость  $\mathbf{u}$  феррожидкости направлена вдоль оси  $x$  с градиентом, направленным вдоль  $z$  (т. е. вдоль внешнего поля  $\mathbf{H}$ ). Обозначим скорость сдвига  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \omega_{xz} = -\omega_{zx}$  как  $\dot{\gamma}$ .

Непосредственные оценки показывают, что характерное время  $\tau_{1n}$  переориентации цепочки даже для весьма длинных цепочек, состоящих из нескольких десятков частиц, для феррожидкости типа ТТР по порядку величины не больше  $10^{-2}$ – $10^{-1}$  с, что существенно меньше времени реологической релаксации этой феррожидкости (от одной до нескольких десятков секунд), измеренного в экспериментах [16]. Как следует из результатов наших расчетов, время  $\tau_{1n}$  существенно меньше времени эволюции ансамбля цепочечных агрегатов, определяющего время изменения вязкости феррожидкости (рис. 4). Поэтому в дальнейшем пренебрегаем процессом переориентации цепочек, считая его мгновенным, что позволяет ограничиться стационарным приближением уравнений (24), (25). В этом приближении после несложных, но несколько громоздких вычислений приходим к следующей системе уравнений относительно  $a_x$  и  $b_{xy}$  (другие компоненты  $a_i$  и  $b_{ij}$  в данном случае оказываются тождественно равными нулю):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\tau_{1n}} \langle e_x^2 \rangle_n^0 + D_n \kappa n \langle e_x^2 e_z \rangle_n^0 \right) a_x + \\ & + \left( \frac{1}{\tau_{1n}} \langle e_x^2 e_z \rangle_n^0 + D_n \kappa n \langle e_x^2 e_z \rangle_n^0 \right) 2b_{xz} = \\ & = [\lambda_n (\langle e_z \rangle_n^0 - 2 \langle e_x^2 e_z \rangle_n^0) + \langle e_z \rangle_n^0] \dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\tau_{2n}} \langle e_x^2 e_z \rangle_n^0 + D_n \kappa n (2 \langle e_x^2 e_z^2 \rangle_n^0 - \langle e_x^2 \rangle_n^0) \right] a_x + \\ & + \left[ \frac{1}{\tau_{2n}} \langle e_x^2 e_z^2 \rangle_n^0 + D_n \kappa n (2 \langle e_x^2 e_z^3 \rangle_n^0 - \langle e_x^2 e_z \rangle_n^0) \right] 2b_{xz} = \\ & = [\lambda_n (\langle e_x^2 \rangle_n^0 - 4 \langle e_x^2 e_z^2 \rangle_n^0 + \langle e_z^2 \rangle_n^0) + \\ & + (\langle e_z \rangle_n^0 - \langle e_x^2 \rangle_n^0)] \dot{\gamma}. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (21) и (23) в соотношение (20), имеем

$$\sigma_{xz} = 2\eta \dot{\gamma} \quad (28)$$

с эффективной вязкостью

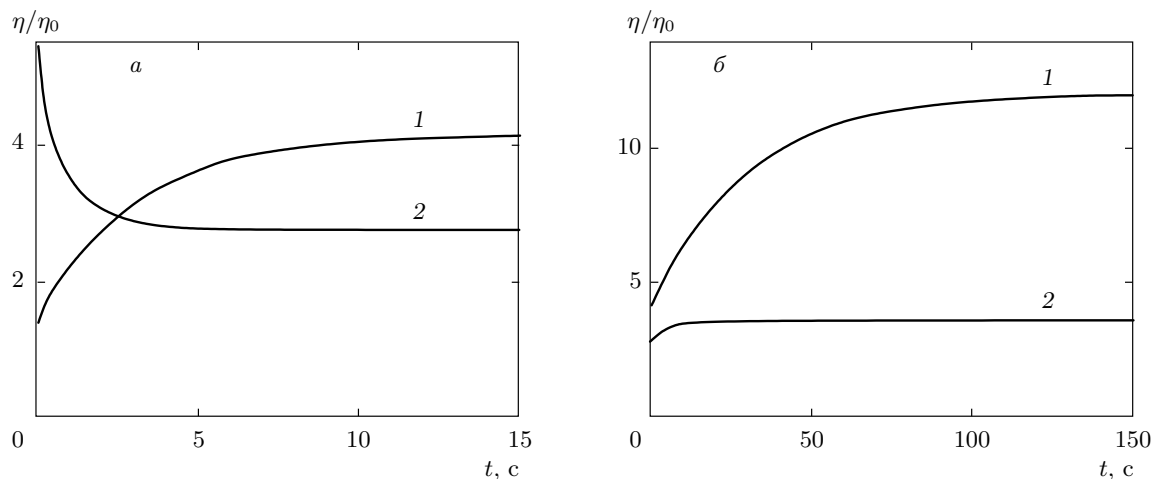
$$\begin{aligned} \eta = & \eta_0 \left[ 1 + \left\langle \left\langle \alpha_n + \frac{1}{2} [(\zeta_n + \beta_n \lambda_n) (\langle e_x^2 \rangle_n^0 + \langle e_z^2 \rangle_n^0) + \right. \right. \right. \\ & + \beta_n (\langle e_z^2 \rangle_n^0 - \langle e_x^2 \rangle_n^0) + \\ & \left. \left. + 2(\chi_n - 2\lambda_n \beta_n) \langle e_x^2 e_z^2 \rangle_n^0 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2v} \frac{\kappa k T}{\eta_0} (A_1 \langle e_x^2 \rangle_n^0 + B_1 \langle e_x^2 e_z \rangle_n^0) \right\rangle \right], \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$A_1 = \frac{a_x}{2\dot{\gamma}}, \quad B_1 = \frac{b_{xz}}{\dot{\gamma}}.$$

Определив функцию распределения по числу частиц в цепочке,  $g_n$ , из уравнений (15)–(17) и используя результат в соотношении (29), находим зависимость эффективной вязкости  $\eta$  от времени. Рисунок 4 иллюстрирует зависимость  $\eta(t)$  при ступенчатых изменениях приложенного поля и скорости сдвига. Характеристики феррожидкости, выбранные для расчетов, близки к характеристикам феррожидкости ТТР, используемой в экспериментах [16].

Если за характерное время релаксации вязкости выбрать время, за которое разность между начальным и конечным значениями вязкости уменьшается в  $e \approx 2.72 \dots$  раз, то, как видно из рис. 4б, при  $\kappa = 3$  это время составляет порядка десятка секунд, при  $\kappa = 1$  — несколько секунд. Этот результат соответствует измерениям [16]. Стационарные значения вязкости, рассчитанные в рамках развиваемой модели, также весьма близки к результатам различных экспериментов [5, 7, 8, 16, 20]. Все это позволяет утверждать, что предлагаемая модель, несмотря



**Рис. 4.** Зависимость эффективной вязкости магнетитовой феррожидкости от времени  $t$  в результате кинетики роста цепочек. Объемная доля частиц  $\varphi = 0.015$ , вязкость несущей жидкости  $\eta_0 = 0.115$  Па·с, диаметр частицы  $d = 16$  нм:  $a - \dot{\gamma}/D_r = 7 \cdot 10^{-3}$ , в начальный момент времени безразмерное магнитное поле  $\kappa$  меняется от 0 до 3 (кривая 1), от 3 до 1 (кривая 2);  $b -$  отношение  $\dot{\gamma}/D_r$  в начальный момент времени меняется от  $7 \cdot 10^{-3}$  до  $7 \cdot 10^{-4}$ ,  $\kappa = 3$  (1), 1 (2)

на ее сильно упрощенный характер, адекватно отражает физику внутренних явлений, происходящих в феррожидкостях и определяющих магнито-реологическое и вязкоупругое поведение этих систем.

К сожалению, провести более подробные сопоставления рассчитанного времени релаксации с результатами экспериментов [16] не представляется возможным, так как в этих экспериментах использовались полидисперсные феррожидкости с весьма широким распределением по размерам частиц. Очевидно, это обстоятельство существенно влияет на реологические свойства среды. Тем не менее в нашей модели, по-видимому, впервые достигнуто согласие, по крайней мере по порядку величины, теоретически определенного времени вязкоупругой релаксации феррожидкости с результатами экспериментов. Это позволяет сделать вывод о том, что определяюще важным микроскопическим механизмом формирования вязкоупругих свойств этих систем является темп эволюции цепочечных гетероагрегатов.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предлагается модель кинетики роста цепочечных агрегатов, а также влияния этого процесса на реологические свойства феррожидкостей. Несмотря на упрощения, лежащие в основе предложенной модели, она позволяет получить оценки для величины вязкости и времени вязкоупругой релаксации феррожидкости, по крайней мере по поряд-

ку величины совпадающие со значениями этих величин, измеренными в экспериментах. На основании выполненных расчетов можно сделать вывод о том, что темп эволюции микроскопических цепочечных структур играет определяющую роль в формировании макроскопических вязкоупругих свойств этих систем.

Необходимо отметить, что на реологические свойства реальных феррожидкостей важное влияние могут оказывать как флуктуационная гибкость цепочек, так и возникновение и эволюция капельных и других гетерогенных агрегатов. Изучение этих факторов может рассматриваться как естественное продолжение и обобщение развитой здесь модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF (грант № RG07-005-02), Рособразования (гранты №№ 2.1.1/2571, 2.1.1/1535), Федеральных целевых программ (гранты №№ 02.740.11.0202, НК-43P(4)).

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Равновесные моменты вектора ориентации  $n$ -частичной цепочки:

$$\langle e_i \rangle_n^0 = h_i L_1, \quad \langle e_i e_k \rangle_n^0 = \frac{1}{2}(1 - L_2)\delta_{ik} + \frac{1}{2}(3L_2 - 1)h_i h_k,$$

$$\langle e_i e_k e_j \rangle_n^0 = \frac{1}{2}(L_1 - L_3)(\delta_{ik} h_j + \delta_{ij} h_k + \delta_{kj} h_i) + \frac{1}{2}(5L_3 - 3L_1) h_i h_j h_k,$$

$$\langle e_i e_k e_l e_m \rangle_n^0 = \frac{1}{8}(1 - 2L_2 + L_4)(\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{km}) + \frac{1}{8}(6L_2 - 5L_4 - 1) \times \\ \times (h_i h_k \delta_{lm} + h_i h_m \delta_{kl} + h_i h_l \delta_{km} + h_l h_m \delta_{ik} + h_l h_k \delta_{im} + h_m h_k \delta_{li}) + \frac{1}{8}(3 - 30L_2 + 35L_4) h_i h_k h_l h_m,$$

$$\langle e_z \rangle_n^0 = L_1, \quad \langle e_z^2 \rangle_n^0 = L_2, \quad \langle e_z^3 \rangle_n^0 = L_3, \quad \langle e_z^4 \rangle_n^0 = L_4, \quad \langle e_z^5 \rangle_n^0 = L_5, \quad \langle e_x^2 \rangle_n^0 = \frac{1}{2}(1 - L_2),$$

$$\langle e_x^2 e_z \rangle_n^0 = \frac{1}{2}(L_1 - L_3), \quad \langle e_x^2 e_z^2 \rangle_n^0 = \frac{1}{2}(L_2 - L_4), \quad \langle e_x^2 e_z^3 \rangle_n^0 = \frac{1}{2}(L_3 - L_5),$$

$$L_J = L_J(\kappa n), \quad J = 1, 2, 3, 4, \quad L_1(x) = \text{ch}(x) - \frac{1}{x}, \quad L_2(x) = 1 - \frac{2}{x} L_1(x),$$

$$L_3(x) = \frac{1}{x} + L_1(x) - \frac{3}{x} L_2(x), \quad L_4(x) = 1 - \frac{4}{x} L_3(x), \quad L_5(x) = \frac{1}{x} + L_1(x) - \frac{5}{x} L_4(x).$$

Значения кинетических коэффициентов, фигурирующих в выражениях (20) для эффективной вязкости:

$$\alpha_n = \frac{1}{n\alpha'_0}, \quad \beta_n = \frac{2(n^2 - 1)}{n(n^2\alpha_0 + \beta_0)}, \quad \zeta_n = \frac{4}{(n^2 + 1)n\beta'_0} - \frac{2}{n\alpha'_0}, \quad \chi_n = \frac{2\alpha''_0}{n\alpha_0\beta''_0} - \frac{8}{n(n^2 + 1)\beta'_0} + \frac{2}{n\alpha'_0},$$

$$\rho_n = \frac{1}{3n\alpha'_0\beta''_0} [2(\alpha''_0 - \beta''_0) + 3n(\alpha_0\alpha''_0 - \beta_0\beta''_0)], \quad \lambda_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

Здесь

$$\alpha_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{(n^2 + s)Q}, \quad \beta_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{(1 + s)Q}, \quad \alpha'_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{(1 + s)^2 Q}, \quad \beta'_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{(n^2 + s)(1 + s)Q},$$

$$\alpha''_0 = \int_0^\infty \frac{s ds}{(1 + s)^2 Q}, \quad \beta''_0 = \int_0^\infty \frac{s ds}{(n^2 + s)(1 + s)Q}, \quad Q = (1 + s)\sqrt{n^2 + s}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Розенцвейг, *Феррогидродинамика*, Мир, Москва (1989).
2. *Colloidal Magnetic Fluids*, Lectures Notes in Phys. Vol. 763, ed. by S. Odenbach, Springer, Berlin (2009).
3. W. F. Hall and S. N. Busenber, *J. Chem. Phys.* **51**, 137 (1969).
4. М. И. Шлиомис, *УФН* **112**, 427 (1974).
5. S. Odenbach, *Magnetoviscous Effects in Ferrofluids*, Lectures Notes in Phys., Springer, Berlin (2002).
6. L. Pop and S. Odenbach, *J. Phys.: Condens. Matter* **18**, S2785 (2006).
7. A. Yu. Zubarev, J. Fleisher, and S. Odenbach, *Physica A* **358**, 475 (2005).
8. A. Yu. Zubarev and L. Yu. Iskakova, *J. Phys.: Condens. Matter* **18**, S2771 (2006).
9. P. Ilg and S. Odenbach, in [2], p. 249.
10. P. I. C. Teixeira, J. M. Tavares, and M. M. Telo da Gama, *J. Phys.: Condens. Matter* **12**, R411 (2000).
11. M. F. Islam, K. H. Lin, D. Lacoste et al., *Phys. Rev. E* **67**, 021402 (2003).
12. C. Holm and J. J. Weis, *Cur. Opin. Colloid Interface Sci.* **10**, 133 (2005).
13. L. M. Pop, S. Odenbach, A. Wiedenmann et al., *J. Magn. Magn. Mater.* **289**, 303 (2005).
14. M. Klokkenburg, R. P. A. Dullens, W. K. Kegel et al., *Phys. Rev. Lett.* **96**, 037203 (2006).
15. S. Odenbach, T. Rylewicz, and H. Rath, *Phys. Fluids* **11**, 2901 (1999).
16. L. R. Fleischer, *Rheologische Eigenschaften Magnetischer Flüssigkeiten Unter-Schiedlicher Chemischer Zusammensetzung*, VDI, Verlag, Berlin (2004).

17. А. Ю. Зубарев, Л. Ю. Исакова, ЖЭТФ **80**, 857 (1995).
18. A. Yu. Zubarev and L. Yu. Iskakova, *Magnetohydrodynamics* **40**, 65 (2004).
19. A. Yu. Zubarev and L. Yu. Iskakova, *Phys. Rev. E* **61**, 5415 (2000).
20. L. Pop, *Investigation of the Microstructure of Ferrofluids Under the Influence of a Magnetic Field and Shear Flow*, VDI Verlag, Dresden (2006).
21. G. Bossis, C. Métyayer, and A. Zubarev, *Phys. Rev. E* **76**, 041401 (2007).
22. A. Yu. Zubarev and L. Yu. Iskakova, *Phys. Rev. E* **68**, 061203 (2003).
23. G. K. Batchelor, *J. Fluid Mech.* **83**, 97 (1977).
24. В. Н. Покровский, *Статистическая гидромеханика разбавленных суспензий*, Наука, Москва (1978).
25. P. Ilg M. Kröger, S. Hess, and A. Yu. Zubarev, *Phys. Rev. E* **67**, 061401 (2003).