

КОНТРОЛИРУЕМОЕ РАВНОВЕСИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ В ВИБРАЦИОННОМ ПОЛЕ

А. Н. Шарифулин *

*Пермский государственный технический университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 22 августа 2009 г.

Аналитически решены уравнения тепловой вибрационной конвекции неравномерно нагретой жидкости для произвольных ориентаций векторов, задающих направления подогрева, силы тяжести и вибраций в замкнутой полости, имеющей форму бесконечного горизонтального цилиндра. Показано, что при любой ориентации указанных векторов в плоскости, перпендикулярной цилиндру, гравитационный и вибрационный механизмы конвекции могут полностью компенсировать друг друга. Определено соотношение между вибрационным и гравитационным числами Грасгофа, при выполнении которого осуществляются условия механического равновесия. Полученное соотношение подтверждено прямыми численными расчетами полных уравнений тепловой вибрационной конвекции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа по определению условий реализации механического равновесия в присутствии высокочастотных вибраций мотивирована определяющей ролью вибрационной тепловой конвекции в физических процессах, лежащих в основе технологических экспериментов по выращиванию кристаллов как в земных, так и в орбитальных условиях [1]. Наиболее благоприятными для выращивания кристаллов являются условия, когда в полости отсутствует усредненное течение жидкости, т. е. когда возможно и реализуется механическое квазиравновесие. До сих пор полагали, что условия механического квазиравновесия могут выполняться лишь для фиксированного набора взаимных ориентаций силы тяжести, направления подогрева и оси вибраций. Этот результат получен в работе [2], где впервые были определены условия механического квазиравновесия для дискретного набора различных взаимных ориентаций определяющих векторов. Было исследовано 16 взаимных ориентаций равновесного градиента температуры ∇T_0 , вектора ускорения свободного падения \mathbf{g} и направления вибраций \mathbf{k} . Был изучен случай, когда полость имела форму бесконечного плоского слоя [2]. Это привело к тому, что в рассмотрении и соотношениях, определяющих условие механи-

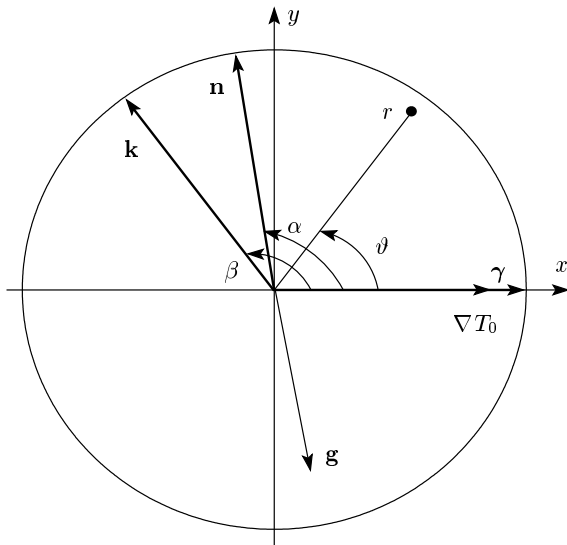
ческого равновесия, присутствовал дополнительный вектор, задающий ориентацию полости.

В настоящей работе условия механического квазиравновесия исследуются для обобщенной на случай наличия вибраций классической задачи Жуховицкого [3]. Получены аналитические выражения, определяющие структуру усредненного и пульсационного течений при малых отклонениях от условий механического квазиравновесия для произвольных, перпендикулярных оси цилиндра, взаимных ориентаций равновесного градиента температуры ∇T_0 , вектора ускорения свободного падения \mathbf{g} и направления вибраций \mathbf{k} . Показано, что для любой ориентации подбором соотношения между вибрационным и гравитационным числами Грасгофа можно добиться выполнения условия квазиравновесия. Состояние, при котором в полости не будет усредненного движения жидкости, может реализовываться в широком интервале вибрационного и гравитационного чисел Грасгофа.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть жидкость заполняет бесконечную полость цилиндрической формы радиуса R в массиве, температуропроводность которого много больше температуропроводности χ жидкости. Коэффициент линейного расширения b жидкости и ее кинематическая

*E-mail: sharifulin@pst.u.ru



Геометрия задачи о смешанной свободной тепловой и вибрационной конвекции в цилиндрической полости

вязкость ν предполагаются постоянными. В массиве поддерживается постоянный градиент температуры $\nabla T_0 = \gamma \Theta / R$, где Θ — разность температур на расстоянии R в направлении градиента, γ — единичный вектор. От этого равновесного направления будем отсчитывать все угловые координаты (см. рисунок). Тогда на поверхности цилиндра температура будет определяться формулой

$$T_0 = \Theta \cos \vartheta, \quad (1)$$

где ϑ — полярный угол, отсчитываемый от вектора γ . Введем декартову (x, y, z') и цилиндрическую (r, ϑ, z) системы координат связанные между собой соотношениями

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad z' = z.$$

Пусть направление вверх задано единичным вектором \mathbf{n} , связанным с ускорением свободного падения соотношением $\mathbf{g} = -g\mathbf{n}$. Он составляет угол α с равновесным направлением подогрева γ . Полость вместе с жидкостью может совершать гармонические колебания с амплитудой a и частотой ω вдоль единичного вектора \mathbf{k} , составляющего с равновесным градиентом температуры угол β .

Будем считать, что частота колебаний достаточно большая. Поэтому для рассмотрения поведения жидкости применим метод усреднения [4], хорошо обоснованный как теоретически, так и экспериментально (см. соответствующие ссылки в рабо-

тах [5–8]). Скорость и температура в системе координат, связанной с полостью, представляются в виде сумм двух слагаемых $\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}$ и $T + \zeta$, где \mathbf{v} , T — усредненные величины скорости и температуры, медленно меняющиеся во времени, а $\boldsymbol{\eta}$, ζ — пульсационные величины, осциллирующие с частотой ω . Введем в рассмотрение функцию тока ψ и завихренность ϕ , связанные со скоростью соотношениями $\mathbf{v} = \text{rot } \psi$, $\phi = \text{rot } \mathbf{v}$.

Выберем радиус цилиндра R , Θ и коэффициент кинематической вязкости ν в качестве единиц измерения расстояния, температуры и функции тока. Будем искать плоские стационарные решения задачи. В этом случае векторные поля завихренности ϕ , функции тока ψ усредненного течения и амплитуды \mathbf{F} функции тока пульсационного течения будут иметь отличные от нуля только z -компоненты:

$$\phi = (0, 0, \phi), \quad \psi = (0, 0, \psi), \quad \mathbf{F} = (0, 0, F). \quad (2)$$

Тогда уравнения Зеньковской–Симоненко для стационарной термовибрационной конвекции могут быть записаны в безразмерном виде в форме Гельмгольца:

$$\nabla(\mathbf{v}\phi) = \Delta\phi + G(\nabla T \times \mathbf{n})_z + S(\nabla(\mathbf{W} \cdot \mathbf{k}) \times \nabla T)_z, \quad (3)$$

$$\Delta\psi + \phi = 0, \quad (4)$$

$$\Delta F + (\nabla T \times \mathbf{k})_z = 0, \quad (5)$$

$$\nabla(\mathbf{v}T) = \frac{1}{P}\Delta T, \quad (6)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Выражения, связывающие скорость \mathbf{v} усредненного течения и амплитуду \mathbf{W} пульсационной составляющей скорости $\boldsymbol{\eta}$ с полями соответствующих функций тока имеют вид

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, -\frac{\partial \psi}{\partial r}, 0 \right), \quad (7)$$

$$\mathbf{W} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta}, -\frac{\partial F}{\partial r}, 0 \right).$$

Компоненты единичных векторов, задающих направление вверх \mathbf{n} и направление вибраций \mathbf{k} в цилиндрической системе координат, как видно из рисунка, определяются соотношениями

$$\mathbf{n} = (\cos(\alpha - \vartheta), \sin(\alpha - \vartheta), 0), \quad (8)$$

$$\mathbf{k} = (\cos(\beta - \vartheta), \sin(\beta - \vartheta), 0). \quad (9)$$

Из условия прилипания для усредненной скорости \mathbf{v} , условия непротекания для пульсационной составляющей скорости получаем граничные условия для функций тока:

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = F = 0 \quad \text{при} \quad r = 1. \quad (10)$$

Граничное условие (1) для температуры переписывается в виде

$$T = \cos \vartheta \quad \text{при} \quad r = 1. \quad (11)$$

Решение задачи (3)–(11) определяется безразмерными критериями подобия: числом Грасгофа

$$G = gb\Theta R^3/\nu^2, \quad (12)$$

вибрационным числом Грасгофа

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{ab\omega R\Theta}{\nu} \right)^2, \quad (13)$$

числом Прандтля

$$P = \nu/\chi \quad (14)$$

и углами α и β , задающими направление вверх в поле тяжести и ось вибраций \mathbf{k} относительно направления равновесного подогрева ∇T_0 . Как показано в работе [8], пульсационные характеристики выражаются через усредненные по формулам

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= \sqrt{2S} \mathbf{W} \cos \Omega t, \\ \zeta &= -\frac{\sqrt{2S}}{\Omega} (\mathbf{W} \cdot \nabla T) \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Omega = \omega R^2/\nu$ — безразмерная частота колебаний. Отсюда видно, что \mathbf{W} имеет смысл амплитуды пульсационной составляющей скорости [8], кроме того, \mathbf{W} — соленоидальная часть векторного поля $T\mathbf{k}$.

Стационарные решения задачи (3)–(11) при $G \neq 0$, $S \neq 0$ ранее не исследовались. Однако достаточно полно изучены аналитически и численно два предельных случая, в каждом из которых равно нулю либо число Грасгофа G , либо вибрационное число Грасгофа S .

Первый из них, когда $G \neq 0$, $S = 0$, соответствует свободной конвекции в горизонтальном цилиндре при произвольных направлениях подогрева α . Эта задача для подогрева строго снизу, т. е. при $\alpha = \pi$, была впервые сформулирована Жуховицким [3] и исследована им же на устойчивость методом Галеркина. В работе [9] задача Жуховицкого

наиболее полно исследована на устойчивость, что повлекло за собой радикальный пересмотр общепринятых результатов исследования ее устойчивости, приведенных в монографии [10]. В частности, в работе [9] показано, что трехмерные возмущения более опасны, чем двумерные для случая идеально теплопроводных границ, и предложено эту задачу называть задачей Жуховицкого. Случай малых отклонений от равновесного направления подогрева и возникающие при этом бифуркации изучались в работе [11]. Произвольные направления подогрева изучены численно и аналитически в работе [12]. Путем численных расчетов были обнаружены новые типы бифуркационных диаграмм (в частности, замкнутые), впервые для нелинейной конвекции построена бифуркационная кривая, при пересечении которой может происходить жесткий переход от аномально конвективного течения, когда теплая жидкость опускается около нагретой стенки, к нормальному.

Если, наоборот, $G = 0$, $S \neq 0$, то наша задача переходит в задачу о вибрационной тепловой конвекции в невесомости в цилиндрической полости при произвольных направлениях вибраций. Стационарные решения для произвольных направлений вибраций $0 \leq \beta \leq 2\pi$ впервые изучались автором аналитически и численно ранее [8]. Бифуркации полученных стационарных решений при $\beta \approx \pi/2$ рассмотрены численно в работе [7]. Там же исследована устойчивость состояния квазиравновесия при $\beta = \pi/2$, более точно определено пороговое значение вибрационного числа Рэлея, оцененного приближенно в работе [6]. Результаты изучения автором гистерезисных переходов между одно- и двухвихревыми режимами течения при $\beta = \pi/2$ [13] были положены в основу экспериментального исследования [14].

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ $G \neq 0$, $S \neq 0$

При малых скоростях \mathbf{v} усредненного течения решение задачи (3)–(11) при произвольных α и β имеет вид

$$\phi^0 = \frac{1 - 2r^2}{8} \left(G \sin \alpha + \frac{S}{4} \sin 2\beta \right), \quad (16)$$

$$\psi^0 = \frac{(r^2 - 1)^2}{64} \left(G \sin \alpha + \frac{S}{4} \sin 2\beta \right), \quad (17)$$

$$T^0 = r \cos \vartheta, \quad (18)$$

$$F^0 = \frac{1}{4} (1 - r^2) \sin \beta. \quad (19)$$

Выражения (16)–(19) являются точным решением задачи (3)–(11) с приравненными нулю левыми частями уравнений (3), (6), т. е. с отброшенными конвективными членами $\nabla(\mathbf{v}\phi)$ и $\nabla(\mathbf{v}T)$. Оно описывает слабый режим конвекции, когда усредненное течение не изменяет распределение температуры (18). Жидкость совершает колебательное движение по круговым орбитам. Скорости усредненного и пульсационного движений определяются подстановкой выражений (17) и (19) в (7) и (15):

$$v_r^0 = 0, \quad v_\theta^0 = \frac{(1-r^2)r}{16} \left(G \sin \alpha + \frac{S}{4} \sin 2\beta \right), \quad (20)$$

$$\eta_r^0 = 0, \quad \eta_\theta^0 = \sqrt{\frac{S}{2}} r \sin \beta \cos \Omega t. \quad (21)$$

Видно, что кроме колебательного течения, имеющего «твердотельный» характер (т. е. угловая скорость не зависит от радиальной координаты), присутствует и усредненное дифференциальное вращение жидкости. Полученное решение применимо и в случае немалых значений вибрационного S и гравитационного G чисел Грасгофа, необходимо лишь, чтобы выполнялось соотношение

$$\left| G \sin \alpha + \frac{S}{4} \sin 2\beta \right| \leq K_L, \quad (22)$$

где K_L — критерий применимости рассматриваемого приближения. Численные расчеты [8] при $G = 0$ и $P = 1$ и произвольных $\beta \in [0, 2\pi]$ показали, что усредненное течение слабоинтенсивно, т. е. не влияет на распределение температуры (18) пока выполняется соотношение $S < 50$, поэтому можно ожидать, что $K_L \approx 10$ при значениях числа Прандтля $P \approx 1$. Подставив в условие (22) определения (13) и (12), получим условие малоинтенсивной термовибрационной конвекции в размерной форме:

$$\left| g \sin \alpha + \frac{1}{8} \frac{a}{R} a\omega^2 b\Theta \sin 2\beta \right| \leq \frac{K_L \nu^2}{R^3 b\Theta}. \quad (23)$$

Из выражения (17) получаем условие усредненного механического квазиравновесия:

$$G \sin \alpha + \frac{S}{4} \sin 2\beta = 0, \quad (24)$$

которое в размерном виде приобретает вид

$$g \sin \alpha + \frac{1}{8} \frac{a}{R} a\omega^2 b\Theta \sin 2\beta = 0. \quad (25)$$

При $S = 0$ из (24), (25) получаем хорошо исследованное условие механического равновесия задачи Жуковичского: $\sin \alpha = 0$, которое выполняется при $\alpha = 0$

и $\alpha = \pi$. При $\alpha = 0$, т. е. при подогреве сверху, равновесие абсолютно устойчиво, имеются лишь затухающие возмущения, а при $\alpha = \pi$, т. е. при подогреве снизу, состояние покоя жидкости может терять устойчивость по отношению как к двумерным, так и к трехмерным возмущениям. Наиболее полное и точное исследование линейной устойчивости этого состояния проведено в работе [9].

При $G = 0$, т. е. в условиях невесомости, можно показать, что для полного анализа задачи достаточно рассмотреть $0 \leq \beta \leq \pi/2$. Условие квазиравновесия (24) выполняется при $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2$. Случай $\beta = 0$ соответствует абсолютному равновесию — равна нулю не только средняя скорость, но и пульсационная ее составляющая. Это состояние устойчиво при любых значениях вибрационного числа Грасгофа S [5, 6]. При $\beta = \pi/2$ осуществляется квазиравновесие, т. е. имеется решение с нулевой средней скоростью $\mathbf{v}^0 = 0$ и отличной от нуля пульсационной скоростью, определяемой формулой (21). Это состояние, соответствующее «твердотельному» колебательному движению жидкости, теряет устойчивость при $S > R_C/P$, где $R_C = 1112$ [7].

В общем случае $G \neq 0$ и $S \neq 0$ условие квазиравновесия (24) может выполняться для любых значений G и S , необходимо лишь подобрать сочетание углов α и β , чтобы удовлетворилось условие квазиравновесия.

4. ОЦЕНКА ПРЕДЕЛОВ РЕАЛИЗУЕМОСТИ КВАЗИРАВНОВЕСИЯ

Были проведены расчеты полных уравнений (3)–(11) конечно-разностным методом, описанным в работе [8]. Расчеты проводились на сетке, которая имела 20 узлов по радиальной координате и 90 узлов по угловой. Целью расчетов была оценка пределов реализуемости состояния квазиравновесия (24). В таблице представлены полученные расчетным путем значения числа Рейнольдса Re^0 усредненного течения. Число Рейнольдса определено через среднюю скорость и радиус цилиндра и совпадает с максимальным значением безразмерной функции тока, достигавшимся в большинстве расчетов в центре полости. Представлены расчеты усредненного течения для семи комбинаций параметров задачи. Для всех этих комбинаций выполняются условия квазиравновесия (24). Для всех приведенных расчетов было получено стационарное решение.

Первые два расчета соответствуют рассмотренным выше предельным случаям. В расчете 1, соот-

Таблица. Зависимость интенсивности усредненного течения от параметров задачи по результатам прямого численного моделирования при выполнении условия квазиравновесия (24)

Номер расчета	α	β	$G \cdot 10^{-3}$	$S \cdot 10^{-3}$	Re^0
1	0	$\pi/2$	0	0.9	$< 10^{-3}$
2	π	0	0.4	0	0.29
3	$-\pi/2$	$\pi/4$	1	4	0.02
4	$-\pi/2$	$\pi/4$	3	12	0.27
5	$-\pi/2$	$\pi/4$	10	40	10.7
6	$-\pi/3$	$\pi/6$	4	16	0.01
7	$-\pi/3$	$\pi/4$	1	3.464	0.01

ветствующем $G = 0$, т. е. случаю вибрационной конвекции в невесомости, интенсивность полученного усредненного течения практически равна нулю, т. е. состояние квазиравновесия устойчиво, что находится в соответствии с результатами линейной теории и предыдущих расчетов [5–8].

Результаты расчета 2, соответствующие $S = 0$ и значению числа Грасгофа G , промежуточному между полученными в работах [9] и [10] критическими числами, подтверждают правильность уточненного в [9] критического числа Грасгофа классической задачи Жуховицкого. В расчете 2, в противоречии с работой [10] и в соответствии с [9], наблюдалась достаточно интенсивная надкритическая конвекция с практически круговыми траекториями усредненного течения.

Расчет 3 проведен для случая строго бокового подогрева ($\alpha = -\pi/2$) и направления вибраций $\beta = -\pi/4$, соответствующего максимальной интенсивности вибрационной конвекции в отсутствие обычной гравитационной. При боковом подогреве интенсивность гравитационной конвекции в отсутствие вибрационной также максимальна. Значение выбранного в данном расчете числа Грасгофа примерно в три раза превосходит критическое для подогрева снизу. Подстановкой этих значений в условие (24) получается значение вибрационного числа Грасгофа, для которого должно выполняться условие квазиравновесия. Как видно из таблицы, рассчитанная интенсивность усредненного течения пренебрежимо мала ($Re^0 \ll 1$), т. е. состояние механического квазиравновесия реализуется при параметрах этого расчета.

Расчеты 4 и 5 проведены путем одновременного увеличения в три и десять раз числа Грасгофа и вибрационного числа Грасгофа в сравнении с расчетом 3. Из таблицы видно, что для этих значений параметров, несмотря на выполнение условия (24), состояние механического квазиравновесия уже не реализуется и в полости формируется развитый режим усредненного течения, хотя его интенсивность значительно ниже, чем в случае, когда одно из чисел Грасгофа равно нулю.

Расчеты 6 и 7 проведены для отличных от рассмотренных выше сочетаний направлений вибраций и подогрева и показывают, что два механизма конвекции, взаимно компенсируя друг друга, могут в несколько раз увеличивать порог наступления надкритического режима конвекции.

Заметим, что, поскольку основной режим конвекции как вибрационной, так и свободной тепловой в полостях, отличных от цилиндрической, имеет обычно развитую одновихревую моду, следует ожидать, что полученный эффект может проявляться как в случаях, когда форма полости отличается от цилиндрической, так и при нарушении условий равномерности бокового подогрева. В этих условиях возможно вместо механического равновесия осуществление не полного, но значительного снижения интенсивности усредненного течения в полости.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически получены выражения, характеризующие интенсивность двумерной гравитационной и вибрационной конвекции в цилиндрической полости с заданным гармоническим распределением температуры на ее поверхности для всевозможных перпендикулярных оси цилиндра взаимных ориентаций направлений подогрева, силы тяжести и вибраций. Получено условие существования состояния механического квазиравновесия неравномерно нагретой жидкости в поле силы тяжести при наличии вибраций для такой полости. Из этого условия следует, что для любых перпендикулярных оси цилиндра взаимных ориентаций направлений подогрева, силы тяжести и вибраций можно получить из простой формулы соотношение для числа Грасгофа и вибрационного числа Грасгофа, при выполнении которого в полости будет осуществляться условие механического квазиравновесия. Выдвинута гипотеза о резком снижении интенсивности усредненного течения при выполнении условий квазиравновесия и для других форм полости и отличных от рассмотренных условий подогрева.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Zyuzgin, G. F. Putin, N. G. Ivanova et al., *Adv. Space Res.* **32**, 205 (2003).
2. V. A. Demin, G. Z. Gershuni, and I. V. Verholantsev, *Int. J. Heat Mass Transfer* **39**, 1979 (1996).
3. Е. М. Жуховицкий, *ПММ* **18**, 205 (1954).
4. С. М. Зеньковская, И. Б. Симоненко, *МЖГ* вып. 5, 51 (1966).
5. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *ДАН СССР* **249**, 580 (1979).
6. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *МЖГ* вып. 4, 12 (1981).
7. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. Н. Шарифулин, *Числ. мет. мех. спл. среды* **14**, 21 (1983).
8. А. Н. Шарифулин, в сб. *Конвективные течения*, Изд-во Пермского гос. пед. ин-та (1981), с. 22.
9. J. P. McHugh, *Quart. Appl. Math.* **LVIII**, 425 (2000).
10. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
11. В. И. Чернатыйнский, М. И. Шлиомис, *МЖГ* вып. 1, 64 (1973).
12. А. И. Никитин, А. Н. Шарифулин, в сб. *Процессы тепло- и массопереноса вязкой жидкости*, УНЦ АН СССР, Свердловск (1986), с. 32; A. I. Nikitin and A. N. Sharifulin, *Heat Trans.-Sov. Res.* **21**, 213 (1989).
13. А. Н. Шарифулин, в сб. *Гидродинамическая и конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, УНЦ АН СССР, Свердловск (1984), с. 27; A. N. Sharifulin, *Fluid Mech.-Sov. Res.* **15**, 28 (1986).
14. F. T. Ferguson and L. U. Lilleleht, *Int. J. Heat Mass. Transfer* **39**, 2895 (1996).