

# НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВИХРЕЙ В ОТКРЫТЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ С ОБЪЕМНЫМ СТОКОМ ВЕЩЕСТВА И МЕХАНИЗМ РОЖДЕНИЯ ТОРНАДО И ТАЙФУНОВ

Э. А. Пашитский\*

*Институт физики Национальной академии наук Украины  
03028, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 25 октября 2009 г.

На основе общих представлений о нелинейной динамике вихрей в открытых термодинамически неравновесных системах с объемным или поверхностным стоком вещества рассмотрен механизм рождения крупномасштабных атмосферных вихрей (торнадо, тайфунов, циклонов) в процессе формирования мощных облачных систем благодаря интенсивной конденсации водяного пара во влажном воздухе, охлажденном ниже точки росы. Найдены простые частные решения уравнений Навье–Стокса, которые описывают как аксиально-симметричные, так и аксиально-несимметричные вихри с радиальными и вертикальными потоками и в условиях несжимаемости воздуха приводят к тождественному обращению в нуль кинематической вязкости во всем объеме, за исключением тонкого переходного слоя на границе области конденсации. Показано, что под действием нелинейной конвективной и локальной кориолисовой гидродинамических сил, которые создаются сходящимися радиальными потоками при ненулевой начальной завихренности воздуха за счет глобальной силы Кориолиса, обусловленной вращением Земли, происходит ускорение «твердотельного» вращения сердцевины воздушного вихря либо по экспоненциальному закону, либо по сценарию нелинейной «взрывной» неустойчивости. Благодаря наличию восходящих вертикальных потоков такой вихрь обладает ненулевой спиральностью. Данный механизм позволяет объяснить целый ряд наблюдаемых свойств и характерных особенностей структуры и эволюции торнадо и тайфунов. Проведены оценки максимальных кинетических энергий мощных атмосферных вихрей. Показано, что рост кинетической энергии вращения атмосферных вихрей при постоянном радиусе сердцевины вихря не противоречит законам сохранения энергии и момента импульса, поскольку в открытой системе сходящиеся радиальные потоки воздуха непрерывно поставляют необходимое количество кинетической вращательной энергии из окружающей глобально завихренной атмосферы.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные и теоретические исследования таких грозных и разрушительных явлений природы, как торнадо, смерчи, ураганы, тайфуны, проводятся на протяжении многих десятилетий. По этим проблемам накоплено колоссальное количество наблюдательных данных и опубликовано огромное число статей, обзоров и монографий (см., например, [1–12] и содержащиеся там ссылки). Однако до настоящего времени в этой области науки остается целый ряд во многом неясных и недостаточно изученных вопросов, в частности, вопрос о причинах и

механизмах зарождения и развития мощных атмосферных вихрей.

Одно из направлений теоретических и численных исследований этого вопроса, заложенное в работах [13–16], базируется на предположении о том, что крупномасштабные атмосферные вихри зарождаются на фоне развитой мелкомасштабной турбулентности атмосферы за счет механизма обратного турбулентного каскада [17–19], в отличие от стандартного прямого каскада турбулентных пульсаций в сторону коротковолнового края спектра [20–23].

Одновременно с этим проводятся исследования по распределению давления воздуха и скорости ветра в уже развитых ураганах и тропических циклонах, не затрагивающие проблему их возникновения

\*E-mail: pashitsk@iop.kiev.ua

(см., например, [24–31]).

Наиболее разработанной в настоящее время является предложенная в монографиях [3–6] и развитая в целом ряде работ (см., в частности, [32–36]) концепция того, что основным источником энергии циклонов, формирующихся над океанами в тропических широтах, является объемное выделение тепла в процессе конденсации водяного пара и глубокая тепловая конвекция воздуха, захватывающая по высоте всю тропосферу. Согласно этим представлениям, в результате подъема нагретого под действием объемного источника тепла разреженного воздуха в верхние слои атмосферы в силу условия непрерывности возникают сходящиеся горизонтальные потоки массы, которые сжимают воздух в области конденсации и под действием глобальной силы Кориолиса, обусловленной вращением Земли, приобретают конечную завихренность. При этом в силу закона сохранения момента количества движения происходит экспоненциальное ускорение азимутального вращения воздушного вихревого потока.

В настоящей работе предлагается один из возможных дополнительных (либо альтернативных, в зависимости от конкретных условий) механизмов зарождения и эволюции крупномасштабных атмосферных вихрей без предположений о сжимаемости влажного воздуха и о существовании в атмосфере сильной турбулентности, а также без непосредственного учета эффектов, связанных с выделением скрытой теплоты конденсации влаги, но при косвенном учете конвекции воздушных масс.

В основе этого механизма, частично рассматривавшегося ранее в работах [37–39], лежит общий принцип физической кинетики, согласно которому в открытых термодинамически неравновесных многокомпонентных системах (газовых смесях, растворах, газообразных и жидких взвесьях) при наличии объемного или поверхностного стока вещества, который может быть обусловлен фазовыми переходами и (или) химическими превращениями и уходом части вещества (отдельных его компонент) из системы, в условиях динамического и химического равновесия между открытой системой и окружающей средой возникают сходящиеся гидродинамические и (или) диффузионные потоки, стремящиеся поддерживать постоянными параметры системы и ее химический состав (см. монографию [40]). В данной работе в качестве примера такой неравновесной системы будет рассмотрена газовая смесь сухой воздух–водяной пар, в которой происходит фазовый переход первого рода пар–жидкость.

Как показывают многочисленные наземные и

космические наблюдения, мощные атмосферные вихри (торнадо, тайфуны, тропические циклоны) зарождаются одновременно с процессом формирования плотных облачных систем, когда в результате быстрого охлаждения теплого влажного воздуха до температуры ниже точки росы  $T_{dew}$  под действием холодного воздушного фронта происходит интенсивная конденсация содержащегося в воздухе водяного пара (влаги) с образованием взвешенных в воздухе водяных капель (тумана).

Поскольку в капельном состоянии на одну молекулу воды приходится в 700 раз меньший объем, чем в газообразной фазе, конденсация содержащегося в воздухе водяного пара может рассматриваться как объемный сток (т. е. исчезновение из объема) части вещества в газовой смеси воздух–пар. Это тем более справедливо, если образующиеся капли являются достаточно крупными и выпадают из области конденсации под действием силы тяжести в виде дождя (см., например, работы [41–43]). В то же время, мелкие капли удерживаются во взвешенном состоянии силами Стокса в восходящих воздушных потоках, образуя капельную фракцию облака.

С другой стороны, благодаря явлению конвекции в поле тяжести сухой легкий воздух, оставшийся после конденсации влаги и нагретый за счет выделения скрытой теплоты фазового перехода пар–жидкость, поднимается в более холодные верхние слои тропосферы, после чего, охладившись, опускается и поступает обратно в область конденсации, поддерживая тем самым необходимый уровень температуры в течение всего времени формирования облачной системы и развития атмосферного вихря.

В условиях динамического равновесия между формирующимся облаком и окружающей атмосферой практически полное исчезновение одной из компонент (пара) в области конденсации с температурой  $T < T_{dew}$  и уход нагретого сухого воздуха должны компенсироваться соответствующим притоком исходного вещества (влажного воздуха) из внешней области с  $T > T_{dew}$  при данном распределении атмосферного давления  $P$  для поддержания постоянных значений плотности и влажности воздуха внутри облака.

В данной работе в гидродинамическом приближении детально рассмотрен процесс зарождения и развития крупномасштабных воздушных вихрей внутри формирующегося облака и под его нижней кромкой при наличии сходящихся радиальных и восходящих вертикальных потоков. Найдены простые частные решения уравнений Навье–Стокса,

которые при условии несжимаемости воздуха описывают как аксиально-симметричные, так и аксиально-несимметричные вихри и приводят к тождественному обращению в нуль кинематической вязкости воздуха во всем объеме, за исключением тонкого переходного слоя на границе области конденсации. Показано, что под действием нелинейной конвективной и локальной кориолисовой гидродинамических сил, которые создаются сходящимися радиальными потоками при ненулевой начальной завихренности воздуха, происходит ускорение вращения сердцевин вихря, радиус которой определяется размером области конденсации и остается практически постоянным в течение всего времени формирования облачной системы и эволюции вихря. При этом возможны два разных режима ускорения вращения во времени: 1) экспоненциальный режим при постоянных скоростях стока и притока вещества и 2) режим так называемой нелинейной «взрывной» неустойчивости с неограниченным нарастанием скоростей потоков за конечный промежуток времени.

Рассмотрены процессы формирования заполненной конденсатом «воронки» торнадо на нижней кромке облака и образования области прозрачности в центре вихря за счет падения давления ниже точки испарения взвешенных в воздухе водяных капель при данном распределении температуры в атмосфере, а также эффект всасывания вещества при соприкосновении воронки торнадо с земной или водной поверхностью. Показана возможность образования вихревых структур с анизотропным распределением давления и конденсата (тумана), которые наблюдаются в центральных частях мощных тайфунов (ураганов) либо как система нескольких связанных вихрей торнадо (так называемых дьяволов).

Рассмотрена неустойчивость поверхностных возмущений на границе сердцевин вихря, обусловленная нарастающим во времени тангенциальным разрывом азимутальной скорости. Такая абсолютная (сверхэкспоненциальная) неустойчивость приводит к развитию сильной локальной турбулентности в пограничном слое с аномально большим коэффициентом турбулентной вязкости, на несколько порядков превышающим кинематическую вязкость воздуха. Проведены оценки максимальной кинетической энергии торнадо и тайфунов при скоростях вращения, сравнимых по порядку величины со скоростью звука, которые подтверждают огромную разрушительную силу этих мощных атмосферных вихрей. Показано, что рост кинетической энергии вращения атмосферных вихрей в процессе их ускорения при постоянном радиусе сердцевин вихря не про-

тиворечит законам сохранения энергии и момента импульса, поскольку сходящиеся радиальные потоки в открытых системах с объемным стоком вещества непрерывно поставляют необходимое количество вращательной энергии из окружающей глобально завихренной атмосферы.

## 2. АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ АТМОСФЕРНЫЙ ВИХРЬ

Пусть в некоторой области атмосферы, расположенной над нагретым океаном в тропических широтах, при стопроцентной влажности теплого воздуха в результате прихода холодного воздушного фронта (или опускания холодного воздуха из верхних слоев тропосферы) происходит быстрое убывание температуры ниже точки росы  $T_{dew}(P)$  при данном распределении атмосферного давления  $P$  и начинается процесс интенсивной конденсации влаги. Предположим, что область конденсации с температурой  $T < T_{dew}(P)$  имеет форму круглого диска радиусом  $R_0$  и высотой  $h$ , а ее нижняя кромка находится на высоте  $H$  над поверхностью Земли.

Как будет видно из дальнейшего, условие цилиндрической симметрии области конденсации является существенным для рассматриваемых явлений и налагает определенные ограничения на форму облачных систем, в которых могут зарождаться крупномасштабные атмосферные вихри. Предполагается также, что выделяющееся при конденсации пара тепло не приводит к существенному повышению температуры и не нарушает условия  $T < T_{dew}(P)$  внутри облака благодаря быстрому подъему и уходу нагретого сухого воздуха из облака.

Поддержание постоянной плотности и влажности воздуха в такой открытой неравновесной системе с объемным (за счет конденсации влаги) и поверхностным (за счет ухода теплого сухого воздуха) стоками вещества в условиях динамического равновесия между формирующимся облаком и окружающей атмосферой происходит благодаря восходящим вертикальным и сходящимся горизонтальным потокам влажного воздуха. Следует подчеркнуть, что именно такие воздушные потоки удерживают водяные капли во взвешенном состоянии в виде тумана в некотором замкнутом объеме за счет стоковых сил трения и тем самым определяют форму, плотность и размеры облака, которое в этом смысле может рассматриваться как самоорганизующаяся открытая система.

### 2.1. Баланс вещества в открытой системе с объемным стоком

Как было показано в работах [37–39], в гидродинамическом приближении баланс вещества в процессе конденсации влаги при условии несжимаемости воздуха может быть описан следующим эффективным неоднородным уравнением непрерывности внутри цилиндрически-симметричной области конденсации ( $r \leq R_0$ ,  $0 \leq z \leq h$ ):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{Q}{\rho}, \quad (1)$$

где  $v_r$  и  $v_z$  — радиальная и аксиальная гидродинамические скорости горизонтальных и вертикальных потоков,  $Q$  — скорость объемного стока вещества (пара) в процессе конденсации, что соответствует отрицательному знаку величины  $Q$ , а  $\rho$  — плотность влажного воздуха, которая поддерживается постоянной ( $\rho = \text{const}$ ) за счет притока вещества из окружающей атмосферы с  $T > T_{dew}$  и выноса избыточного вещества (ухода нагретого сухого воздуха). Во внешней области ( $r > R_0$ ,  $z < 0$ ,  $z > h$ ), где  $Q = 0$ , выполняется обычное уравнение непрерывности  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  для несжимаемой жидкости (газа).

В отсутствие турбулентности атмосферы координатные зависимости средних гидродинамических скоростей радиального  $v_r$  и аксиального  $v_z$  воздушных потоков, удовлетворяющие уравнению непрерывности (1), имеют следующий вид:

$$v_r(r) = \begin{cases} -\beta r, & r < R_0, \\ -\beta R_0^2/r, & r > R_0, \end{cases} \quad (2)$$

$$v_z(z, r) = \begin{cases} v_z(0) + \alpha z, & r < R_0, \\ 0, & r > R_0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ , что соответствует увеличению скорости  $v_z$  с ростом  $z$  и замедлению сходящегося радиального потока при  $r \rightarrow 0$  и при  $r \rightarrow \infty$ .

Следует иметь в виду, что кажущийся излом на радиальной зависимости скорости  $v_r(r)$  в точке  $r = R_0$ , который соответствует бесконечной второй производной по  $r$  (т. е. формально бесконечной кинематической вязкости), в данном случае отсутствует, поскольку вблизи боковой поверхности области конденсации при  $r = R_0$  существует некоторый переходный слой конечной толщины с непрерывным распределением скоростей и с конечной вязкостью из-за неравновесных критических флуктуаций в окрестности точки фазового перехода первого рода.

С другой стороны, тангенциальный разрыв (скачок) аксиальной скорости  $v_z(z, r)$  при  $r = R_0$  в выражении (3), как известно, неустойчив по отношению

к поверхностным возмущениям (см. работу [45]). В результате такой неустойчивости, которая при учете конечной кинематической вязкости несжимаемой жидкости носит название неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (см. [46]), на поверхности разрыва возникает достаточно тонкий турбулентный слой, состоящий из периодической цепочки квазистационарных вихрей (так называемые кошачьи глазки). Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что именно такой турбулентный слой толщиной  $2\delta \ll R_0$  на границе области конденсации играет роль переходного слоя с плавным и непрерывным распределением гидродинамических скоростей (см. ниже).

Заметим, что в формуле (3) учитывается только восходящий вертикальный поток, который вблизи нижней кромки облака (при  $z = 0$ ) преобладает над нисходящим потоком в силу быстрого убывания давления  $P$  и плотности  $\rho$  воздуха с высотой, а также за счет поднимающегося в верхние слои атмосферы нагретого сухого воздуха. Поскольку на поверхности Земли (при  $z = -H$ ) скорость восходящего потока должна быть равна нулю, скорость потока на нижней кромке облака при  $r < R_0$  равна  $v_z(0) = \alpha H$ .

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение непрерывности (1), с учетом наличия переходного турбулентного слоя получаем следующие соотношения между параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  (при  $Q < 0$ ):

$$2\beta = \begin{cases} \alpha + |Q|/\rho, & r \leq R_0 - \delta, \quad 0 \leq z \leq h, \\ \alpha, & r \geq R_0 + \delta, \quad z < 0, \quad z > h. \end{cases} \quad (4)$$

### 2.2. Поле скоростей в несжимаемой жидкости (газе), соответствующее нулевой кинематической вязкости

Для описания аксиально-симметричного вихревого движения воздуха как внутри, так и вне цилиндрической области конденсации, при условии  $\rho = \text{const}$  воспользуемся уравнениями Навье–Стокса в цилиндрических координатах [45], которые справедливы не только при условии  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , но и при условии  $\operatorname{div} \mathbf{v} = Q/\rho = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= \\ &= \nu \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}, \quad (7)$$

где  $v_\varphi$  — азимутальная гидродинамическая скорость,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости воздуха,  $g$  — ускорение силы тяжести, направленное вниз (против оси  $z$ ). Здесь для простоты предполагается, что скорости  $v_r$  и  $v_\varphi$  в областях  $r < R_0$  и  $r > R_0$  зависят только от  $r$  и  $t$ , а скорость  $v_z$  при  $r < R_0$  — только от  $z$  и  $t$ .

Радиальную зависимость скорости  $v_\varphi$  по аналогии с моделью стационарного вихря Рэнкина [47] в идеальной жидкости выберем в виде

$$v_\varphi(r) = \begin{cases} \omega r, & r < R_0 - \delta, \\ \omega R_0^2/r, & r > R_0 + \delta, \end{cases} \quad (8)$$

где параметр  $\omega$  имеет смысл угловой скорости «твердотельного» вращения сердцевинки вихря и в общем случае может зависеть от  $t$  (см. ниже). Как и ранее, предполагаем, что внутри приповерхностного переходного слоя в области  $(R_0 - \delta) \leq r \leq (R_0 + \delta)$  имеет место плавное непрерывное распределение скорости  $v_\varphi(r)$ , соответствующее конечной вязкости (см. Приложение).

Следует подчеркнуть, что, несмотря на простую пространственную структуру поля скоростей (2), (3) и (8), спиральность вихря (см. работу [16]) отлична от нуля благодаря ненулевой завихренности  $v_\varphi \neq 0$  и восходящему потоку  $v_z \neq 0$  в области  $r \leq R_0$  и  $-H \leq z \leq h$ :

$$\begin{aligned} S &\equiv \int \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, d^3r = \\ &= 2\pi \int_{-H}^h dz \int_0^{R_0} v_z(z) \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi(r)) \, dr = \\ &= 2\pi R_0^2 (H + h) \omega(t) \left[ v_z(0) - \frac{\alpha}{2} (H - h) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя соотношения (2), (3) и (8) в уравнения (5)–(7), легко убедиться в том, что в областях  $r \leq (R_0 - \delta)$  и  $r \geq (R_0 + \delta)$  члены в правых частях этих уравнений, описывающие кинематическую вязкость несжимаемой жидкости (газа), тождественно обращаются в нуль. Это означает, что именно такое пространственное распределение поля скоростей является наиболее долгоживущим вихревым состоянием для вязкой несжимаемой жидкости (газа) и соответствует минимальному росту энтропии благодаря слабой диссипации кинетической энергии, которая обусловлена конечной вязкостью внутри переходного приповерхностного слоя при  $r \approx R_0$ , а также отличными от нуля диагональными компонентами тензора вязких напряжений во всем объеме:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{kin}}{dt} &= -\frac{\pi\rho\nu}{\delta} R_0 v_\varphi^2(R_0) - \\ &- 4\pi\rho\nu \left[ \omega^2(0) + \frac{3}{2} \alpha^2 \right] R_0^2. \end{aligned} \quad (10)$$

В результате уравнения (5)–(7) с учетом (2), (3) и (8) в области  $r \leq (R_0 - \delta)$  сводятся к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка по  $t$  для зависящих в общем случае от  $t$  параметров  $\beta$ ,  $\alpha$  и  $\omega$ :

$$\frac{d\beta}{dt} - \beta^2(t) + \omega^2(t) = \frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (11)$$

$$\frac{d\omega}{dt} - 2\beta(t)\omega(t) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} + \alpha^2(t) = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g + \alpha v_z(0) \right]. \quad (13)$$

### 2.3. Экспоненциальный режим ускорения вращения сердцевинки вихря

Рассмотрим сначала вихревое движение воздуха в области  $r \leq (R_0 - \delta)$  и  $0 \leq z \leq h$  при постоянной скорости конденсации,  $|Q| = \text{const}$ , когда сходящийся радиальный и восходящий аксиальный потоки также постоянны во времени, т.е.  $\beta = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ , в соответствии с (1). В этом случае из уравнения (12) следует, что угловая скорость вращения сердцевинки вихря  $\omega(t)$  нарастает во времени по экспоненциальному закону

$$\omega(t) = \omega(0)e^{2\beta t}, \quad (14)$$

если отлична от нуля начальная завихренность воздуха  $\omega(0) \neq 0$  (например, за счет глобальной завихренности атмосферы под действием вращения Земли).

Как легко видеть из уравнения (6), экспоненциальное ускорение вращения вихря в данном случае обусловлено совместным действием двух гидродинамических сил — нелинейной конвективной  $v_r \partial v_\varphi / \partial r$  и локальной кориолисовой  $v_r v_\varphi / r$  (в расчете на единицу плотности). Эти силы создаются сходящимся радиальным потоком ( $v_r < 0$ ) при ненулевой завихренности воздуха ( $v_\varphi \neq 0$ ).

В то же время, внутри приповерхностного слоя ускорение вращения воздуха тормозится силами вязкого трения, тогда как во внешней области  $r \geq R_0 + \delta$ , согласно (2) и (8), конвективная и кориолисова силы взаимно сокращаются, так что уравнение (12) сводится к условию  $d\omega/dt = 0$ , что соответствует стационарному «дифференциальному»

вращению с постоянными по  $t$  значениями угловой  $\omega(0)$  и азимутальной  $v_\varphi = \omega(0)R_0^2/r$  скоростей.

Это означает, что по мере ускорения вращения сердцевина вихря на ее границе при  $r = (R_0 - \delta)$  возникает экспоненциально нарастающий во времени тангенциальный разрыв (скачок) азимутальной скорости. Как будет показано ниже, такой нарастающий скачок скорости  $v_\varphi$  приводит к абсолютной (сверхэкспоненциальной) неустойчивости поверхностных возмущений и к развитию сильной локальной турбулентности на границе сердцевина вихря (см. разд. 3, 5).

Если предположить, что ускорение вращения сердцевина вихря происходит настолько медленно, что в каждый момент времени в практически несжимаемом воздухе при скоростях движения, гораздо меньших скорости звука, успевает установиться гидростатическое равновесие (так называемый циклострофический режим), то из уравнений (11) и (13) следует, что в области  $r \leq R_0 - \delta$  распределение давления воздуха имеет вид

$$P_{r < R_0}(r, z, t) = P_0 + \frac{\rho}{2} [\omega^2(t) - \beta^2] r^2 - \rho z \left( \tilde{g} + \frac{1}{2} \alpha^2 z \right), \quad (15)$$

где  $P_0$  — давление на оси вихря (при  $r = 0$ ), а  $\tilde{g} = g + \alpha v_z(0)$ .

С другой стороны, подставляя в уравнение (5) выражения (2) и (8) для скоростей  $v_r$  и  $v_\varphi$  во внешней области  $r > R_0 + \delta$ , с учетом уравнения (7) при  $v_z = 0$  получаем

$$P_{r > R_0}(r, z, t) = P_\infty - \frac{\rho}{2} [\omega^2(0) + \beta^2] \frac{R_0^4}{r^2} - \rho g z, \quad (16)$$

где  $P_\infty$  — постоянное давление атмосферы на больших расстояниях ( $r \rightarrow \infty$ ). Внутри переходного слоя толщиной  $2\delta$  аксиальная скорость  $v_z$  зависит от  $r$ , убывая до нуля при  $r = R_0 + \delta$ , так что переменные  $r$  и  $z$  не разделяются и распределение давления  $P(r, z)$  не может быть получено в простом аналитическом виде. Однако совершенно очевидно, что это распределение является непрерывным внутри слоя (см. Приложение) и совпадает с (15) при  $r = R_0 - \delta$  и с (16) при  $r = R_0 + \delta$ .

В предельном случае  $\delta \rightarrow 0$ , приравнивая выражения (15) и (16) при  $r = R_0$  и  $z = 0$ , находим зависящее от  $t$  давление на оси вихря:

$$P_0(t) = P_\infty - \frac{\rho}{2} [\omega^2(t) + \omega^2(0)] R_0^2. \quad (17)$$

На рис. 1 показано распределение давления по  $r$  в разные моменты времени. Заметим, что излом на

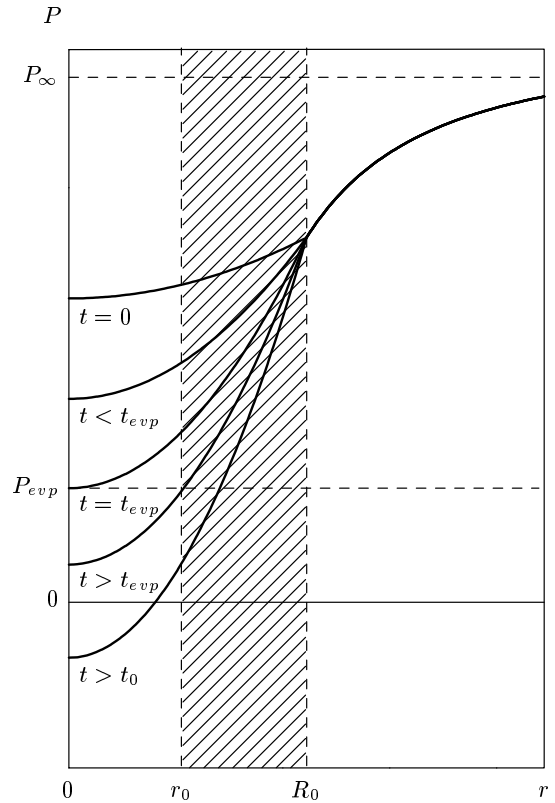


Рис. 1. Радиальное распределение давления внутри ( $r < R_0$ ) и вне ( $r > R_0$ ) сердцевина аксиально-симметричного вихря в разные моменты времени при  $z = 0$  и при  $\delta \rightarrow 0$ . При  $t > t_{evp}$ , когда  $P_0(t) < P_{evp}$ , за счет испарения водяных капель (тумана) в центре вихря образуется область прозрачности при  $r < r_0$ . При  $t > t_0$  давление на оси вихря становится отрицательным и происходит радиальный коллапс вихря

зависимости  $P(r)$  при  $z = 0$  так же, как и скачок давления при  $z \neq 0$ , размываются внутри переходного слоя толщиной  $2\delta \neq 0$ , обеспечивая непрерывность  $P(r, z)$  и его первых производных по  $r$  и по  $z$ .

Из выражения (17) следует, что давление в центре вихря  $P_0(t)$  убывает со временем по экспоненциальному закону, в соответствии с (14), так что  $P_0(t)$  в некоторый момент времени  $t_{evp}$ , который определяется выражением

$$t_{evp} = \frac{1}{4\beta} \ln \left[ \frac{2(P_\infty - P_{evp})}{\rho R_0^2 \omega^2(0)} - 1 \right] \quad (18)$$

становится равным критическому давлению  $P_{evp}(T)$ , при котором начинается испарение взвешенных в воздухе водяных капель (тумана) при данной температуре  $T$ . При этом предполагается, что поглощаемая скрытая теплота испарения не

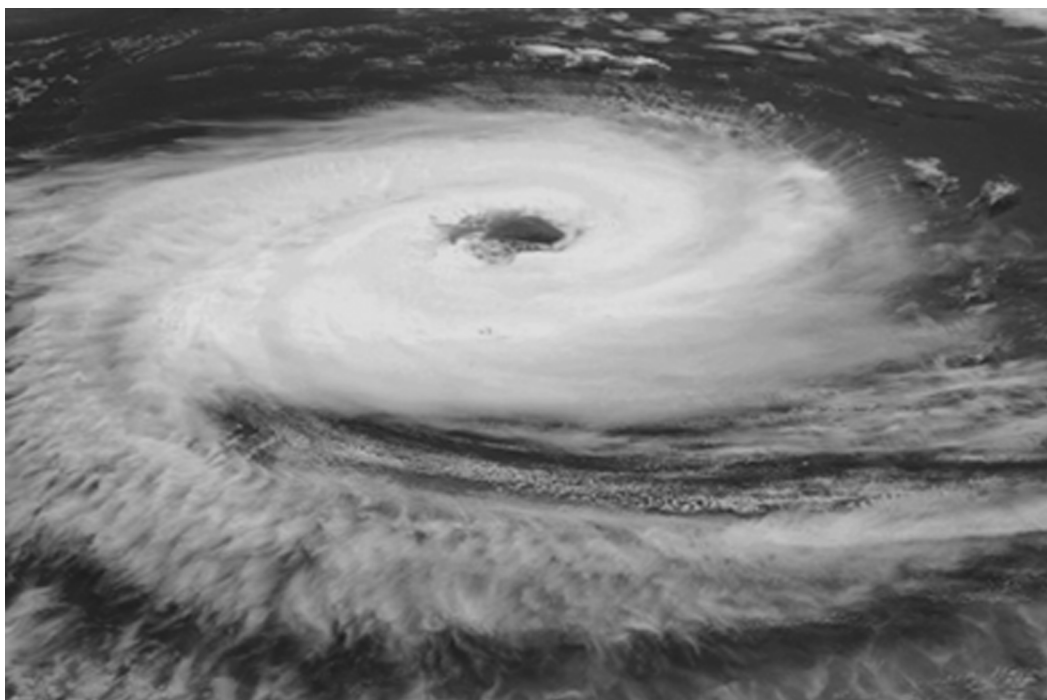


Рис. 2. Наблюдаемая из космоса область прозрачности в центре типичного тайфуна (так называемый глаз или око тайфуна)

нарушает условий  $T > T_{dew}(P)$  и  $P < P_{evp}(T)$ . В результате при  $t \geq t_{evp}$  в центре вихря возникает область прозрачного воздуха (см. рис. 1), которая наблюдается в центральной части тайфунов — так называемый глаз тайфуна или урагана (рис. 2), а также внутри вихрей торнадо, которые не достигли земной поверхности (см. ниже).

Испарение водяных капель сопровождается насыщением воздуха водяным паром, что соответствует появлению в центре вихря объемного источника газообразной фазы. При этом знак неоднородной части уравнения непрерывности (1) изменяется на противоположный, т. е.  $Q > 0$ , так что вместо соотношения (4), получаем следующее соотношение:  $2\beta = \alpha - Q/\rho$ . Кроме того, избыток влажного воздуха, охлаждаемого за счет поглощения тепла при испарении капель, должен приводить к замедлению восходящего потока (т. е. к изменению знака параметра  $\alpha$ ) и к появлению нисходящего потока холодного воздуха, который, как правило, наблюдается внутри глаза тайфуна (урагана).

В этом случае параметр  $\beta < 0$  и вместо уравнения (12) получаем уравнение

$$\frac{d\omega}{dt} + 2|\beta|\omega(t) = 0, \quad (19)$$

решение которого имеет вид (при  $t > t_{evp}$ )

$$\omega(t) = \omega(t_{evp}) \exp\{-2|\beta|(t - t_{evp})\}. \quad (20)$$

Это соответствует экспоненциальному затуханию вращения воздуха в центре сердцевины вихря, начиная с момента  $t_{evp}$ , и позволяет объяснить причину хорошо известного явления полного отсутствия ветра (штиля) при полной прозрачности воздуха (ясной погоде) внутри глаза тайфуна (урагана).

Заметим, что в момент времени  $t_0$ , который определяется соотношением типа (18), но без отрицательного члена  $P_{evp}$  под логарифмом, так что  $t_0 > t_{evp}$ , давление на оси вихря  $P_0(t)$  обращается в нуль, а при  $t > t_0$  становится отрицательным (см. рис. 1). Поскольку пространственно-ограниченная система с отрицательным давлением неустойчива, в этом случае, по-видимому, должно происходить самопроизвольное радиальное сжатие (коллапс) и разрушение вихря.

#### 2.4. Ускорение вращения вихря в режиме взрывной неустойчивости

Перейдем к рассмотрению гидродинамики атмосферного вихря вне области конденсаций  $-H < z < 0$ , где  $Q = 0$ , так что уравнение непрерывности

(1) при  $r < R_0 - \delta$  сводится к равенству  $2\beta = \alpha$ . В этой области, наряду с экспоненциальной неустойчивостью «твердотельного» вращения сердцевин вихря (14) при  $\beta = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ , возможен также сценарий нелинейной взрывной неустойчивости, когда угловая скорость  $\omega(t)$ , а также радиальная и аксиальная скорости, неограниченно возрастают за конечный промежуток времени.

В частности, если предположить, что  $\beta$  и  $\alpha$  зависят от  $t$ , то при условии  $\beta(t) = \omega(t)$  уравнение (12) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} - 2\omega^2(t) = 0. \quad (21)$$

Решение нелинейного уравнения (21) с учетом уравнения непрерывности (4) имеет следующий вид:

$$\omega(t) = \beta(t) = \frac{\alpha(t)}{2} = \frac{\omega(0)}{1 - 2\omega(0)t}, \quad (22)$$

так что при  $t \rightarrow t^* = 1/2\omega(0)$  функции  $\omega(t)$ ,  $\beta(t)$  и  $\alpha(t)$  формально стремятся к бесконечности. Разумеется, в некоторый момент времени, когда гидродинамические скорости приближаются по порядку величины к скорости звука, за счет включения эффектов сжимаемости и конечной объемной вязкости исходные уравнения (11)–(13) и их частное решение (22) становятся неприменимыми и должно происходить ограничение взрывного характера нарастания скоростей (см. ниже).

Как следует из уравнения (5) с учетом соотношений (2) и (8) при  $z = 0$ , в данном случае распределение давления внутри и вне сердцевин вихря равно

$$P_{r < R_0}(r, 0, t) = P_0(t) + \rho\beta^2(t)r^2, \quad (23)$$

$$P_{r > R_0}(r, 0, t) =$$

$$= P_\infty + \rho R_0^2 \beta^2(t) \left( \frac{R_0^2}{r^2} - 2 \ln \frac{R_{max}}{R_0} \right), \quad (24)$$

где  $R_{max}$  — максимальный радиус интегрирования, определяющийся размерами области глобальной завихренности атмосферы (см. ниже). В формулах (23) и (24) использовано соотношение  $d\beta/dt = 2\beta^2(t)$ , которое следует из соотношения (22).

Приравняв давления (23) и (24) в точке  $r = R_0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , находим давление на оси вихря:

$$P_0(t) = P_\infty - 2\rho R_0^2 \beta^2(t) \ln \frac{R_{max}}{R_0}. \quad (25)$$

Как видим, давление  $P_0(t)$  понижается со временем по мере нарастания  $\beta(t)$  согласно уравнению

(22) и при  $P_0(t) < P_{evp}$  в центре вихря возникает область прозрачности, а начиная с момента времени  $\tilde{t}_0$ , который определяется соотношением

$$(t^* - \tilde{t}_0) = \frac{R_0}{c_s} \sqrt{\frac{\gamma}{2} \ln \frac{R_{max}}{R_0}}, \quad (26)$$

где  $c_s = \sqrt{\gamma P_\infty / \rho}$  — скорость звука в воздухе, а  $\gamma$  — показатель адиабаты в уравнении состояния  $P = \rho^\gamma$ , давление  $P_0(t)$  становится отрицательным и происходит радиальный коллапс вихря.

Заметим, что возможен и другой вариант взрывной неустойчивости, когда  $\omega(t) = 2\beta(t)$ , так что решение уравнения (12) имеет вид (см. [37–39])

$$\omega(t) = 2\beta(t) = \alpha(t) = \frac{\omega(0)}{1 - \omega(0)t}, \quad (27)$$

однако при этом  $\omega(t) \rightarrow \infty$  в более поздний момент времени  $t \rightarrow 2t^* = 1/\omega(0)$ .

### 2.5. Формирование воронки торнадо на нижней кромке облака

Представляет интерес рассмотреть изменение формы изобары  $P = P_{evp}$  в зависимости от времени. Согласно формулам (15) и (17), координата  $z(r, t)$  данной изобары внутри сердцевин вихря ( $r \leq R_0$ ) при  $\beta = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$  определяется квадратным уравнением

$$z^2(r, t) + \frac{2\tilde{g}}{\alpha^2} z(r, t) + \frac{R_0^2}{\alpha^2} [\omega^2(t) + \omega^2(0)] - \frac{r^2}{\alpha^2} [\omega^2(t) - \beta^2] - \frac{2(P_\infty - P_{evp})}{\rho\alpha^2} = 0, \quad (28)$$

корни которого равны

$$z_\pm(r, t) = -\frac{\tilde{g}}{\alpha^2} \pm \left\{ \frac{\tilde{g}^2}{\alpha^4} - \frac{R_0^2}{\alpha^2} [\omega^2(t) + \omega^2(0)] + \frac{r^2}{\alpha^2} [\omega^2(t) - \beta^2] + \frac{2(P_\infty - P_{evp})}{\rho\alpha^2} \right\}^{1/2}. \quad (29)$$

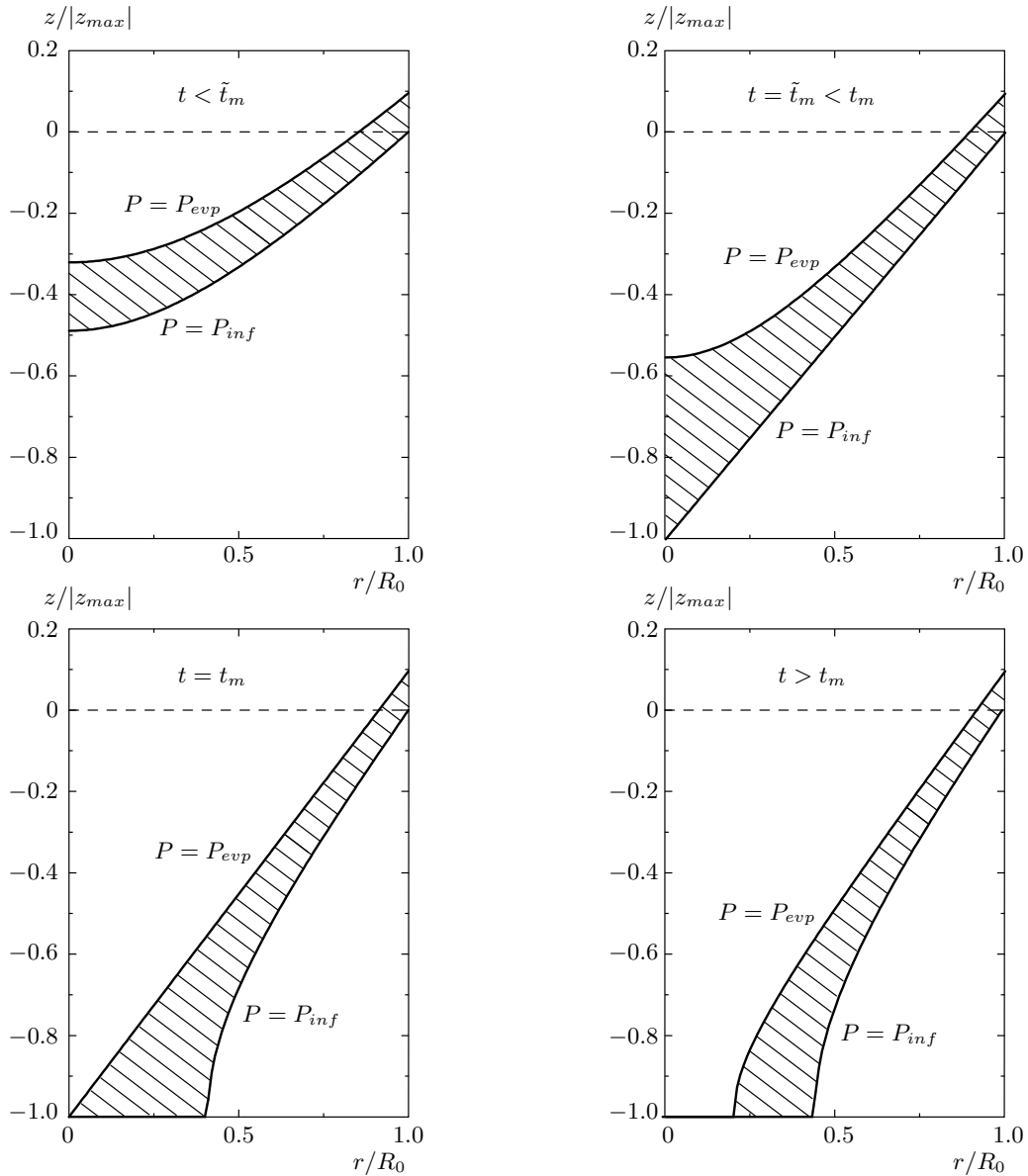
Во внешней области форма данной изобары согласно формуле (16) определяется соотношением

$$z(r) = \frac{1}{\rho g} \left\{ \frac{\rho}{2} [\omega^2(0) + \beta^2] \frac{R_0^4}{r^2} + (P_\infty - P_{evp}) \right\}. \quad (30)$$

На оси вихря при  $r = 0$  из уравнения (29) находим минимальное значение  $z_+$ :

$$z_+(0, t) = -\frac{\tilde{g}}{\alpha^2} + \left\{ \frac{\tilde{g}^2}{\alpha^4} - \frac{R_0^2}{\alpha^2} [\omega^2(t) + \omega^2(0)] + \frac{2(P_\infty - P_{evp})}{\rho\alpha^2} \right\}^{1/2}. \quad (31)$$





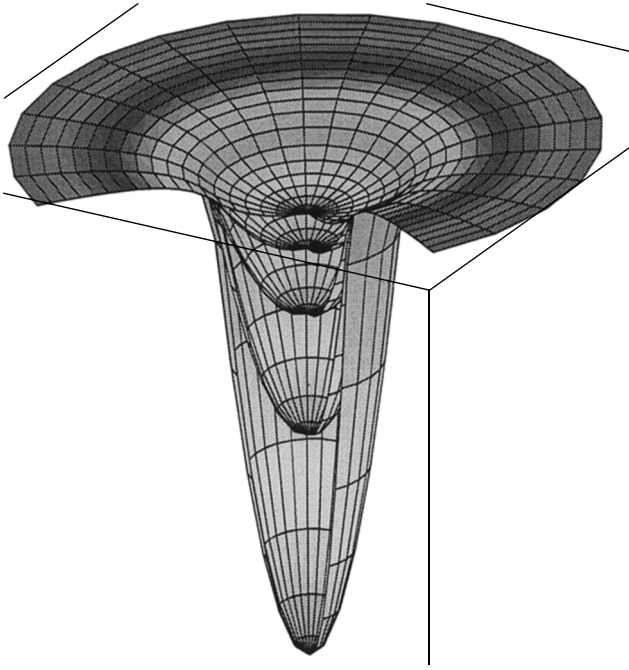
**Рис. 3.** Вертикальные сечения воронки торнадо, ограниченной снизу изобарой  $P = P_\infty$ , и области прозрачности, ограниченной снизу изобарой  $P = P_{evp}$ , в разные моменты времени (до достижения земной поверхности). В момент времени  $\tilde{t}_m$  воронка достигает максимальной длины  $|z_{max}| < H$ , при  $t = t_m > \tilde{t}_m$  происходит остановка изобар  $P = P_{evp}$  и  $P = P_\infty$ , а при  $t > t_m$  образуется сквозная область прозрачности. Заштрихованные области между изобарами  $P = P_{evp}$  и  $P = P_\infty$  заполнены конденсатом (туманом)

Отсюда следует, что по мере экспоненциального роста угловой скорости  $\omega(t)$ , согласно (14), изобара вытягивается в область  $z < 0$ , вплоть до того момента времени  $t_m$ , при котором выражение под радикалом в (31) обращается в нуль. Согласно (14), этот момент времени определяется выражениями

$$t_m = \frac{1}{4\beta} \ln \left[ \frac{\tilde{g}^2}{\alpha^2 R_0^2} + \frac{2(P_\infty - P_{evp})}{\rho R_0^2} - \omega^2(0) \right]. \quad (32)$$

При  $t_m$  координата точки минимума изобары  $z_+(0, t)$  достигает максимального по абсолютной величине отрицательного значения  $z_{max} = -\tilde{g}/\alpha^2$ .

В то же время, форма изобары  $P = P_\infty$ , которая ограничивает область конденсации снизу (при  $z = 0$  до возникновения воронки), определяется выражениями, аналогичными формулам (29)–(31), но без последнего слагаемого в фигурных скобках. От-



**Рис. 4.** Эволюция воронки торнадо во времени в трехмерном изображении. В разрезе показаны сечения изобары  $P = P_\infty$  через равные промежутки времени в последовательные моменты  $t_i < \tilde{t}_m$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ )

рицательный минимум этой изобары достигает значения  $z_{max}$  в момент времени  $\tilde{t}_m \leq t_m$ , причем  $\tilde{t}_m$  определяется выражением типа (32), но без слагаемого  $2(P_\infty - P_{evp})/\rho R_0^2$ .

На рис. 3 показаны вертикальные сечения изобар  $P = P_\infty$  и  $P = P_{evp}$  в области  $r < R_0 - \delta$  в разные моменты времени для корня квадратного уравнения  $z_+(r, t)$ . Как видим, на оси вихря при  $r = 0$  в момент времени  $\tilde{t}_m$  изобара  $P = P_\infty$  достигает максимального по абсолютной величине отрицательного значения  $z_{max}$ , а при  $t = t_m$  этого значения достигает изобара  $P = P_{evp}$ , так что при  $t > t_m$  на дне воронки торнадо открывается область прозрачности, тогда как вся область между изобарами заполнена конденсатом (туманом) и является непрозрачной (видимой).

На рис. 4 показана эволюция воронки торнадо во времени в трехмерном изображении. В разрезе показаны сечения изобары  $P = P_\infty$  через равные промежутки времени в последовательные моменты  $t_i < \tilde{t}_m$ , где  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Такая картина развития воронки торнадо наблюдается только в том случае, если высота нижней кромки облака  $H > \tilde{g}/\alpha^2$ . Поскольку при  $t > t_m$  ко-

ордината (31) становится комплексной, что соответствует неустойчивости изобары, дальнейшее удлинение воронки торнадо невозможно. Заметим, что в природе часто возникают торнадо, не достигающие поверхности суши или воды, и внутри таких вихрей, как правило, наблюдается область прозрачности.

Если же выполняется условие  $H \leq |z_{max}|$ , то в некоторый момент времени  $t \leq t_m$  происходит соприкосновение воронки торнадо с поверхностью Земли, сопровождающееся мощным эффектом всасывания пыли или водяных капель за счет пониженного давления в центре вихря.

В заключение данного раздела заметим, что в режиме взрывной неустойчивости (22) или (25), когда функции  $\beta(t)$ ,  $\omega(t)$  и  $\alpha(t)$  неограниченно нарастают во времени, образование стабильной воронки невозможно.

### 3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА СКОРОСТИ

Как отмечалось выше, на боковой границе области конденсации при  $r = R_0$ ,  $0 \leq z \leq h$ , а также на границе восходящего потока в области  $z < 0$ , возникают тангенциальные разрывы (скачки) азимутальной и аксиальной скоростей, которые являются неустойчивыми относительно возбуждения поверхностных волн [45].

Рассмотрим сначала скачок аксиальной скорости  $\Delta v_z$  при  $r = R_0$ , который, согласно (3), при  $\alpha = \text{const}$  является постоянным во времени, но изменяется в зависимости от  $z$ . Однако для коротковолновых поверхностных возмущений, когда выполняются сильные неравенства  $kH \gg 1$  и  $kR_0 \gg 1$  (где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число, а  $\lambda$  — длина волны возмущения), можно с хорошей точностью пренебречь как зависимостью  $\Delta v_z$  от  $z$ , так и кривизной боковой поверхности восходящего потока, и рассматривать границу  $r = R_0$  как плоскую поверхность  $xz$  с малым поперечным (вдоль оси  $x$ ) возмущением, экспоненциально затухающим при удалении от поверхности:

$$\zeta(x, z, t) = \zeta_0 e^{-|kx|} e^{i(kz - \omega t)}. \tag{33}$$

Здесь  $\zeta_0$  — начальное поверхностное возмущение, а  $\omega$  — частота колебаний, которая без учета вязкости для несжимаемой жидкости (газа) удовлетворяет следующему дисперсионному соотношению:

$$(\omega - k\Delta v_z)^2 + \omega^2 = 0. \tag{34}$$

Решение уравнения (34) имеет вид

$$\omega(k) = \frac{k}{2} \Delta v_z (1 \pm i) \quad (35)$$

и при любом знаке  $k$  соответствует неустойчивости, в результате которой поверхностное возмущение (33) экспоненциально нарастает во времени.

Однако в случае экспоненциального режима ускорения вращения сердцевин вихря скачок азимутальной скорости  $\Delta v_\varphi$  при  $r = R_0$  сам растет со временем по экспоненциальному закону и согласно (14) равен

$$\Delta v_\varphi(t) = V_0(e^{2\beta t} - 1), \quad V_0 = \omega(0)R_0, \quad (36)$$

тогда как в режиме взрывной неустойчивости (25) он растет по закону

$$\Delta v_\varphi(t) = V_0 \frac{2\omega(0)t}{1 - 2\omega(0)t}. \quad (37)$$

В этом случае увеличивается также скачок аксиальной скорости при  $z \neq 0$ :

$$\Delta v_z(t) = v_z(0) + \frac{\omega(0)z}{1 - \omega(0)t}. \quad (38)$$

Кроме того, существует нарастающий во времени скачок  $\Delta v_\varphi(r, t)$  на нижней кромке облака (при  $z = 0$ ) за счет разных азимутальных скоростей в области  $z > 0$ , где  $|Q| \neq 0$ , и в области  $z < 0$ , где  $|Q| = 0$ , который в экспоненциальном режиме равен

$$\Delta v_\varphi(r, t) = r\omega(0) \left[ e^{(\alpha+|Q|/\rho)t} - e^{\alpha t} \right]. \quad (39)$$

Если скачок скорости зависит от времени, то в выражении (34) необходимо заменить частоту колебаний  $\omega$  на оператор  $i\partial/\partial t$ . В результате для амплитуды поверхностного возмущения  $\zeta_k(t)$  получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 \zeta_k}{dt^2} + ikV(t) \frac{d\zeta_k}{dt} - \left[ \frac{k^2 V^2(t)}{2} - ik \frac{dV}{dt} \right] \zeta_k(t) = 0, \quad (40)$$

где  $V(t)$  соответствует  $\Delta v_\varphi(t)$  или  $\Delta v_z(t)$ . С помощью подстановки

$$\zeta_k(t) = w_k(t) \exp \left\{ -\frac{ik}{2} \int_0^t V(t') dt' \right\} \quad (41)$$

из уравнения (40) можно исключить первую производную по  $t$ . Тогда для вещественной и мнимой частей комплексной функции  $w_k(t) = w'_k(t) + iw''_k(t)$  получаем систему взаимосвязанных уравнений:

$$\frac{d^2 w'_k}{dt^2} - \frac{k^2 V^2(t)}{4} w'_k(t) - \frac{k}{2} \frac{dV}{dt} w''_k(t) = 0, \quad (42)$$

$$\frac{d^2 w''_k}{dt^2} - \frac{k^2 V^2(t)}{4} w''_k(t) + \frac{k}{2} \frac{dV}{dt} w'_k(t) = 0. \quad (43)$$

Предполагая, что для двух одинаковых волн, движущихся навстречу друг другу, выполняется условие симметрии

$$w'_k(t) = w''_{-k}(t) \equiv u_k(t), \quad (44)$$

для вещественной функции  $u_k(t)$  получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} - \left[ \frac{k^2 V^2(t)}{4} + \frac{k}{2} \frac{dV}{dt} \right] u_k(t) = 0. \quad (45)$$

С помощью замены переменных

$$y(t) = \frac{d}{dt} (\ln u_k(t)) \quad (46)$$

линейное уравнение второго порядка (45) приводится к нелинейному уравнению первого порядка (типа уравнения Риккати):

$$\frac{dy}{dt} + y^2(t) = \frac{k^2 V^2(t)}{4} + \frac{k}{2} \frac{dV}{dt}. \quad (47)$$

Легко видеть, что частное решение уравнения (47) имеет вид

$$y(t) = \frac{k}{2} V(t), \quad (48)$$

что с учетом (46) дает

$$u_k(t) = u_k(0) \exp \left\{ \frac{k}{2} \int_0^t V(t') dt' \right\}. \quad (49)$$

В результате с учетом формул (36), (41), (44) и (49) для неустойчивых поверхностных возмущений с  $k > 0$  получаем следующее выражение для модуля комплексной амплитуды колебаний:

$$|\zeta_k(t)| = \zeta_k(0) \exp \left\{ \frac{kV_0}{4\beta} (e^{2\beta t} - 2\beta t) \right\}. \quad (50)$$

Отсюда следует, что данная неустойчивость является абсолютной и приводит к катастрофически быстрому нарастанию амплитуды малых поверхностных возмущений по закону «экспонента в экспоненте». Заметим, что начальное поверхностное возмущение  $\zeta_k(0)$ , соответствующее поперечному смещению поверхности тангенциального разрыва, не может быть меньше, чем полуширина  $\delta$  переходного слоя, а волновое число  $k$  не может быть больше, чем обратная полная ширина слоя  $1/2\delta$ .

В случае взрывной неустойчивости амплитуда поверхностных возмущений, согласно формулам (37) и (49), увеличивается со временем по закону

$$|\zeta_k(t)| \sim |1 - 2\omega(0)t|^{-\kappa}, \quad \kappa = \frac{kV_0}{4\omega(0)}. \quad (51)$$

Для наиболее неустойчивых возмущений с  $k_{max} \approx 1/2\delta$  получаем  $\kappa_{max} \approx R_0/8\delta \gg 1$ .

Таким образом, как в экспоненциальном, так и во взрывном режиме данная неустойчивость должна приводить к быстрому развитию турбулентности в приповерхностном слое. При этом ограничение амплитуды турбулентных пульсаций происходит за счет включения эффектов сжимаемости и конечной объемной вязкости воздуха, когда скорость пульсаций становится порядка скорости звука (см. разд. 5).

#### 4. АКСИАЛЬНО-НЕСИММЕТРИЧНЫЕ АТМОСФЕРНЫЕ ВИХРИ

Рассмотрим возможность существования в атмосфере аксиально-несимметричных вихрей в условиях несжимаемости воздуха и при наличии объемного стока вещества за счет конденсации водяного пара внутри области  $r \leq R_0$ . Будем исходить из следующей системы гидродинамических уравнений Навье–Стокса [8] для зависящих от азимутального угла  $\varphi$  скоростей  $v_r$  и  $v_\varphi$  и давления  $P$ :

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_r^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right], \quad (52)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right]. \quad (53)$$

Эти уравнения должны быть дополнены неоднородным уравнением непрерывности (ср. с (1)):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -|Q/\rho|, \quad (54)$$

где аксиальная скорость  $v_z$  для простоты предполагается не зависящей от  $r$  и  $\varphi$ , так что для нее остаются справедливыми уравнение (7) и координатная зависимость (3).

Отметим, что члены, описывающие кинематическую вязкость в правых частях уравнений (52)

и (53), тождественно обращаются в нуль при следующем выборе координатных зависимостей аксиально-несимметричных радиальной и азимутальной скоростей (при  $r \leq R_0$  и  $m > 0$ ):

$$v_r(r, \varphi) = -\beta r - \beta_m r^{m-1} \cos m\varphi, \quad (55)$$

$$v_\varphi(r, \varphi) = \omega r + \omega_m r^{m-1} \sin m\varphi. \quad (56)$$

Подставляя формулы (55) и (56) в уравнение (54), с учетом (3) получаем

$$2\beta - \alpha - m(\beta_m - \omega_m)r^{m-2} \cos m\varphi = |Q|/\rho. \quad (57)$$

Отсюда для изотропной части следует условие (4), а для анизотропной по  $\varphi$  и зависящей от  $r$  части получаем условие

$$\beta_m - \omega_m = 0. \quad (58)$$

Если переписать соотношения (55) и (56) в несколько ином виде:

$$v_r(r, \varphi, t) = -r\beta(t) \left[ 1 + \varepsilon_m(t) \left( \frac{r}{R_0} \right)^{m-2} \cos m\varphi \right], \quad (59)$$

$$v_\varphi(r, \varphi, t) = r\omega(t) \left[ 1 + \delta_m(t) \left( \frac{r}{R_0} \right)^{m-2} \sin m\varphi \right], \quad (60)$$

где  $\varepsilon_m(t)$  и  $\delta_m(t)$  — безразмерные функции времени, то условие (58) принимает вид

$$\beta(t)\varepsilon_m(t) = \omega(t)\delta_m(t). \quad (61)$$

Согласно уравнению (61), две неизвестные функции  $\varepsilon_m(t)$  и  $\delta_m(t)$  можно определить через  $\beta(t)$ ,  $\omega(t)$  и один неизвестный параметр  $\gamma_m$  размерности частоты:

$$\varepsilon_m(t) = \omega(t)/\gamma_m, \quad \delta_m(t) = \beta(t)/\gamma_m. \quad (62)$$

Заметим, что для определения параметра  $\gamma_m$  необходимо некоторое дополнительное условие (см. ниже).

Подставляя выражения (59) и (60) с учетом соотношений (62) в уравнения (52) и (53), получаем следующие выражения для радиального и азимутального градиентов давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} = & -\rho r \left\{ -\frac{d\beta}{dt} + (\beta^2 - \omega^2) + \right. \\ & + (m-1) \frac{\beta^2 \omega^2}{\gamma_m^2} \left( \frac{r}{R_0} \right)^{2(m-2)} - \frac{1}{m\gamma_m} \times \\ & \times \left[ \frac{d}{dt}(\beta\omega) - m\beta^2\omega \right] \left( \frac{r}{R_0} \right)^{m-2} \cos m\varphi + \\ & \left. + (m-2) \frac{\beta\omega^2}{\gamma_m} \left( \frac{r}{R_0} \right)^{m-2} \sin m\varphi \right\}, \quad (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = & -\rho r^2 \left\{ \left( \frac{d\omega}{dt} - 2\beta\omega \right) + \right. \\ & + \frac{1}{\gamma_m} \left[ \frac{d}{dt}(\beta\omega) - m\beta^2\omega \right] \left( \frac{r}{R_0} \right)^{m-2} \sin m\varphi + \\ & \left. + (m-2) \frac{\beta\omega^2}{\gamma_m} \left( \frac{r}{R_0} \right)^{m-2} \cos m\varphi \right\}. \quad (64) \end{aligned}$$

Поскольку давление  $P$  может быть только циклической (периодической) функцией угла  $\varphi$ , изотропный член в формуле (64) следует положить равным нулю, что приводит к исследованному в разд. 2 уравнению (12) и к соответствующим режимам ускорения твердотельного вращения сердцевин вихря.

Легко видеть, что частные производные (63) и (64) удовлетворяют условию самосогласования

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi \partial r} = \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \varphi}, \quad (65)$$

так что путем интегрирования (63) по  $r$  и (64) по  $\varphi$  можно восстановить распределение давления в аксиально-несимметричном вихре (при  $z = 0$ ):

$$\begin{aligned} P_m(r, \varphi, t) = & P_0(t) + \rho \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ \frac{d\beta}{dt} + (\omega^2 - \beta^2) \right] - \right. \\ & - \frac{\beta^2 \omega^2 R_0^2}{2\gamma_m^2} \left( \frac{r}{R_0} \right)^{2(m-1)} + \frac{R_0^2}{m\gamma_m} \left[ \frac{d}{dt}(\beta\omega) - m\beta^2\omega \right] \times \\ & \times \left( \frac{r}{R_0} \right)^m \cos m\varphi - \frac{m-2}{m} \frac{\beta\omega^2 R_0^2}{\gamma_m} \times \\ & \left. \times \left( \frac{r}{R_0} \right)^m \sin m\varphi \right\}. \quad (66) \end{aligned}$$

Заметим, что во внешней области  $r > R_0$  обращение в нуль кинематической вязкости в уравнениях (52) и (53) достигается путем подстановки выражений (55) и (56) с  $m < 0$ , однако в этом случае нельзя удовлетворить условию самосогласования (65) для равновесных градиентов давления  $\partial P/\partial r$  и  $\partial P/\partial \varphi$ . Это означает, что в этой области в силу нарушения

условий гидростатического равновесия и при условии несжимаемости должно происходить быстрое перераспределение давления, приводящее к изотропизации  $P(r)$ .

Распределение давления (66) при  $m = 1$  соответствует некоторому смещению почти изотропного вихря, например, под действием бокового ветра.

В случае  $m = 2$  единственный анизотропный член в формуле (66), пропорциональный  $\cos 2\varphi$ , отличен от нуля только при условии  $d\beta/dt \neq 0$ . Поэтому для экспоненциального режима ускорения вращения (при  $\beta = \text{const}$ ) аксиально-несимметричный вихрь может существовать только для значений азимутального числа  $m \geq 3$ .

В частности, для  $m = 4$  из формулы (66) при  $\beta = \text{const}$  следует выражение

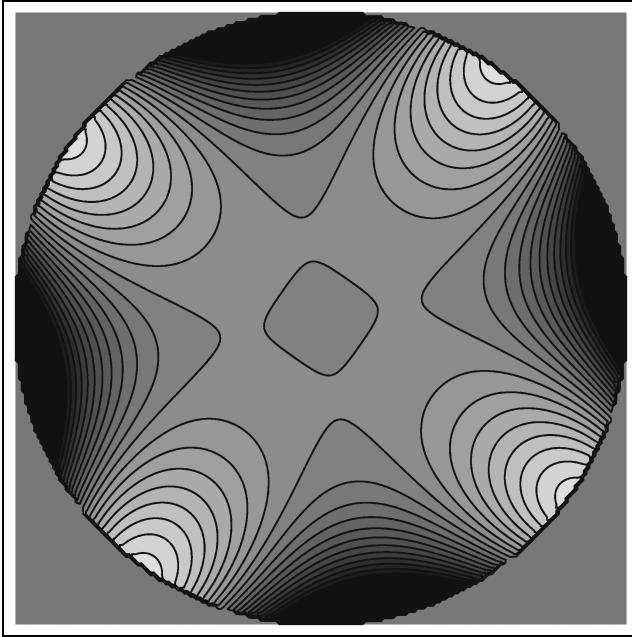
$$\begin{aligned} P_4(r, \varphi, t) = & P_0(t) + \rho \left\{ \frac{r^2}{2} [\omega^2(t) - \beta^2] - \right. \\ & - \frac{\beta^2 \omega^2(t) R_0^2}{\gamma_4^2} \left( \frac{r}{R_0} \right)^4 \left[ \frac{\gamma_4}{\beta} \sin 4\varphi + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma_4}{\omega(t)} \cos 4\varphi + \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \right\}. \quad (67) \end{aligned}$$

На рис. 5 показано распределение давления (67) в поперечном сечении аксиально-несимметричного вихря при  $m = 4$ . Такое анизотропное распределение давления  $P_4(r, \varphi, t)$  в сердцевине вихря с четырьмя эквивалентными минимумами, в которых при условии  $P_{min} < P_{evp}$  возникают области прозрачности, качественно согласуется с наблюдением из космоса мощного тайфуна с анизотропным распределением конденсата (тумана) в центральной области в виде колеса с четырьмя спицами и четырьмя отверстиями (см. рис. 6).

Фактически здесь возникает несколько взаимосвязанных вихрей, которые наблюдаются также и в случае торнадо в виде так называемых пляшущих дьяволов.

## 5. РАЗВИТИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО РЕЖИМА НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ КОНДЕНСАЦИИ И ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНЫХ ЭНЕРГИЙ ТОРНАДО И ТАЙФУНОВ

Согласно результатам разд. 3, абсолютная (сверхэкспоненциальная) неустойчивость поверхностных возмущений из-за нарастающих во времени скачков азимутальной скорости на боковой границе области конденсации (36) или (37) при  $r = R_0$  и  $0 \leq z \leq h$  и



**Рис. 5.** Анизотропное распределение давления в поперечном сечении аксиально-несимметричного вихря с  $m = 4$  при экспоненциальном режиме ускорения сердцевин вихря, когда  $\beta = \text{const}$ , в соответствии с выражением (67) в некоторый момент времени. Светлые области соответствуют максимуму, а затемненные области — минимуму давления. Если минимальное давление ниже  $P_{evp}$ , то из-за испарения конденсата должно происходить образование четырех областей прозрачности

на нижней кромке облака (39) при  $z = 0$  и  $r \leq R_0$ , а также аксиальной скорости в режиме взрывной неустойчивости (38) при  $r = R_0$ , должна приводить к развитию сильной локальной турбулентности на этих границах с некоторым характерным масштабом турбулентных пульсаций  $l^*$  (см. ниже).

Ограничение амплитуды нарастающих возмущений (50) или (51) в данном случае происходит, скорее всего, не из-за нелинейных эффектов, а в результате быстрого достижения скоростей турбулентных пульсаций, сравнимых со скоростью звука в воздухе  $c_s \approx 330$  м/с, когда начинает проявляться сжимаемость воздуха и включается полная объемная вязкость (см. [45, 47]).

Соответствующее время насыщения амплитуды  $t_s$  можно оценить, дифференцируя выражение (50) по  $t$  и предполагая, что  $t_s \ll 1/2\beta$ :

$$t_s \approx \frac{c_s}{2\beta\zeta_k(0)k^*V_0} \exp\left\{-\frac{k^*V_0}{2\beta}\right\}, \quad (68)$$

где  $k^*$  — эффективное волновое число, связанное с некоторым характерным масштабом турбулентности соотношением  $k^* \approx 1/l^*$  (см. ниже).

### 5.1. Турбулентная вязкость в приповерхностном слое на границе сердцевин вихря

Из соображений размерности (см., например, [16]) можно оценить связанный с  $l^*$  эффективный коэффициент турбулентной вязкости  $\nu^* \approx c_s l^*/3$ , который при скоростях турбулентных пульсаций порядка скорости звука  $c_s$  может существенно превышать кинематическую вязкость воздуха  $\nu$ .

Возникновение аномальной вязкости в приповерхностном слое при  $r \approx R_0$  за счет локальной турбулентности должно приводить к увлечению почти неподвижного воздуха во внешней области  $r > R_0$ . Для учета этого эффекта будем искать профиль азимутальной скорости увлекаемого воздуха в виде

$$v_\varphi(r, t) = \Omega(r, t)R_0^2/r, \quad (69)$$

где  $\Omega(r, t) = \Omega_0(r)e^{2\beta t}$ , так как в силу граничного условия  $\Omega(R_0, t) = \omega(t) = \omega(0)e^{2\beta t}$ .

Подставляя (69) в уравнение (6), с учетом (2) при  $r > R_0$  и с заменой  $\nu$  на  $\nu^*$  получаем следующее уравнение для неизвестной функции  $\Omega_0(r)$ :

$$\frac{d^2\Omega_0}{dr^2} + \left(\frac{\beta R_0^2}{\nu^*} - 1\right) \frac{1}{r} \frac{d\Omega_0}{dr} - \frac{2\beta}{\nu^*} \Omega_0(r) = 0. \quad (70)$$

Вводя эффективную длину  $l^* = \sqrt{\nu^*/2\beta}$  и безразмерный параметр  $\sigma = (R_0/8l^*)^2 - 1$ , получаем следующее решение уравнения (70):

$$\Omega_0(r) = CK_\sigma \frac{r}{l^*} \left(\frac{l^*}{r}\right)^\sigma, \quad (71)$$

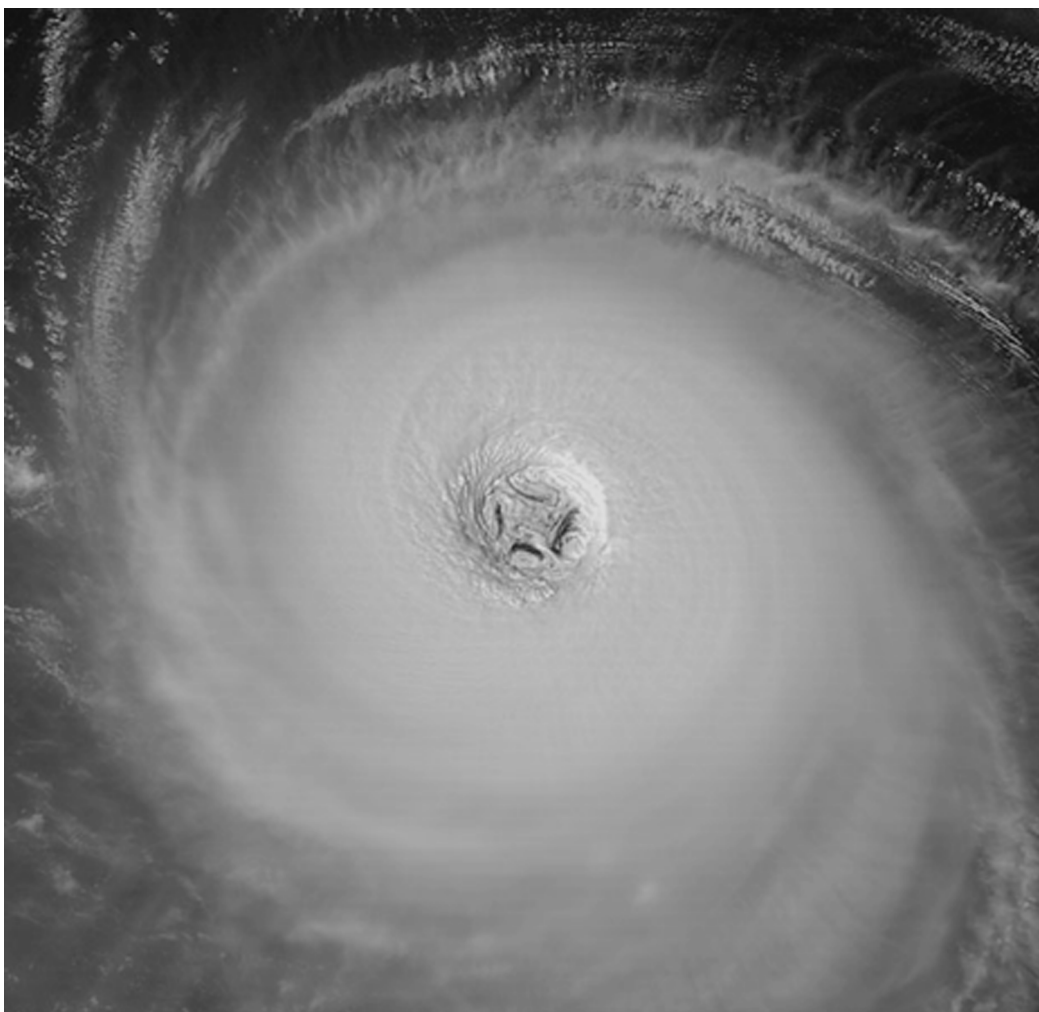
где  $C$  — константа интегрирования, а  $K_\sigma(x)$  — функция Макдональда, которая является четной по индексу,  $K_{-\sigma}(x) = K_\sigma(x)$ .

В результате для азимутальной скорости увлекаемого воздуха в области  $r > R_0$  с учетом указанного выше граничного условия получаем выражение

$$v_\varphi(r, t) = V_0 e^{2\beta t} \left(\frac{R}{r}\right)^\sigma \frac{K_\sigma(r/l^*)}{K_\sigma(R_0/l^*)}. \quad (72)$$

На больших расстояниях  $r \gg l^*$  отсюда следует экспоненциальное убывание  $v_\varphi(r, t)$  с ростом  $r$ :

$$v_\varphi \sim \left(\frac{R}{r}\right)^\sigma \sqrt{\frac{l^*}{r}} e^{-r/l^*}, \quad (73)$$



**Рис. 6.** Наблюдаемая из космоса анизотропная структура распределения конденсата (тумана) типа колеса с четырьмя спицами и четырьмя окнами в центре мощного тайфуна, обусловленная соответствующим распределением давления и конденсата в аксиально-несимметричном вихре с четырьмя минимумами и, соответственно, с четырьмя областями прозрачности, если  $P_{min} < P_{evp}$  (см. рис. 5)

так что  $l^*$  можно рассматривать как характерную толщину приповерхностного турбулентного слоя.

С другой стороны, максимальная амплитуда турбулентных пульсаций при условии  $2\beta t_s \ll 1$  может быть определена согласно (50) как

$$|\zeta|_{max} \approx \zeta_k(0) \exp \left\{ \frac{k^* V_0}{4\beta} \right\}. \tag{74}$$

Учитывая, что в режиме сильной турбулентности ширина приповерхностного слоя на границе сердцевины вихря определяется максимальной амплитудой турбулентных пульсаций, и приравнивая между собой по порядку величины  $|\zeta|_{max}$  и  $l^*$ , получаем трансцендентное уравнение для оценки  $l^*$ :

$$l^* \approx \zeta_k(0) \exp \left\{ \frac{V_0}{4\beta l^*} \right\}. \tag{75}$$

С логарифмической точностью решение уравнения (75) имеет вид

$$l^* \approx \frac{V_0}{4\beta \ln(V_0/4\beta\zeta_k(0))}, \tag{76}$$

где величина начального поверхностного возмущения  $\zeta_k(0)$  по порядку величины равна полуширине исходного переходного слоя  $\delta$ .

Предполагая, что характерные начальные скорости ветра в глобально завихренной атмосфере равны  $v_{r0} \approx v_{\phi 0} \approx (1-10)$  м/с на границе области конденсации (при  $r \approx R_0 = 1$  км), согласно формулам (2)

и (8), получаем оценку  $\beta \approx \omega(0) \approx (10^{-3}-10^{-2}) \text{ с}^{-1}$ . Учитывая, что в этом случае  $V_0 \approx \beta R_0$ , и полагая  $\zeta_k(0) \approx \delta \approx 1 \text{ м}$ , из формулы (76) при  $R_0 \approx 1 \text{ км}$  находим величину  $l^* \approx 50 \text{ м}$ . В результате получаем следующую оценку для коэффициента турбулентной вязкости  $\nu^* \approx c_s l^*/3 \approx 5 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}$ , которая согласуется с аналогичной оценкой в работе [16] и на восемь с половиной порядков превышает обычную кинематическую вязкость воздуха  $\nu \approx 0.15 \text{ см}^2/\text{с}$ . Следует заметить, что возможность аномально большого значения коэффициента турбулентной вязкости отмечалась ранее в работе [48] в связи с большой наблюдаемой устойчивостью («прочностью» и «эластичностью») внешней оболочки торнадо. В то же время, такая оболочка является практически полностью прозрачной для радиальных потоков воздуха, поскольку коэффициент турбулентной диффузии аномально велик и по порядку величины сравним с коэффициентом турбулентной вязкости.

С другой стороны, оценивая параметр  $\alpha = v_{z0}/H \approx (10^{-3}-10^{-2}) \text{ с}^{-1}$  при  $v_{z0} \approx (1-10) \text{ м/с}$  и  $H \approx 1 \text{ км}$ , согласно соотношению (4) получаем оценку скорости стока вещества, т. е. скорости конденсации влаги в единице объема в единицу времени  $|Q| = \rho(2\beta - \alpha) \approx 1.3(10^{-3}-10^{-2}) \text{ кг/м}^3 \cdot \text{с}$ .

Оценка времени насыщения амплитуды (74) при скоростях турбулентных пульсаций порядка  $c_s$  для приведенных выше параметров при  $k^* \approx 1/l^*$  приводит к значениям безразмерной величины  $2\beta t_s \approx 7.5(10^{-4}-10^{-3})$ , так что условие  $2\beta t_s \ll 1$  выполняется с большим запасом.

В то же время азимутальная скорость вращения сердцевин вихря при  $r \approx R_0$  в случае экспоненциального режима ускорения (14) может достигать максимального (в условиях несжимаемости воздуха) значения  $v_\varphi^{max} \approx 0.3c_s$  за время

$$t_{max} = \frac{1}{2\beta} \ln(v_\varphi^{max}/V_0) \approx (1.2 \cdot 10^2 - 2.3 \cdot 10^3) \text{ с}. \quad (77)$$

При этом достигается максимальная угловая скорость  $\omega_{max} \approx 0.3c_s/R_0 \approx 0.1 \text{ с}^{-1}$ , при которой давление на оси вихря, согласно уравнению (17), понижается до значения  $0.3P_\infty$  и может быть ниже давления испарения водяных капель  $P_{evp}(T)$ , если выполняется условие  $t_{max} > t_{evp}$  (см. (18)).

В последующие моменты времени,  $t > t_{max}$ , торнадо постепенно затухает за счет потери кинетической энергии на преодоление объемной вязкости воздуха в условиях конечной сжимаемости и на генерацию мощных звуковых колебаний (рев торнадо) сверхзвуковыми турбулентными пульсациями, а при условии  $t > t_0 = \ln[2P_\infty/\rho R_0^2 \omega^2(0)]/4\beta \approx$

$\approx (2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^3) \text{ с}$  за счет отрицательного давления в центре сердцевин вихря происходит коллапс и разрушение вихря. Полученное, согласно уравнению (77), максимальное время  $t_{max} \approx 40 \text{ мин}$  и наибольшее время коллапса  $t_0 \approx 50 \text{ мин}$  по порядку величины совпадают с типичными временами развития мощных торнадо.

Соответствующие оценки для тайфуна (урагана) с радиусом области конденсации порядка  $R_0 \approx 100 \text{ км}$  и с исходными параметрами  $\omega(0) \approx \beta \approx (10^{-5}-10^{-4}) \text{ с}^{-1}$  при тех же начальных скоростях ветра  $V_0 \approx (1-10) \text{ м/с}$  дают следующие значения параметров турбулентности:  $l^* \approx 5 \text{ км}$ ,  $\nu^* \approx 5 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$  и  $t_{max} \approx (2 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^5) \text{ с}$ . Максимальная оценка времени развития тайфуна  $t_{max} \approx 3$  суток согласуется с реальными временами жизни мощных тайфунов и ураганов. Таким образом, разница между тайфуном и торнадо обусловлена только масштабным фактором — более протяженными размерами области и, соответственно, меньшей величиной скорости конденсации влаги при одинаковой степени глобальной завихренности атмосферы.

## 5.2. Оценка энергий торнадо и тайфунов

Приведем численные оценки значений кинетической энергии и момента импульса мощных атмосферных вихрей (торнадо и тайфунов) при максимально допустимых условием несжимаемости скоростях вращения воздуха, сравнимых со скоростью звука.

Максимальные кинетическая энергия и момент импульса сердцевин вихря в расчете на единицу длины при  $v_\varphi^{max}(R_0) \approx 0.3c_s$  и  $R_0 \approx 1 \text{ км}$  равны

$$E_{kin}^{max} = \pi \rho \int_0^{R_0} r dr v_\varphi^2(r) \approx \frac{\pi}{4} \rho (v_\varphi^{max})^2 R_0^2 \approx 10 \text{ МДж/м}, \quad (78)$$

$$M_z^{max} = 2\pi \rho \int_0^{R_0} r^2 v_\varphi(r) dr \approx \frac{\pi}{2} \rho v_\varphi^{max} R_0^3 \approx 200 \text{ МДж} \cdot \text{с/м}, \quad (79)$$

что соответствует плотности энергии порядка  $10 \text{ Дж/м}^3$ . Однако при сужении воронки торнадо вблизи земной поверхности до радиуса  $100 \text{ м}$  плотность энергии при той же скорости вращения возрастает на два порядка и достигает значения  $1 \text{ кДж/м}^3$ , что свидетельствует об огромной разрушительной силе торнадо.



Для тайфуна с  $R_0 \approx 100$  км и с максимальной скоростью ветра  $v_\varphi^{max} \approx 0.3c_s$  эта энергия на три порядка больше и составляет примерно 100 ГДж/м, а момент импульса — на пять с половиной порядков больше, чем для торнадо и составляет примерно 200 ТДж·с/м.

Следует подчеркнуть, что рост кинетической энергии и скорости вращения атмосферного вихря в процессе развития экспоненциальной или взрывной неустойчивости не противоречит законам сохранения энергии и момента количества движения, поскольку в открытой системе с объемным стоком и непрерывным притоком вещества из окружающей атмосферы с ненулевой начальной завихренностью происходит перенос необходимого количества энергии и момента импульса в ускоряющуюся сердцевину вихря (торнадо, тайфуна). Оценим полный запас кинетической энергии и момента импульса в глобально завихренной атмосфере во внешней области  $r > R_0$ :

$$E_{kin}^{r>R_0} = \pi \rho \int_{R_0}^{R_{max}} [v_\varphi^2(r) + v_r^2(r)] r dr = \\ = \pi \rho R_0^4 [\omega^2(0) + \beta^2] \ln \frac{R_{max}}{R_0}, \quad (80)$$

$$M_z^{r>R_0} = \\ = 2\pi \rho \int_{R_0}^{R_{max}} v_\varphi(r) r^2 dr \approx \pi \rho R_0^2 R_{max}^2 \omega(0), \quad (81)$$

где  $R_{max}$  — максимальный радиус интегрирования, который для торнадо или тайфуна на свободном пространстве суши или океана ограничен только кривизной земной поверхности и по порядку величины равен  $R_{max} \approx 10^3$  км. Подставляя в соотношения (80) и (81) значения параметров  $\rho \approx 1.3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\beta \approx \omega(0) \approx (10^{-3}-10^{-2})$  с<sup>-1</sup> и  $R_0 \approx 1$  км, получаем следующие оценки:  $E_{kin}^{r>R_0} \approx (30-3000)$  МДж/м и  $M_z^{r>R_0} \approx 4(10^3-10^4)$  ТДж·с/м, что значительно превышает приведенные выше максимальные значения кинетической энергии и момента импульса сердцевины торнадо.

В случае тайфуна при скоростях ветра  $v_\varphi(R_0) \approx v_r(R_0) \approx (1-10)$  м/с на границе области конденсации радиусом  $R_0 \approx 100$  км, что соответствует параметрам  $\beta \approx \omega(0) \approx (10^{-5}-10^{-4})$  с<sup>-1</sup>, запас по энергии и моменту импульса составляет от  $E_{kin}^{r>R_0} \approx 100$  ГДж/м до  $E_{kin}^{r>R_0} \approx 10$  ТДж/м и, соответственно, от  $M_z^{r>R_0} \approx 4 \cdot 10^5$  ТДж·с/м до  $M_z^{r>R_0} \approx 4 \cdot 10^6$  ТДж·с/м.

Таким образом, практически неограниченный приток кинетической энергии и момента импульса воздуха из окружающей глобально завихренной атмосферы обеспечивает огромную разрушительную силу мощных атмосферных вихрей — торнадо и тайфунов. В то же время, отсутствие такого непрерывного притока вещества и энергии вращения делают невозможным моделирование торнадо в лабораторных условиях. Этим же объясняется отсутствие мощных торнадо в условиях пересеченной местности, когда  $R_{max}$  определяется размерами сравнительно небольших плоских участков суши или водной поверхности.

## 6. ВЫВОДЫ

В настоящей работе предложена простая гидродинамическая модель для описания мощных атмосферных вихрей (торнадо и тайфунов). В рамках этой модели предполагается, что причиной зарождения и развития этих вихрей является процесс конденсации водяного пара в охлажденном ниже точки росы атмосферном воздухе при формировании плотных облачных систем.

Рассмотренная модель позволяет понять и объяснить целый ряд наблюдаемых феноменов, связанных с рождением и эволюцией торнадо и тайфунов:

1) возникновение сходящихся вертикальных и горизонтальных потоков воздуха в результате существования внутри формирующегося облака объемного и поверхностного стоков вещества (из-за интенсивной конденсации водяного пара во влажном воздухе, охлажденном ниже точки росы  $T_{dew}$ , и ухода нагретого сухого воздуха в верхние слои атмосферы) и ускорение вращения сердцевины вихря под действием этих потоков при ненулевой завихренности атмосферы под действием гидродинамических конвективной и кориолисовой сил;

2) образование воронки торнадо на нижней кромке облака благодаря эволюции формы изобары  $P = P_\infty$ , которая ограничивает снизу область конденсации влаги, и возникновение характерного для торнадо эффекта всасывания при соприкосновении воронки с поверхностью Земли, обусловленного пониженным давлением в центре вихря;

3) образование прозрачного ядра (глаза) в центральной части тайфуна или торнадо в результате падения давления на оси вихря ниже  $P_{evp}$ , когда происходит испарение взвешенных в воздухе водяных капель (тумана);

4) возможность существования аксиально-несимметричных атмосферных вихрей с анизотропным распределением давления и конденсата в сердцевине вихря, что качественно согласуется с наблюдательными данными для мощных тайфунов;

5) быстрое развитие сильной турбулентности за счет абсолютной неустойчивости поверхностных возмущений на границе сердцевины вихря в результате нарастающего во времени тангенциального разрыва (скачка) азимутальной скорости и связанное с этим возникновение в приповерхностном слое аномально большой турбулентной вязкости, которая на несколько порядков превышает кинематическую вязкость воздуха, что позволяет понять причину большой устойчивости (прочности и эластичности) внешней оболочки торнадо;

6) типичные времена развития торнадо и тайфунов (не более 1 ч и не более 3 суток) от момента его зарождения до начала затухания за счет объемной вязкости в условиях сжимаемости воздуха и генерации звуковых колебаний при максимальных скоростях турбулентных пульсаций порядка скорости звука, либо до момента радиального коллапса и разрушения вихря при отрицательных давлениях в его сердцевине;

7) колоссальные кинетические энергии торнадо и тайфунов, равные по порядку величины соответственно 10 МДж/м и 100 ГДж/м, в расчете на единицу длины вихря, что объясняет огромную разрушительную силу торнадо и тайфунов и является результатом практически неограниченного притока энергии вращения воздуха из глобально завихренной атмосферы на больших открытых пространствах суши и океана.

Выражаю благодарность В. Ф. Гантмахеру, Н. С. Ерохину, Л. Х. Ингелю, М. В. Калашнику, В. Н. Мальневу, Р. А. Нарышкину и С. М. Рябченко за полезные обсуждения вопросов, рассмотренных в данной работе, а также Е. Г. Галкиной, А. Э. Пашицкому, В. И. Пентегову и А. С. Семенову за помощь в оформлении статьи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Украинского научно-технологического центра (проект № 3718).

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

Рассмотрим решение уравнения (6) для азимутальной скорости  $v_\varphi(r)$  в несжимаемой вязкой жид-

кости (газе) с плавным и непрерывным профилем радиальной зависимости без излома в точке  $r = R_0$ :

$$v_\varphi(r) = \begin{cases} v_\varphi^{(I)}(r) = r\omega, & r < R_-, \\ v_\varphi^{(II)}(r) = v_\omega^{max} - a(r - R_0)^2, & R_- \leq r \leq R_+, \\ v_\varphi^{(III)}(r) = \omega R_0^2 / r, & r > R_+, \end{cases} \quad (A.1)$$

где  $R_\pm = R_0 \pm \delta_\pm$ , а величина  $(R_+ - R_-) = (\delta_+ + \delta_-)$  определяет ширину переходного слоя. Неизвестные величины  $a$ ,  $\delta_\pm$  и  $v_\omega^{max}$  должны быть определены с помощью граничных условий плавной сшивки скоростей и их первых производных по  $r$  в точках  $r = R_\pm$ :

$$v_\varphi^{(I)}(R_-) = v_\varphi^{(II)}(R_-), \quad v_\varphi^{(II)}(R_+) = v_\varphi^{(III)}(R_+), \quad (A.2)$$

$$\left( \frac{dv_\varphi^{(I)}}{dr} \right)_{r=R_-} = \left( \frac{dv_\varphi^{(II)}}{dr} \right)_{r=R_-}, \quad (A.3)$$

$$\left( \frac{dv_\varphi^{(II)}}{dr} \right)_{r=R_+} = \left( \frac{dv_\varphi^{(III)}}{dr} \right)_{r=R_+}.$$

Подставляя соответствующие выражения (A.1) в граничные условия (A.2) и (A.3), получаем систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных величин:

$$\omega(R_0 - \delta_-) = v_\omega^{max} - a\delta_-^2, \quad (A.4)$$

$$\omega \frac{R_0^2}{R_0 + \delta_+} = v_\omega^{max} - a\delta_+^2,$$

$$\omega = 2a\delta_-, \quad \omega \frac{R_0^2}{(R_0 + \delta_+)^2} = 2a\delta_+. \quad (A.5)$$

При условии  $\delta_\pm \ll R_0$  из соотношений (A.4) и (A.5) с точностью до главных членов в первом порядке по малому параметру  $\delta_\pm / R_0$  находим

$$\delta_+ \approx \delta_- \approx \delta, \quad a \approx \omega / 2\delta, \quad v_\omega^{max} \approx \omega(R_0 - \delta). \quad (A.6)$$

Подставляя (A.1) с учетом (A.6) в правую часть уравнения (6), видим, что в областях  $r < R_-$  и  $r > R_+$  кинематическая вязкость тождественно обращается в нуль, тогда как внутри переходного слоя в области  $R_- \leq r \leq R_+$  получаем с указанной выше точностью:

$$\nu \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) \approx -\gamma v_\varphi, \quad (A.7)$$

где  $\gamma = 2\nu / R_0 \delta$  — эффективный декремент затухания вращения из-за конечной вязкости воздуха внутри слоя.

Все изложенное выше относится и к радиальной скорости  $v_r(r)$  при замене  $\omega$  на  $-\beta$ . При этом в условиях гидростатического равновесия

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{v_\varphi^2}{r} - v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad (\text{A.8})$$

которое выполняется в условиях несжимаемости, когда формально скорость звука  $c_s \rightarrow \infty$ , распределение давления в плоском вихре (при  $v_z = 0$ ) внутри переходного слоя, согласно (A.1), имеет вид

$$P(r) = P(R_0 - \delta) + \rho \left\{ \frac{\omega^2}{R_0} \left[ (R_0 - \delta)^2 (r - R_0 + \delta) - \frac{R_0 - \delta}{3\delta} ((r - R_0)^3 + \delta^3) + \frac{1}{2\delta^2} ((r - R_0)^5 + \delta^5) \right] + \frac{\beta^2}{2\delta} [(R_0 - \delta) ((r - R_0)^2 - \delta^2) - \frac{1}{4\delta} ((r - R_0)^4 - \delta^4)] \right\}, \quad (\text{A.9})$$

где  $P(R_0 - \delta)$  — давление на внутренней поверхности переходного слоя, равное давлению внутри сердцевин вихря при  $r = R_0 - \delta$ .

Из (A.9) следует, что давление на внешней поверхности переходного слоя при  $r = R_0 + \delta$  с точностью до членов первого порядка по  $\delta$  равно

$$P(R_0 + \delta) \approx P(R_0 - \delta) + 2\rho\omega^2 R_0 \delta. \quad (\text{A.10})$$

Таким образом, давление  $P(r)$  внутри переходного слоя, согласно (A.9), плавно нарастает по полиномиальному закону от значения  $P(R_0 - \delta)$  до  $P(R_0 + \delta)$  и непрерывно сшивается с внутренним и внешним давлениями в воздушном вихре.

Что же касается вихря с отличной от нуля аксиальной скоростью  $v_z$ , то внутри переходного слоя  $v_z$  должна плавно убывать до нуля при  $r = R_0 + \delta$ , так что переменные  $r$  и  $z$  в уравнениях Навье–Стокса не разделяются и вычислить давление в явном виде не представляется возможным. Однако естественно предположить, что и в данном случае распределение давления внутри слоя не будет содержать каких-либо особенностей (изломов, скачков и др.).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Гутман, *Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов*, Гидрометеиздат, Ленинград (1969).
2. Д. В. Наливкин, *Ураганы, бури, смерчи*, Наука, Ленинград (1969); *Смерчи*, Наука, Москва (1969).
3. W. H. Gray, in: *Meteorology Over Tropical Ocean*, ed. by D. V. Show, Roy. Met. Soc. (1979), p. 151.
4. Г. С. Голицын, *Исследование конвекции с геофизическими приложениями*, Гидрометеиздат, Ленинград (1980).
5. К. А. Emanuel, *Mesoscale Meteorology. — Theories, Observations and Models*, Reidel Publishing Company (1983), p. 551.
6. А. П. Хаин, *Математическое моделирование тропических циклонов*, Гидрометеиздат, Ленинград (1984).
7. Г. Риль, *Климат и погода в тропиках*, Гидрометеиздат, Ленинград (1984).
8. *Интенсивные атмосферные вихри*, под ред. Л. Бергсона, Дж. Лайтхилла, Мир, Москва (1985).
9. В. В. Кушин, *Смерч*, Мир, Москва (1985).
10. А. Гилл, *Динамика атмосферы и океана*, Мир, Москва (1986).
11. Ю. К. Краснов, *Эволюция смерчей*, в кн.: *Нелинейные волны, структуры и бифуркации*, Наука, Москва (1987).
12. А. С. Монти, *Теоретические основы геофизической гидродинамики*, Гидрометеиздат, Ленинград (1988).
13. К. Ооуама, J. Atmos. Sci. **26**, 1 (1969).
14. J. L. McBride, J. Atmos. Sci. **38**, 1117, 1152 (1981).
15. К. В. Ооуама, J. Meteor. Soc. Jpn. **60**, 369 (1982).
16. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, А. В. Тур, Г. А. Хоменко, А. М. Шукуров, ДАН СССР **273**, 549 (1983).
17. G. Falkovich, Phys. Rev. Lett. **69**, 3173 (1992).
18. E. Balkovsky, G. Falkovich, V. Lebedev, and I. Ya. Shapiro, Phys. Rev. E **52**, 4537 (1995).
19. G. Falkovich, D. Bernard, G. Boffetta, and F. Celani, Phys. Rev. Lett. **98**, 024501 (2007).
20. V. S. L'vov and V. V. Lebedev, Phys. Rev. E **47**, 1794 (1993).
21. В. В. Лебедев, В. С. Львов, Письма в ЖЭТФ **59**, 577 (1994).
22. G. Falkovich and V. Lebedev, Phys. Rev. E **50**, 3883 (1994).
23. G. Falkovich and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **78**, 1952 (1997).

24. J. I. Charney and A. Eliassen, *J. Atmos. Sci.* **21**, 68 (1964).
25. R. W. Jones, *J. Atmos. Sci.* **34**, 1528 (1977).
26. J. B. Klemp and B. Wilhelmson, *J. Atmos. Sci.* **35**, 1070 (1978).
27. G. I. Holland, *Mon. Weath. Rev.* **108**, 1212 (1980).
28. J. Klemp, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19**, 369 (1987).
29. C. L. Weatherford, *Atmospheric Sci.*, paper № 446, Colorado State Univ. (1989), p. 198.
30. Л. И. Петрова, *Труды ИЭМ* **54**(151), 38 (1991).
31. М. В. Калашник, *Изв. РАН, Физика атмосф. и океана* **30**, 26 (1994).
32. Л. Х. Ингель, *Метеорология и гидрология*, Вып. 8, 28 (1983); *Изв. АН СССР, Физика атмосф. и океана* **21**, 262 (1985).
33. М. В. Калашник, Б. Я. Шмерник, *Изв. АН СССР, Физика атмосф. и океана*, **26**, 787; 1034 (1990).
34. K. A. Emanuel, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23**, 179 (1991).
35. K. A. Emanuel, *Ann. Rev. Earth Planet Sci.* **31**, 75 (2003).
36. М. В. Калашник, К. Н. Вишератин, *ЖЭТФ* **133**, 935 (2008).
37. Э. А. Пашицкий, *Прикладная гидродинамика* **4**, 50 (2002).
38. Э. А. Пашицкий, В. Н. Мальнев, Р. А. Нарышкин и др., *УФЖ* **48**, 32 (2003).
39. E. A. Pashitskii, V. N. Mal'nev, and R. A. Naryshkin, arXiv:physics/0/02229v1.
40. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
41. G. Falkovich and A. Pumir, *Phys. Fluids* **16**, 147 (2004).
42. A. Celani, G. Falkovich, A. Mazzino, and A. Seminara, *Europhys. Lett.* **70**, 775 (2005).
43. G. Falkovich, M. Stepanov, and V. Vucelja, *Appl. Meteorol. Climatol.* **45**, 591 (2006).
44. G. Falkovich and A. Fouxon, *New J. Phys.* **6**, 1 (2004).
45. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1975).
46. А. М. Фридман, *УФН* **178**, 225 (2008).
47. P. K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Academ. Press. (1990).
48. Н. Э. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, ч. 2, Физматгиз, Москва (1963).