

# ТЕЧЕНИЕ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОГО КОНДЕНСАТА В КВАЗИОДНОМЕРНОМ КАНАЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОРШНЯ

*А. М. Камчатнов, С. В. Корнеев\**

*Институт спектроскопии Российской академии наук  
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 1 сентября 2009 г.

Рассмотрена задача о течении в канале бозе-эйнштейновского конденсата, находящегося под действием поршня. Такого рода задачи актуальны в связи с экспериментами по управлению течением конденсата в квазиодномерных (сигарообразных) ловушках, в которых роль поршня играет отталкивающий потенциал, создаваемый сфокусированным поперек ловушки лазерным лучом. Показано, что при произвольном законе движения поршня после некоторого момента времени в течении конденсата образуется дисперсионная ударная волна, характеризующаяся быстрыми осцилляциями плотности конденсата и скорости его течения. Методом усреднения Уизема получено решение для основных параметров дисперсионной ударной волны в случае равноускоренного движения поршня. В случае произвольного движения поршня проанализирована эволюция дисперсионной ударной волны непосредственно после момента опрокидывания, когда бездисперсионное решение хорошо аппроксимируется кубической параболой для зависимости плотности от координаты. Сравнение демонстрирует хорошее согласие численного расчета с приближенной аналитической теорией. Развита теория дополняет ранее рассмотренный случай поршня, движущегося с постоянной скоростью, и важна для описания транспорта конденсата в атомных чипах.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика бозе-эйнштейновского конденсата привлекает к себе большое внимание с момента его экспериментального обнаружения. Сначала изучались задачи о колебаниях конденсата как целого [1–3] или же о течении конденсата из выключенной ловушки [4–8]. Затем много усилий было потрачено на формирование и динамику вихрей [9, 10], генерации звуковых волн [11] и солитонов [12–14]. В настоящее время одной из актуальных задач динамики бозе-эйнштейновского конденсата является проблема образования дисперсионных ударных волн при эволюции больших возмущений конденсата. Первые такие волны были экспериментально обнаружены при воздействии относительно интенсивного лазерного луча на цилиндрически-симметричный конденсат, когда луч, распространяющийся вдоль оси конденсата, передавал ему импульс в радиальном направлении. В результате распространяющаяся от оси конденсата волна опрокидывалась с образованием цилиндрически-симметричной волновой струк-

туры [15], которая была интерпретирована в работе [16] как дисперсионная ударная волна. Аналогичный процесс для одномерного течения конденсата был рассмотрен в работе [17], а в работе [15] было проведено сравнение аналитической теории, развитой на основе автомодельных решений нелинейного уравнения Шредингера [18, 19] с экспериментом и найдено качественное согласие.

Другого вида дисперсионные ударные волны были обнаружены при сверхзвуковых течениях конденсата мимо препятствия [20]. Теоретическое изучение таких волн показало, что в случае малого препятствия волновая картина разделена конусом Маха на две части: вне конуса Маха на достаточном удалении от препятствия ударная волна преобразуется в линейные «корабельные» волны [21–23], соответствующие закону дисперсии Боголюбова, а внутри конуса Маха образуются дисперсионные ударные волны, распадающиеся вдали от препятствия на отдельные темные солитоны [24, 25]. При этом благодаря течению конденсата вдоль солитона его неустойчивость относительно распада на вихри подавляется [26], если число Маха превышает критическое значение  $M_c \approx 1.5$ .

\*E-mail: svyatoslav.korneev@gmail.com

Наконец, недавно были опубликованы [27] результаты эксперимента по управлению течением конденсата вдоль квазиодномерной ловушки с помощью поршня, образованного движущимся потенциалом лазерного луча. В этом эксперименте был использован широкий и невысокий потенциал, так что течение в области потенциала может быть описано в рамках так называемого «гидравлического» приближения. Стационарные течения конденсата в этом приближении были изучены в работе [28]; они реализуются при скоростях движения потенциала вне так называемой транскритической области  $v < v_-$ ,  $v > v_+$ . Если же скорость движения потенциала находится внутри транскритической области  $v_- < v < v_+$ , то гидравлическое решение становится неустойчивым и по обеим сторонам от него образуются дисперсионные ударные волны. Соответствующая теория была развита в работе [29] и аналитические результаты качественно согласуются с результатами эксперимента [27].

Однако если потенциал является высоким и имеет резкую границу, то течение конденсата под действием такого «поршня» требует особого рассмотрения. Простейший случай движения поршня с постоянной скоростью был рассмотрен в работе [30]. На практике этот случай соответствует настолько быстрому ускорению  $a_p$  поршня на начальном этапе его движения, что за время ускорения  $\tau$  течение конденсата не успевает сколько-нибудь существенно развиться:

$$a_p \tau \gg c_s, \quad (1)$$

где  $c_s$  — скорость звука в невозмущенном конденсате. В этом случае начальным этапом течения можно пренебречь и использовать автомодельное решение [18, 19] задачи о течении конденсата, что и было сделано в работе [30]. Но если условие (1) нарушено, необходимо рассмотреть течение на этапе ускорения поршня, что является целью настоящей работы.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В приближении среднего поля динамика бозе-конденсата описывается уравнением Гросса–Питаевского [31, 32]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{r})\psi + g|\psi|^2\psi, \quad (2)$$

где  $\psi$  — волновая функция конденсата из атомов с массой  $m$ ,  $V(\mathbf{r})$  — потенциал внешних сил, действующих на атомы,

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (3)$$

— эффективная константа нелинейного взаимодействия, возникающего вследствие рассеяния атомов конденсата друг на друге, причем вследствие чрезвычайно малой скорости движения атомов учитывается лишь  $s$ -рассеяние с длиной рассеяния  $a_s$ . Мы предполагаем здесь, что  $a_s > 0$  (т. е. и  $g > 0$ ), что соответствует отталкиванию атомов друг от друга.

Уравнение (2), описывающее течение конденсата в общей трехмерной ситуации, допускает упрощение в случае квазиодномерного течения вдоль канала при условии, что течением поперек канала можно пренебречь (см., например, [33]). Предположим для конкретности и в соответствии с текущими экспериментами, что конденсат удерживается в поперечном направлении потенциалом магнитной или лазерной ловушки, причем в хорошем приближении этот потенциал можно считать гармоническим:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2}\omega_{\perp}^2(y^2 + z^2) + V(x, t). \quad (4)$$

В пренебрежении нелинейным взаимодействием в уравнении (2) поперечное движение описывается состояниями частицы в цилиндрически-симметричном гармоническом потенциале с уровнями энергии, равными

$$E_{\perp, n} = \hbar\omega_{\perp} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

причем характерный размер конденсата в радиальном направлении имеет порядок величины

$$a_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\perp}}}. \quad (6)$$

Пусть погонная плотность конденсата вдоль ловушки равна

$$\rho = \int |\psi|^2 dy dz \sim |\psi|^2 a_{\perp}^2. \quad (7)$$

Тогда энергия нелинейного взаимодействия на единицу длины имеет порядок величины

$$g \int |\psi|^4 dy dz \sim g|\psi|^4 a_{\perp}^2 \sim g \frac{\rho^2}{a_{\perp}^2}.$$

Если эта энергия много меньше, чем энергия поперечного движения атомов в первом возбужденном состоянии порядка  $\hbar\omega_{\perp}\rho$ , т. е. выполняется условие

$$a_s a_{\perp}^2 \rho \ll 1, \quad (8)$$

то можно считать, что поперечное движение атомов описывается волновой функцией основного состояния частицы в цилиндрически-симметричном гармоническом осцилляторе. Таким образом, волновая функция конденсата факторизуется:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(x, t)\phi(y, z)e^{-i\omega_{\perp}t}, \quad (9)$$

где

$$\phi(y, z) = \frac{1}{\pi\sqrt{a_{\perp}}} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{2a_{\perp}^2}\right). \quad (10)$$

Подстановка соотношений (4) и (9) в (2) с последующим умножением на  $\phi$  и интегрированием по поперечным координатам дает эффективное уравнение движения конденсата вдоль ловушки [33]:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x, t)\Psi + g_{1D}|\Psi|^2\Psi, \quad (11)$$

где

$$g_{1D} = \frac{g}{2\pi a_{\perp}^2} \quad (12)$$

— перенормированная константа нелинейного взаимодействия.

Уравнение (11) описывает квазиодномерную динамику конденсата. Для дальнейшего удобно перейти к безразмерным переменным. Прежде всего заметим, что дисперсионный и нелинейный члены в уравнении (11) сравниваются, если волновая функция  $\Psi$  существенно изменяется на расстояниях порядка длины когерентности

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mg_{1D}\bar{\rho}}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}mc_s}, \quad (13)$$

где  $\bar{\rho}$  — некое характерное значение плотности в рассматриваемой задаче. Нас интересует течение на расстояниях порядка  $l$ , много больших  $\xi$ , и этот параметр  $l$  можно считать размером конденсата и принять за единицу длины. Далее, в выражении (13) учтено, что длинноволновые возбуждения распространяются вдоль оси  $x$  со скоростью звука

$$c_s = \sqrt{\frac{g_{1D}\bar{\rho}}{m}}, \quad (14)$$

так что величина  $l/c_s$  может служить единицей времени. Наконец, при введении новой волновой функции естественно нормировать плотность газа на ее характерное значение  $\bar{\rho}$ . Тогда, делая замены

$$x \rightarrow lx, \quad t \rightarrow \frac{l}{c_s}t, \quad \Psi \rightarrow \sqrt{\bar{\rho}}\Psi, \quad (15)$$

преобразуем уравнение (11) к виду

$$i\varepsilon\Psi_t = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Psi_{xx} + V(x, t)\Psi + |\Psi|^2\Psi, \quad (16)$$

где потенциал  $V$  также преобразован к новым переменным, для которых мы оставили прежние обозначения. Здесь параметр  $\varepsilon$ , определяемый соотношением

$$\varepsilon = \frac{\hbar}{mc_sl} = \frac{\sqrt{2}\xi}{l}, \quad (17)$$

характеризует отношение дисперсионных эффектов к нелинейным: чем меньше  $\varepsilon$ , тем меньше роль дисперсионных эффектов.

Такая роль параметра  $\varepsilon$  становится очевидной, если перейти к «гидродинамической» форме уравнения (16) с помощью подстановки

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int^x u(x', t) dx'\right), \quad (18)$$

так что отделение вещественной и мнимой частей дает систему

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \rho_x + \varepsilon^2 \left[ \frac{(\rho_x)^2}{8\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{4\rho} \right]_x &= -V_x. \end{aligned} \quad (19)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  эта система сводится к уравнениям теории «мелкой воды» (см. [34]) или же к уравнениям газовой динамики с «показателем адиабаты»  $\gamma = 2$ . При этом, как и должно быть,  $\rho = |\Psi|^2$  играет роль плотности газа, а градиент фазы пропорционален скорости его течения  $u$ . Последний член в левой части второго уравнения системы (19) с высшими производными по  $x$  описывает дисперсионные эффекты и его вклад пропорционален  $\varepsilon^2$ .

В нашем случае потенциал  $V(x)$  обусловлен действием поршня, так что вдали от поршня член с  $V(x)$  в (16) или в правой части второго уравнения (19) может быть опущен. Тогда уравнение (16) сводится к хорошо известному нелинейному уравнению Шредингера и допускает точные решения. Нас интересуют образующиеся при течении конденсата дисперсионные ударные волны, которые могут быть представлены как промодулированные периодические волны, поэтому выпишем здесь периодическое решение уравнений (16) с  $V(x) = 0$  (см., например, [35]):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4}(\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1)^2 + (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1) \times \\ &\quad \times \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}\theta, m\right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$u = U - \frac{C}{\rho}. \quad (21)$$

Здесь

$$C = \frac{1}{8}(-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \times (-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4), \quad (22)$$

$$\theta = x - Ut, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i,$$

$U$  — фазовая скорость нелинейной волны и действительные параметры  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  предполагаются упорядоченными согласно неравенствам

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4. \quad (23)$$

Модуль  $0 \leq m \leq 1$  эллиптической функции определяется выражением

$$m = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_3)}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \quad (24)$$

а амплитуда волны равна

$$a = (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (25)$$

Решение (20), (21) является периодическим по  $x$  с длиной волны, выражающейся через полный эллиптический интеграл первого рода  $K(m)$ :

$$\mathfrak{L} = \int_{\lambda_3}^{\lambda_4} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda)}} = \frac{2K(m)}{\sqrt{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}}. \quad (26)$$

В пределе  $m \rightarrow 1$  (т. е. при  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ ) бегущая волна (20) трансформируется в солитонное решение на фоне постоянной плотности  $\rho_0$ :

$$\rho = \rho_0 - \frac{a_s}{\text{ch}^2(\sqrt{a_s}(x - U_s t))}, \quad (27)$$

где фоновая плотность  $\rho_0$ , амплитуда солитона  $a_s$  и его скорость  $U_s$  выражаются через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$  как

$$\rho_0 = \frac{1}{4}(\lambda_4 - \lambda_1)^2, \quad a_s = (\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1), \quad (28)$$

$$U_s = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4).$$

В другом пределе  $m \rightarrow 0$  (т. е. при  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$ ) амплитуда волны обращается в нуль и плотность обращается в ее фоновое значение  $\rho_0$ , т. е. в этом пределе решение (20) соответствует линейной гармонической

волне на фоне стационарного течения с постоянной плотностью.

В дисперсионной ударной волне параметры  $\lambda_j$  становятся медленными функциями  $x$  и  $t$ , мало меняющимися на одной длине волны  $\mathfrak{L}$  и за один период  $\mathfrak{L}/U$ , а их эволюция в такой промодулированной волне определяется уравнениями Уизема. Для нелинейного уравнения Шредингера они были выведены в работах [36, 37] (см. также [35]) и имеют вид

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + v_i(\lambda) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (29)$$

Характеристические скорости могут быть вычислены по формуле [35, 38]

$$v_i(\lambda) = \left(1 - \frac{\mathfrak{L}}{\partial_i \mathfrak{L}} \partial_i\right) U, \quad (30)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \quad \partial_i \equiv \partial / \partial \lambda_i.$$

Подстановка (26) в (30) дает явные выражения

$$v_1 = \frac{1}{2} \sum \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)K}{(\lambda_4 - \lambda_1)K - (\lambda_4 - \lambda_2)E},$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \sum \lambda_i + \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)K}{(\lambda_3 - \lambda_2)K - (\lambda_3 - \lambda_1)E}, \quad (31)$$

$$v_3 = \frac{1}{2} \sum \lambda_i - \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)K}{(\lambda_3 - \lambda_2)K - (\lambda_4 - \lambda_2)E},$$

$$v_4 = \frac{1}{2} \sum \lambda_i + \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1)K}{(\lambda_4 - \lambda_1)K - (\lambda_3 - \lambda_1)E},$$

где  $E = E(m)$  — эллиптический интеграл второго рода. Переменные  $\lambda_j$  называются римановыми инвариантами, а система (29) — уравнениями Уизема в диагональной римановой форме.

Дисперсионные ударные волны описываются решением уравнений Уизема (29), удовлетворяющим соответствующим граничным условиям. В задаче о поршне можно ограничиться частными решениями, которые получаются следующей спецификацией обобщенного метода годографа, развитого в работе [39]. А именно, будем искать решение уравнений (29) в виде

$$x - v_i(\lambda)t = w_i(\lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (32)$$

где  $v_i(\lambda)$  — скорости (30), а  $w_i(\lambda)$  — искомые функции. Дифференцируя (32) по  $\lambda_j, j \neq i$ , и исключая  $t$  из всех попарных сочетаний получившихся соотношений, приходим к системе уравнений Царева:

$$\frac{1}{w_i - w_j} \frac{\partial w_i}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{v_i - v_j} \frac{\partial v_i}{\partial \lambda_j}, \quad i \neq j, \quad (33)$$

симметрия которых наводит на мысль рассмотреть наряду с (29) другую систему уравнений, в которых  $w_i$  играют роль скорости:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \tau} + w_i(\lambda) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (34)$$

Легко проверить, что условия совместности (29) и (34), т. е. равенства  $\partial^2 \lambda_i / \partial \tau \partial t = \partial^2 \lambda_i / \partial t \partial \tau$ , совпадают с уравнениями (33). Теперь по аналогии с формулой (30) представляем  $w_i$  в «потенциальном» виде:

$$w_i(\lambda) = \left(1 - \frac{\mathcal{L}}{\partial_i \mathcal{L}} \partial_i\right) W, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (35)$$

Подстановка (35) и (30) в (33) дает в результате систему уравнений Эйлера–Пуассона

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} - \frac{1}{2(\lambda_i - \lambda_j)} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} \right) = 0, \quad i \neq j. \quad (36)$$

Легко проверить, что эта система имеет решение

$$W = \frac{\lambda^2}{\sqrt{P(\lambda)}},$$

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i) = \lambda^4 - s_1 \lambda^3 + s_2 \lambda^2 - s_3 \lambda + s_4, \quad (37)$$

$$s_1 = \sum \lambda_i, \quad s_2 = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j,$$

$$s_3 = \sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \quad s_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4.$$

Это решение определено с точностью до постоянного множителя, который выбран здесь так, чтобы разложение (37) по степеням  $1/\lambda$  служило после подстановки в (35) производящей функцией для скоростей  $w_i$ , причем первый нетривиальный член разложения воспроизводил  $v_i$ :

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{W^{(k)}}{\lambda^k} = 1 + \frac{s_1}{2} \frac{1}{\lambda} + \left( \frac{3s_1^2}{16} - \frac{s_2}{4} \right) \frac{1}{\lambda^2} +$$

$$+ \left( \frac{5s_1^3}{32} - \frac{3s_1 s_2}{8} + \frac{s_3}{4} \right) \frac{1}{\lambda^3} + \dots \quad (38)$$

и

$$w_i^{(k)} = W^{(k)} + (2v_i - s_1) \partial_i W^{(k)}, \quad (39)$$

так что  $w_i^{(0)} = 1$ ,  $w_i^{(1)} = v_i$ . Взяв линейную комбинацию выражений (39) в качестве правой части (32), получим частное решение в виде

$$x - v_i(\lambda)t = \sum_{k=0}^N A_k w_i^{(k)}(\lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (40)$$

где число слагаемых  $N$  и постоянные коэффициенты  $A_k$  выбираются согласно условиям задачи. Как мы убедимся ниже, этого частного решения будет достаточно для описания основных характеристик дисперсионных ударных волн, возникающих в бозе-эйнштейновском конденсате под действием поршня. Для дисперсионных ударных волн, описываемых уравнением Кортевега–де Вриза, аналогичные решения были найдены в работах [40, 41].

### 3. ТЕЧЕНИЕ КОНДЕНСАТА ДО МОМЕНТА ОПРОКИДЫВАНИЯ ВОЛНЫ

Мы считаем, что в начальный момент  $t = 0$  поршень находится при  $x = 0$ , конденсат расположен справа от него и покоится, а его плотность постоянна:

$$\rho = \rho_0, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad x > 0. \quad (41)$$

Поршень начинает двигаться по закону

$$x = X(t), \quad X(0) = 0, \quad (42)$$

причем мы считаем, что скорость поршня  $\dot{X}(t)$  не нарастает мгновенно скачком до конечного значения:

$$\dot{X}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0. \quad (43)$$

Тогда до некоторого момента  $t_b$ , называемого моментом опрокидывания волны, течение конденсата можно представить состоящим из двух областей: при  $X(t) < x < c_0 t$  конденсат ускорен поршнем, при  $x > c_0 t$  он находится в покое. Здесь  $c_0 = \sqrt{\rho_0}$  — скорость звука, с которой возмущение распространяется в невозмущенную область. В большей части течения производные  $\rho_x$  малы и поэтому дисперсионным членом в системе (19) можно пренебречь, так что течение описывается уравнениями

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + u u_x + \rho_x = 0. \quad (44)$$

Потенциал поршня действует лишь на его границе с конденсатом, так что в уравнениях (44) он опущен и учитывается посредством граничного условия о том, что в точке соприкосновения конденсата с поршнем скорость течения равна скорости поршня:

$$u(x, t) = \dot{X}(t) \quad \text{при} \quad x = X(t). \quad (45)$$

В то же время на границе с покоящимся конденсатом выполняется условие

$$\rho = \rho_0, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad x = c_0 t. \quad (46)$$

В этом гидродинамическом приближении точка  $x = c_0 t$  является слабым разрывом: производные переменных  $\rho$  и  $u$  испытывают в ней скачок. Фактически он сглаживается дисперсионными эффектами, но до момента опрокидывания эти дисперсионные эффекты малы и ими можно пренебречь. При этом момент опрокидывания  $t_b$  определяется как время возникновения вертикальной касательной в распределениях  $\rho = \rho(x, t)$ ,  $u = u(x, t)$  в зависимости от  $x$ :

$$\rho_x|_{t_b} \rightarrow \infty, \quad u_x|_{t_b} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_b. \quad (47)$$

Уравнения (44) совпадают с уравнениями газовой динамики при квадратичной зависимости давления  $p$  в газе от его плотности:

$$p = \frac{\rho^2}{2}, \quad (48)$$

т. е. при показателе адиабаты  $\gamma = 2$ . Хотя решение задачи о поршне хорошо известно при любом значении  $\gamma$  (см., например, [34]), дадим здесь его краткий вывод в нужной нам форме.

Если ввести римановы инварианты

$$\lambda_{\pm} = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\rho}, \quad (49)$$

то уравнения (44) преобразуются к диагональному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_+}{\partial t} + v_+(\lambda_+, \lambda_-) \frac{\partial \lambda_+}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \lambda_-}{\partial t} + v_-(\lambda_+, \lambda_-) \frac{\partial \lambda_-}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$v_+ = \frac{3}{2}\lambda_+ + \frac{1}{2}\lambda_-, \quad v_- = \frac{1}{2}\lambda_+ + \frac{3}{2}\lambda_-, \quad (51)$$

причем  $\rho$  и  $u$  выражаются через  $\lambda_{\pm}$  как

$$\rho = (\lambda_+ - \lambda_-)^2, \quad u = \lambda_+ + \lambda_-. \quad (52)$$

В нашем случае течение описывается простой волной, в которой один из римановых инвариантов всюду постоянен. Если, как мы предполагаем, поршень движется слева направо, то таким постоянным инвариантом является  $\lambda_-$ :

$$\lambda_- = \frac{u}{2} - \sqrt{\rho} = -\sqrt{\rho_0}, \quad (53)$$

так что второе уравнение (50) удовлетворяется тождественно. Тогда решение  $\lambda_+(x, t)$  первого уравнения (50) задается в неявном виде формулой

$$x - v_+(\lambda_+, \lambda_-)t = w(\lambda_+), \quad (54)$$

где произвольная функция  $w(\lambda_+)$  определяется из граничного условия (45), принимающего в римановых инвариантах вид

$$\lambda_+ - \sqrt{\rho_0} = \dot{X}(t) \quad \text{при} \quad x = X(t). \quad (55)$$

В результате находим для  $w(\lambda_+)$  параметрическую форму:

$$\begin{aligned} w &= X(\tau) - \left( \sqrt{\rho_0} + \frac{3}{2}\dot{X}(\tau) \right) \tau, \\ \lambda_+ &= \sqrt{\rho_0} + \dot{X}(\tau), \end{aligned} \quad (56)$$

где  $\tau$  — параметр. Возвращаясь к переменным  $\rho$  и  $u$ , получаем после подстановки (56) в (54) решение в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= X(\tau) + \left( \sqrt{\rho_0} + \frac{3}{2}\dot{X}(\tau) \right) (t - \tau), \\ u &= \dot{X}(\tau). \end{aligned} \quad (57)$$

Стоит также отметить, что в силу формулы (53) плотность конденсата и его скорость течения связаны в простой волне соотношением

$$\rho = \left( c_0 + \frac{u}{2} \right)^2. \quad (58)$$

Далее случаи равноускоренного и не равноускоренного движения поршня следует рассматривать отдельно.

### 3.1. Равноускоренное движение поршня

Пусть поршень движется с постоянным ускорением:

$$X(t) = \frac{at^2}{2}, \quad a = \text{const.} \quad (59)$$

В этом случае параметр  $\tau$  может быть исключен из формул (57), так что для профилей плотности и скорости течения получаем выражения:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \left\{ \frac{3}{4} \left( \sqrt{\rho_0} + \frac{1}{2}at \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \left[ \left( \sqrt{\rho_0} - \frac{3}{2}at \right)^2 - 4a(x - \sqrt{\rho_0}t) \right]^{1/2} \right\}^2, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{\rho_0} - \frac{3}{2}at \right)^2 - 4a(x - \sqrt{\rho_0}t) \right]^{1/2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \sqrt{\rho_0} - \frac{3}{2}at \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Эти профили приобретают вертикальную касательную на границе с невозмущенной областью в момент

$$t_b = \frac{2\sqrt{\rho_0}}{3a} \tag{62}$$

в точке

$$x_b = \frac{1\rho_0}{3a}. \tag{63}$$

Риманов инвариант  $\lambda_+$  в области течения равен

$$\lambda_+ = u + \sqrt{\rho_0} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\rho_0} + \frac{3}{2}at \right) + \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{\rho_0} - \frac{3}{2}at \right)^2 - 4a(x - \sqrt{\rho_0}t) \right]^{1/2}, \tag{64}$$

и это выражение можно переписать в форме (54):

$$x - \left( \frac{3}{2}\lambda_+ - \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0} \right) t = \frac{\sqrt{\rho_0}}{a}\lambda_+ - \frac{1}{a}\lambda_+^2. \tag{65}$$

Таким образом, мы получили семейство парабол  $x = x(\lambda_+)$ , зависящих от времени  $t$ . При  $t = t_b$  инвариант  $\lambda_+$  как функция от  $x$  стремится к  $\sqrt{\rho_0}$  по корневому закону:

$$\lambda_+ - \sqrt{\rho_0} \approx \sqrt{a(x_b - x)}. \tag{66}$$

При  $t > t_b$  зависимость  $\lambda_+$  от  $x$  становится согласно (65) многозначной, т.е. это решение при таких временах неприменимо. Физически это означает, что при  $t > t_b$  пренебрежение дисперсионными эффектами становится незаконным и после момента опрокидывания в течении конденсата образуется дисперсионная ударная волна.

### 3.2. Не равноускоренное движение поршня

В общем случае, когда ускорение не постоянно, т.е.  $\ddot{X}(t) \neq 0$ , решение (57) описывает волну, профиль которой в момент опрокидывания приобретает точку перегиба с вертикальной касательной. Это означает, что момент опрокидывания соответствует такому значению параметра  $\tau = \tau_b$ , для которого

$$\left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_t = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} \right)_t = 0. \tag{67}$$

Подстановка сюда первого уравнения (57) дает систему, исключая из которой время  $t$ , получаем уравнение для  $\tau_b$ :

$$c_0 + \frac{1}{2}u(\tau_b) = 2\frac{\dot{u}^2(\tau_b)}{\ddot{u}(\tau_b)}, \tag{68}$$

где  $c_0 = \sqrt{\rho_0}$ ,  $u(\tau) = \dot{X}(\tau)$ . Когда  $\tau_b$  найдено, то момент опрокидывания  $t_b$  и его координата  $x_b$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} t_b &= \tau_b + \frac{4\dot{u}(\tau_b)}{3\ddot{u}(\tau_b)}, \\ x_b &= X(\tau_b) + \left( c_0 + \frac{1}{2}u(\tau_b) \right) \frac{4\dot{u}(\tau_b)}{3\ddot{u}(\tau_b)}. \end{aligned} \tag{69}$$

Ясно, что скорость течения в точке опрокидывания равна

$$u_b = u(\tau_b) = \dot{X}(\tau_b). \tag{70}$$

Из соотношений (58) и (68) следует, что плотность конденсата в точке опрокидывания равна

$$\rho_b = \left( c_0 + \frac{1}{2}u_b \right)^2 = 4\frac{\dot{u}^4(\tau_b)}{\ddot{u}^2(\tau_b)}. \tag{71}$$

В силу (69)

$$\left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{t_b} = \left. \frac{\partial x / \partial \tau}{\partial u / \partial \tau} \right|_{\tau_b} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right|_{t_b} = 0,$$

поэтому вблизи точки опрокидывания зависимость  $x = x(u)$  может быть представлена кубической параболой

$$x \approx x_b - \left. \frac{7\ddot{u}^2 - 4\dot{u}\ddot{u}}{12\dot{u}^3\ddot{u}} \right|_{\tau_b} (u - u_b)^3. \tag{72}$$

В силу постоянства инварианта (53) имеем  $\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho_0} = (u - u_b)/2$  и, значит,

$$\lambda_+ - \lambda_b = u - u_b. \tag{73}$$

Поэтому формула (72) может быть написана как

$$x \approx x_b - \left. \frac{7\ddot{u}^2 - 4\dot{u}\ddot{u}}{12\dot{u}^3\ddot{u}} \right|_{\tau_b} (\lambda_+ - \lambda_b)^3. \tag{74}$$

Сравнение с (54) показывает, что эта формула является приближением для (54) в момент  $t = t_b$  и определяет тем самым приближение для функции  $w(\lambda_+)$ . Отсюда следует приближенное решение в форме

$$x - \left( \frac{3}{2}\lambda_+ - \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0} \right) (t - t_b) \approx x_b - \alpha(\lambda_+ - \lambda_b)^3, \tag{75}$$

где

$$\alpha = \left. \frac{7\ddot{u}^2 - 4\dot{u}\ddot{u}}{12\dot{u}^3\ddot{u}} \right|_{\tau_b}. \tag{76}$$

Оно справедливо до тех пор, пока профиль волны достаточно близок к кубической параболе.

Конкретизируем эти формулы для случая движения поршня по закону

$$x = X(t) = \frac{at^3}{3}. \quad (77)$$

Тогда из (68) и (69) легко находим, что

$$\tau_b = \sqrt{\frac{2c_0}{7a}}, \quad t_b = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{14c_0}{a}}, \quad x_b = \frac{(2c_0)^{3/2}}{(7a)^{1/2}}, \quad (78)$$

а (70) и (71) дают

$$u_b = \frac{2}{7}c_0 = \frac{2}{7}\sqrt{\rho_0}, \quad \rho_b = \frac{64}{49}\rho_0, \quad (79)$$

т. е. риманов инвариант  $\lambda_+$  в точке опрокидывания равен

$$(\lambda_+)_b \equiv \lambda_b = \frac{9}{7}\sqrt{\rho_0}. \quad (80)$$

Решение (75) принимает вид

$$x - \left(\frac{3}{2}\lambda_+ - \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0}\right)(t - t_b) \approx \approx x_b - \frac{7^{5/2}}{3 \cdot 2^{11/2}} \frac{1}{\rho_0^{3/4} a^{1/2}} (\lambda_+ - \lambda_b)^3. \quad (81)$$

#### 4. ОБРАЗОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Мы получили решение уравнений динамики конденсата в бездисперсионном пределе, который описывает эволюцию волны, образуемой поршнем, до момента ее опрокидывания. Уже в момент опрокидывания производные  $\rho$  по  $x$  стремятся к бесконечности, так что пренебрегать дисперсионным членом в системе (19) нельзя. Тем более это относится к временам после опрокидывания, когда бездисперсионное решение становится многозначным. Как показывает численное решение уравнений (19), при приближении к моменту опрокидывания в окрестности этой точки образуется область нелинейных осцилляций — дисперсионная ударная волна. Гуревич и Питаевский предположили [42], что она может быть представлена в виде промодулированной периодической волны (20), (21) с параметрами  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , медленно меняющимися вдоль области осцилляций, так что их эволюция описывается уравнениями Уизема (29). При этом на одном своем конце дисперсионная ударная волна имеет вид последовательности солитонов, а на другом конце она вырождается в малоамплитудные осцилляции. В этом приближении дисперсионная ударная волна занимает конечную,

но расширяющуюся со временем область пространства, сшиваясь в конечных точках  $x_-(t)$  и  $x_+(t)$  с гладким бездисперсионным решением. Таким образом, бездисперсионные решения (65) и (75) остаются справедливыми и после опрокидывания, но только вне области дисперсионной ударной волны. Покажем, что параметры  $N$  и  $A_k$  в решении (40) уравнений Уизема могут быть подобраны так, что это решение сшивается с бездисперсионным решением, давая тем самым полное описание течения конденсата под действием поршня.

Отметим прежде всего, что выражения для уиземовских скоростей (31) в конечных точках  $x_-(t)$  и  $x_+(t)$ , где  $m = 1$  и  $m = 0$ , переходят в выражения

$$v_1 = \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_4, \quad v_4 = \frac{3}{2}\lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_1, \\ v_2 = v_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4) \quad (82)$$

при  $\lambda_2 = \lambda_3$  ( $m = 1$ )

и

$$v_1 = \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2, \quad v_2 = \frac{3}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1, \\ v_3 = v_4 = \lambda_4 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{2(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)}{2\lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_1} \quad (83)$$

при  $\lambda_3 = \lambda_4$  ( $m = 0$ )

(другой малоамплитудный предел  $\lambda_1 = \lambda_2$  нам не понадобится и соответствующие формулы мы не выписываем). Таким образом, система уравнений Уизема расщепляется в этих предельных случаях на две подсистемы, причем при  $m = 1$  уравнения для  $\lambda_1$  и  $\lambda_4$ , а при  $m = 0$  уравнения для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  совпадают соответственно с уравнениями (50), (51) для  $\lambda_-$  и  $\lambda_+$ . Следовательно, решение уравнений Уизема будет сшиваться с гладким решением, если

$$\lambda_1 = \lambda_- = -\sqrt{\rho_0} = \text{const} \quad (84)$$

и на границах дисперсионной ударной волны выполняются условия

$$\lambda_4 = \lambda_+ \quad \text{при} \quad x = x_-(t), \quad m = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 \quad (85)$$

и

$$\lambda_2 = \lambda_+ \quad \text{при} \quad x = x_+(t), \quad m = 0, \quad \lambda_4 = \lambda_3, \quad (86)$$

где  $x_-(t)$  и  $x_+(t)$  даются формулами (65) и (75) для равноускоренного и не равноускоренного движения поршня, в правых частях которых стоят многочлены по  $\lambda_+$  степени 2 или 3, соответственно. Как будет показано ниже, решения уравнений Уизема (32)



с  $w_i^{(k)}$  в виде (39) как раз обладают тем свойством, что две из четырех скоростей  $w_i^{(k)}$  оказываются в предельных случаях  $m = 1$  и  $m = 0$  многочленами степени  $k$ . Поэтому, взяв в формуле (40) число  $N$  равным  $N = 2$  или  $N = 3$ , мы всегда можем подобрать коэффициенты  $A_k$  так, чтобы удовлетворить условиям сшивки. Это замечание дает способ решения задачи о формировании дисперсионной ударной волны при движении конденсата под действием поршня.

**4.1. Эволюция дисперсионной ударной волны при равноускоренном движении поршня**

В случае равноускоренного движения поршня нам необходимы предельные выражения для  $w_i^{(k)}$ . Соответствующие предельные переходы в (39) дают

$$\begin{aligned} w_2^{(2)} &= w_3^{(2)} = \frac{1}{16}(3\lambda_1^2 + 8\lambda_3^2 + 4\lambda_3\lambda_4 + \\ &\quad + 3\lambda_4^2 + 2\lambda_1(2\lambda_3 + \lambda_4)), \\ w_1^{(2)} &= \frac{3}{16}(5\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_4 + \lambda_4^2), \\ w_4^{(2)} &= \frac{3}{16}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_4 + 5\lambda_4^2) \end{aligned} \tag{87}$$

при  $\lambda_2 = \lambda_3$  ( $m = 1$ ) и

$$\begin{aligned} w_1^{(2)} &= \frac{3}{16}(5\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2), \\ w_2^{(2)} &= \frac{3}{16}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2), \\ w_3^{(2)} &= w_4^{(2)} = \frac{1}{16} \left[ 3(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_4)}{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4} - \right. \\ &\quad \left. - 4(\lambda_4(2\lambda_2 + \lambda_4) + \lambda_1(\lambda_2 + 2\lambda_4)) \right] \end{aligned} \tag{88}$$

при  $\lambda_4 = \lambda_3$  ( $m = 0$ ).

Теперь учтем, что опрокидывание волны происходит на границе с невозмущенной областью, где  $\lambda_+ = \sqrt{\rho_0} = \text{const}$ . Поэтому в требуемом решении уравнений Уизема два инварианта Римана постоянны:

$$\lambda_1 = \lambda_- = -\sqrt{\rho_0}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\rho_0}, \tag{89}$$

а  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned} x - v_3(\lambda)t &= \frac{2}{5a} \left( \rho_0 + \sqrt{\rho_0}v_3(\lambda) - \frac{8}{3}w_3^{(2)}(\lambda) \right), \\ x - v_4(\lambda)t &= \frac{2}{5a} \left( \rho_0 + \sqrt{\rho_0}v_4(\lambda) - \frac{8}{3}w_4^{(2)}(\lambda) \right), \end{aligned} \tag{90}$$

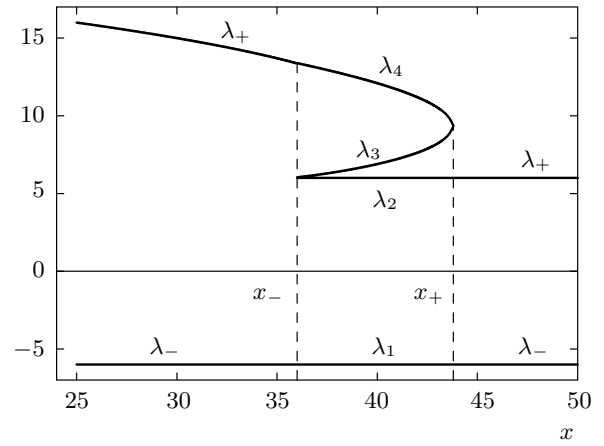


Рис. 1. Графики римановых инвариантов в дисперсионной ударной волне в зависимости от координаты  $x$  в фиксированный момент времени  $t$

следующими из формулы (40) с коэффициентами  $A_k$ , подобранными так, чтобы правые части переходили в (65) при  $\lambda_2 = \lambda_3$  ( $m = 1$ ) и  $\lambda_4 = \lambda_3$  ( $m = 0$ ). Функции  $\lambda_3(x, t)$  и  $\lambda_4(x, t)$ , подставленные вместе с инвариантами (89) в формулу (28), дают зависимость плотности конденсата в дисперсионной ударной волне от  $x$  и  $t$ . Получаемая таким образом зависимость римановых инвариантов от координаты  $x$  в фиксированный момент времени  $t$  показана на рис. 1.

Рассмотрим границы области, занимаемой ударной волной, согласно найденному решению. В солитонном пределе  $\lambda_3 = \lambda_2$  на границе  $x = x_-(t)$  уравнения (90) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}(\sqrt{\rho_0} + \lambda_4)t &= \frac{2}{5a} \left[ \rho_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0}(\sqrt{\rho_0} + \lambda_4) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6}(7\rho_0 + 2\sqrt{\rho_0}\lambda_4 + 3\lambda_4^2) \right], \\ x - \frac{1}{2}(-\sqrt{\rho_0} + 3\lambda_4)t &= \\ &= \frac{2}{5a} \left[ \rho_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0}(-\sqrt{\rho_0} + 3\lambda_4) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(\rho_0 - 2\sqrt{\rho_0}\lambda_4 + 5\lambda_4^2) \right]. \end{aligned} \tag{91}$$

Вычтя из одного уравнения другое и поделив разность на  $\lambda_4 - \sqrt{\rho_0}$ , получим

$$t = \frac{4}{5a}\lambda_4 - \frac{2\sqrt{\rho_0}}{15a}. \tag{92}$$

Как и должно быть, при  $\lambda_4 = \sqrt{\rho_0}$  эта формула воспроизводит значение (62) для момента опрокидыва-

ния  $t_b$ . Из соотношения (92) находим зависимость  $\lambda_4$  от времени:

$$\lambda_4 = \frac{5}{4}at + \frac{\sqrt{\rho_0}}{6}, \quad (93)$$

и подстановка этой формулы в любое из уравнений (91) дает

$$x_-(t) = \frac{5}{36} \frac{\rho_0}{a} + \frac{7}{12} \sqrt{\rho_0} t + \frac{5}{16} at^2. \quad (94)$$

При  $t = t_b$  формула (94) дает координату (63) точки опрокидывания. Как видно из (94), солитонная граница дисперсионной ударной волны движется медленнее, чем поршень, так что, как легко найти, приравнивая (60) и (94), поршень догонит ударную волну в момент

$$t_c = \frac{10}{3} \frac{\sqrt{\rho_0}}{a}. \quad (95)$$

После этого момента область  $X(t) \leq x \leq x_-(t)$ , занимаемая бездисперсионным гладким решением, исчезает и между поршнем и однофазной ударной волной, описываемой решением (91), возникает более сложная двухфазная структура, исследование которой находится за рамками настоящей работы. Поэтому мы ограничим наше рассмотрение временами из диапазона

$$\frac{2}{3} \frac{\sqrt{\rho_0}}{a} < t < \frac{10}{3} \frac{\sqrt{\rho_0}}{a}, \quad (96)$$

когда течение конденсата описывается бездисперсионным решением, в которое встроена дисперсионная ударная волна. В этом случае на границе  $x_-(t)$  имеем  $m = 1$ , т. е. гладкое решение граничит с темным солитоном, амплитуда которого равна

$$A = (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)|_{x_-} = \frac{5}{2} \sqrt{\rho_0} at - \frac{5}{3} \rho_0. \quad (97)$$

Теперь обратимся к малоамплитудному пределу  $\lambda_3 = \lambda_4$  на границе  $x = x_+(t)$ , где оба уравнения (91) сводятся к одному:

$$x - \frac{2\lambda_4^2 - \rho_0}{\lambda_4} t = \frac{2}{5a} \left( 3\rho_0 + 2\sqrt{\rho_0} \lambda_4 - \frac{\rho_0^{3/2}}{\lambda_4} - 4\lambda_4^2 \right). \quad (98)$$

На границе  $x_+(t)$  координата  $x$  имеет максимальное значение, так что уравнение  $(\partial x / \partial \lambda_4)_t = 0$  с функцией  $x(\lambda_4, t)$ , определяемой выражением (98), дает зависимость  $t$  от  $\lambda_4$  на этой границе:

$$t = \frac{2}{5a} \frac{8\lambda_4^3 - 2\sqrt{\rho_0}\lambda_4^2 - \rho_0^{3/2}}{2\lambda_4^2 + \rho_0} = \frac{2\sqrt{\rho_0}}{5a} \frac{8y^3 - 2y^2 - 1}{2y^2 + 1}, \quad (99)$$

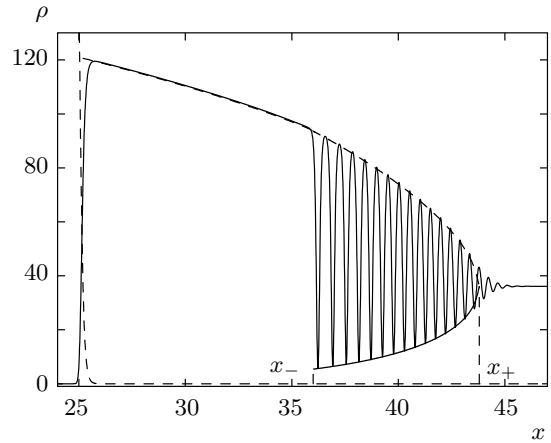


Рис. 2. Распределение плотности в дисперсионной ударной волне после момента опрокидывания

где  $y = \lambda_4 / \sqrt{\rho_0}$ . Подстановка (99) в (98) дает

$$x_+ = \frac{2\rho_0}{5a} \cdot \frac{8y^4 - 6y^2 + 3}{2y^2 + 1}. \quad (100)$$

Таким образом, функция  $x_+(t)$  задается в параметрической форме выражениями (99), (100), где параметр  $y$  изменяется в интервале  $1 \leq y < \infty$ . При  $y = 1$  эти формулы дают момент времени (62) и координату точки опрокидывания (63). При  $t \rightarrow \infty$ , когда  $y \rightarrow \infty$ , получаем явную асимптотическую формулу

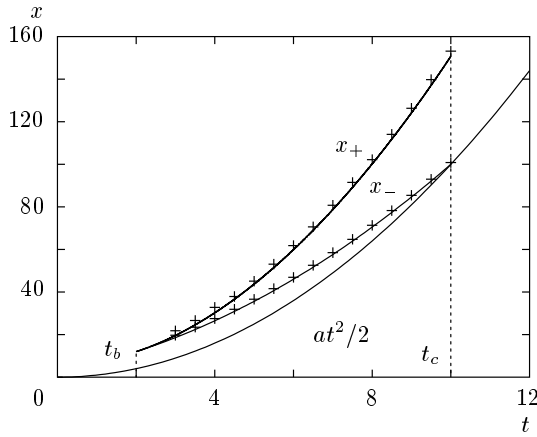
$$x_+(t) \approx \frac{5}{8} at^2, \quad (101)$$

т. е. эта граница движется быстрее, чем поршень.

Мы сравнили полученные аналитические результаты с точным численным решением уравнения Гросса–Питаевского. На рис. 2 показан график плотности конденсата, рассчитанный в момент  $t = t_b$  для параметров  $\rho_0 = 36$ ,  $a = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ . Штриховой линией изображена огибающая промодулированной волны (28), где  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , найдены из уравнений (89), (90). Как мы видим, имеется очень хорошее согласие с численным расчетом.

Зависимости положений границ дисперсионной ударной волны от времени показаны на рис. 3, где опять численные результаты, указанные крестиками, хорошо согласуются с аналитическими, представленными сплошными линиями, построенными по формулам (94) и (99), (100).

Таким образом, развитая теория дает вполне удовлетворительное описание течения конденсата под действием равноускоренного поршня вплоть до момента (95), когда поршень догоняет дисперсионную ударную волну.



**Рис. 3.** Движение границ дисперсионной ударной волны: сплошные линии построены по формулам (94) и (99), (100), а численные результаты показаны крестиками. Показан также закон движения поршня, так что формула для  $x_-(t)$  справедлива лишь до момента времени  $t_c$ , когда соответствующая кривая пересекается с кривой  $X(t) = at^2/2$

**4.2. Эволюция дисперсионной ударной волны непосредственно после опрокидывания при не равноускоренном движении поршня**

В общем случае гладкое решение, с которым должно сшиваться промодулированное периодическое решение, описывающее дисперсионную ударную волну, аппроксимируется кубической параболой (75). Соответственно, в решении (40) уравнений Уизема следует взять  $N = 3$ , поскольку необходимые для сшивки предельные выражения для  $w_i^{(3)}$  при  $m \rightarrow 1$  и  $m \rightarrow 0$  являются многочленами третьей степени от инвариантов Римана. В самом деле, определение (39) дает

$$\begin{aligned}
 w_1^{(3)} &= \frac{1}{32}(35\lambda_1^3 + 15\lambda_1^2\lambda_4 + 9\lambda_1\lambda_4^2 + 5\lambda_4^3), \\
 w_2^{(3)} = w_3^{(3)} &= \frac{1}{32}(5\lambda_1^3 + 16\lambda_3^3 + 8\lambda_3^2\lambda_4 + 6\lambda_3\lambda_4^2 + \\
 &+ 5\lambda_4^3 + 3\lambda_1^2(2\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_1(8\lambda_3^2 + 4\lambda_3\lambda_4 + 3\lambda_4^2)), \\
 w_4^{(3)} &= \frac{1}{32}(5\lambda_1^3 + 9\lambda_1^2\lambda_4 + 15\lambda_1\lambda_4^2 + 35\lambda_4^3)
 \end{aligned}
 \tag{102}$$

при  $\lambda_2 = \lambda_3$  ( $m = 1$ ) и

$$\begin{aligned}
 w_1^{(3)} &= \frac{1}{32}(35\lambda_1^3 + 15\lambda_1^2\lambda_2 + 9\lambda_1\lambda_2^2 + 5\lambda_2^3), \\
 w_2^{(3)} &= \frac{1}{32}(5\lambda_1^3 + 9\lambda_1^2\lambda_4 + 15\lambda_1\lambda_2^2 + 35\lambda_2^3), \\
 w_3^{(3)} = w_4^{(3)} &= [4\lambda_1^4 + 5\lambda_2^4 - 4\lambda_1^3(\lambda_2 - 2\lambda_4) + \\
 &+ 8\lambda_2^3\lambda_4 + 16\lambda_2^2\lambda_4^2 + 64\lambda_2\lambda_4^3 - 128\lambda_4^4 - \\
 &- 2\lambda_1^2(\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_4 - 8\lambda_4^2) - 4\lambda_1(\lambda_2^3 + 2\lambda_2^2\lambda_4 + \\
 &+ 8\lambda_2\lambda_4^2 - 16\lambda_4^3)] [32(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4)]^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{103}$$

при  $\lambda_4 = \lambda_3$  ( $m = 0$ ).

Для упрощения вычислений удобно сделать преобразование переменных (см. [43])

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x'}{\sqrt{\alpha}} + x_b + 2\lambda_b(t - t_b), \quad t = t_b + t', \\
 \lambda_i &= \frac{\lambda'_i}{\sqrt{\alpha}} + \lambda_b,
 \end{aligned}
 \tag{104}$$

так что решение (75) принимает простой вид

$$x' - \frac{1}{2}(\lambda'_- + 3\lambda'_+)t' = -(\lambda'_+)^3.
 \tag{105}$$

Тогда в новых переменных искомое решение равно

$$\begin{aligned}
 \lambda'_1 &= -\sqrt{\alpha}(\sqrt{\rho_0} + \lambda_b) = \text{const}, \\
 x' - v'_i(\lambda')t' &= -\frac{32}{35}w_i^{(3)'}(\lambda') + \frac{16}{35}w_i^{(2)'}(\lambda')\lambda'_1 + \\
 &+ \frac{2}{35}v'_i(\lambda')(\lambda'_1)^2 + \frac{1}{35}(\lambda'_1)^3, \quad i = 2, 3, 4,
 \end{aligned}
 \tag{106}$$

где последние три уравнения определяют неявно  $\lambda_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ , как функции от  $x$  и  $t$ .

Формулы для движения границ в «штрихованных» переменных находятся аналогично [43]. На солитонной границе  $x'_-(t')$  уравнения (106) с  $i = 2$  и  $i = 4$  сводятся к следующим:

$$\begin{aligned}
 x' - \frac{1}{2}(\lambda'_1 + 3\lambda'_4)t' &= -(\lambda'_4)^3, \\
 x' - \frac{1}{2}(\lambda'_1 + 2\lambda'_2 + \lambda'_4)t' &= \\
 &= -\frac{1}{35}(16\lambda'_2{}^3 + 8\lambda'_2{}^2 + 6\lambda'_2\lambda'_4{}^2 + 5\lambda'_4{}^3),
 \end{aligned}
 \tag{107}$$

и разность этих уравнений дает

$$t' = \frac{2}{35}(8\lambda'_2{}^2 + 12\lambda'_2\lambda'_4 + 15\lambda'_4{}^2).
 \tag{108}$$

В уравнении с  $i = 3$  полагаем  $\lambda'_3 = \lambda'_2 + \delta$  и замечаем, что вблизи  $x_-$  координата  $x$  как функция  $\delta$  имеет максимум, так что

$$-\delta v'_3 \cdot t' = \delta w'_3,
 \tag{109}$$

что дает еще одно выражение для  $t'$  в зависимости от римановых инвариантов:

$$t' = \frac{2}{35}(24\lambda_2'^2 + 8\lambda_2'\lambda_4' + 3\lambda_4'^2). \quad (110)$$

Приравнявая выражения (108) и (110) друг другу, находим связь между  $\lambda_2'$  и  $\lambda_4'$  при  $x = x_-$ :

$$\lambda_2' = -\frac{3}{4}\lambda_4'. \quad (111)$$

Тогда подстановка этого соотношения в (108) или (110) дает зависимость  $\lambda_4'$  от  $t'$ :

$$\lambda_4' = \sqrt{\frac{5}{3}}t'. \quad (112)$$

И, наконец, подстановка (112) в первое уравнение (107) дает закон движения солитонной границы:

$$x'_-(t') = \frac{1}{2}\lambda_1't' - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{3}}(t')^{3/2}. \quad (113)$$

Обратимся теперь к границе  $x'_+(t')$ , где  $\lambda_3' = \lambda_4'$  и уравнения (107) с  $i = 2$  и  $i = 4$  сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} x' - \frac{1}{2}(\lambda_1' + 3\lambda_2')t' &= -\lambda_2'^3, \\ x' - \frac{\lambda_1'^2 - 2\lambda_1'\lambda_2' + \lambda_2'^2 + 4\lambda_1'\lambda_4' - 8\lambda_4'^2}{2(\lambda_1' + \lambda_2' - 2\lambda_4')}t' &= \\ &= -\frac{1}{35(\lambda_1' + \lambda_2' - 2\lambda_4')} [5\lambda_2'^4 + 8\lambda_2'^3\lambda_4' + \\ &\quad + 16\lambda_2'^2\lambda_4'^2 + 64\lambda_2'\lambda_4'^3 - 128\lambda_4'^4 - \\ &\quad - 7\lambda_1'(\lambda_2'^3 + 2\lambda_2'^2\lambda_4' + 8\lambda_2'\lambda_4'^2 - 16\lambda_4'^3)]. \end{aligned} \quad (114)$$

Их разность дает связь между  $t'$  и значениями римановых инвариантов на этой границе:

$$t' = \frac{2}{35} \frac{1}{4\lambda_4' - \lambda_2' - 3\lambda_1'} \left[ 8(\lambda_4' - 7\lambda_1') \times \right. \\ \left. \times (3\lambda_2'^2 + 4\lambda_2'\lambda_4' + 8\lambda_4'^2) - 15\lambda_2'^3 \right]. \quad (115)$$

Второе выражение находим из уравнения

$$-\delta v_4' \cdot t' = \delta w_4, \quad (116)$$

аналогичного (108):

$$\begin{aligned} t' = \frac{2}{35} \left[ 3\lambda_1'^2 + 3\lambda_2'^2 + 2\lambda_1'(\lambda_2' - 4\lambda_4') - \right. \\ \left. - 8\lambda_2'\lambda_4' + 8\lambda_1'^2 \right]^{-1} [-9\lambda_2'^4 - 16\lambda_2'^3\lambda_4' - \\ - 80\lambda_2'^2\lambda_4'^2 + 384\lambda_4'^4 + 7\lambda_1'^2(\lambda_2'^2 + 8\lambda_2'\lambda_4' - 24\lambda_4'^2) + \\ + 10\lambda_1'(\lambda_2'^3 + 4\lambda_2'^2\lambda_4' - 32\lambda_2'\lambda_4'^2 + 48\lambda_4'^3)]. \end{aligned} \quad (117)$$

Теперь приравнивание выражений (115) и (117) дает связь между  $\lambda_2'$  и  $\lambda_4'$  в неявном виде:

$$21\lambda_1'^2(4\lambda_4' + \lambda_2') - 10\lambda_1'(20\lambda_4'^2 + 2\lambda_2'\lambda_4' + \lambda_2'^2) + \\ + 16\lambda_4'(8\lambda_4'^2 - \lambda_2'\lambda_4' - \lambda_2'^2) + 9\lambda_2'^3 = 0. \quad (118)$$

Уравнения (115) и (118) определяют функции  $\lambda_2'(t')$  и  $\lambda_4'(t')$  и их последующая подстановка в первое уравнение (114) дает закон движения малоамплитудной границы  $x'_+(t')$  дисперсионной ударной волны.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем решение в виде

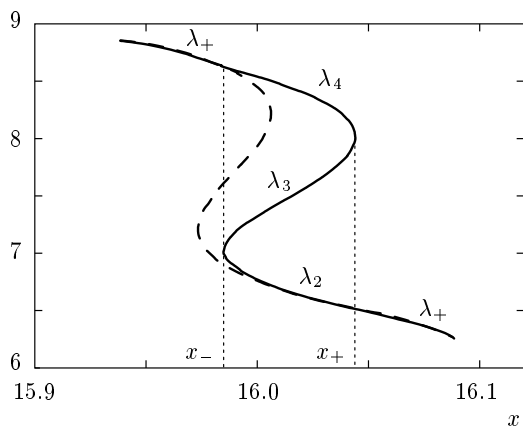
$$\begin{aligned} x - (t - t_b)v_i(\lambda) &= x_b - \alpha \sum_{k=0}^3 A_k w_i^{(k)}, \\ A_3 &= \frac{32}{35}, \quad A_2 = -\frac{16}{35}(\lambda_1 + 7\lambda_b), \\ A_1 &= -\frac{2}{35}\lambda_1^2 + \frac{4}{5}\lambda_1\lambda_b + 2\lambda_b^2, \\ A_0 &= \frac{1}{35}(-\lambda_1^3 + 7\lambda_1^2\lambda_b - 35\lambda_1\lambda_b^2 - 35\lambda_b^3). \end{aligned} \quad (119)$$

Проиллюстрируем найденное решение частным случаем движения поршня по закону (77), когда после момента времени  $t_b$  в точке  $x_b$  (см. (78)) возникает дисперсионная ударная волна. Вблизи точки опрокидывания гладкое решение аппроксимируется кубической параболой (81), в которую встраивается дисперсионная ударная волна, описываемая решением

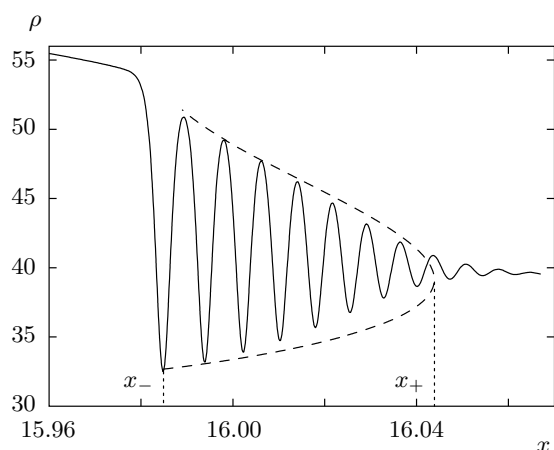
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\sqrt{\rho_0}, \\ x - (t - t_b)v_i(\lambda) &= \sqrt{\frac{7}{2a}} \left[ \frac{2\rho_0^{3/4}}{3} - \right. \\ &\quad - \frac{17\rho_0^{1/4}}{15}v_i(\lambda) + \frac{28}{15\rho_0^{1/4}}w_i^{(2)}(\lambda) - \\ &\quad \left. - \frac{7}{15\rho_0^{3/4}}w_i^{(3)}(\lambda) \right], \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (120)$$

Зависимости римановых инвариантов  $\lambda_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ , от координаты  $x$  в фиксированный момент времени  $t$  показана на рис. 4, где штриховой линией указана кубическая аппроксимация (81).

Подстановка найденных римановых инвариантов в формулу (28) дает осцилляции плотности в дисперсионной ударной волне. Огибающая этих осцилляций сравнивается с точным численным решением уравнения Гросса–Питаевского на рис. 5. Учитывая, что наше гладкое решение является приближением к точному, согласие аналитических и численных результатов следует считать удовлетворительным. Нужно отметить, однако, что с увеличением



**Рис. 4.** Зависимости римановых инвариантов от  $x$  в фиксированный момент времени  $t$ . Штриховой линией показано бездисперсионное решение, соответствующее кубической аппроксимации (81). Постоянный риманов инвариант  $\lambda_1 = -\sqrt{\rho_0}$  на рисунке не показан



**Рис. 5.** Сравнение аналитической огибающей дисперсионной ударной волны (штриховая линия) с точным численным решением уравнения Гросса – Питаевского с граничным условием, соответствующим движению поршня по закону  $X(t) = at^3/3$

времени, когда область, занимаемая дисперсионной ударной волной, все сильнее отклоняется от области кубической аппроксимации гладкого решения, согласие ухудшается. Тем не менее развитая теория дает удовлетворительное описание дисперсионной ударной волны в начальный период ее эволюции.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формирование дисперсионных ударных волн является важным процессом в динамике бозе-эйнштейновского конденсата. Фактически, любое достаточно сильное возмущение конденсата может трансформироваться на каком-то этапе его эволюции в дисперсионную ударную волну. В этом смысле задача о поршне, рассмотренная в работе [30] для случая постоянной скорости поршня и в настоящей работе для равноускоренного и произвольного движения поршня, является одной из простейших задач, позволяющих моделировать типичные физические ситуации. В частности, потенциал лазерного луча, расталкивающего конденсат в эксперименте [15], может рассматриваться в некотором приближении как поршень, и создаваемая им волна генерирует после опрокидывания наблюдаемую экспериментально дисперсионную ударную волну (см. [15, 16]).

Следует отметить также, что проблема гиперзвукового обтекания конденсатом тонких тел также сводится в главном приближении к задаче о движении поршня (см. [24, 44]), так что построенная в настоящей работе теория может найти применение при теоретическом описании транспорта конденсата через неоднородные каналы.

Заметим, наконец, что в случае произвольного движения поршня мы ограничились лишь стадией эволюции дисперсионной ударной волны непосредственно после опрокидывания, допускающей решение в замкнутом виде. Дальнейшая эволюция дисперсионной ударной волны требует привлечения более общего решения уравнений Уизема (см., например, [44]), что находится за рамками настоящей работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-02-00499).

### ЛИТЕРАТУРА

1. D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **77**, 420 (1996).
2. M. Edwards, P. A. Ruprecht, K. Burnett, R. J. Dodd, and C. W. Clark, Phys. Rev. Lett. **77**, 1671 (1996).
3. S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **77**, 2360 (1996).
4. Y. Castin and R. Dum, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996).

5. Yu. Kagan, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2670 (1996).
6. Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996).
7. U. Ernst, A. Marte, F. Schreck, J. Schuster, and G. Rempe, *Europhys. Lett.* **41**, 1 (1998).
8. А. М. Камчатнов, *ЖЭТФ* **125**, 1041 (2004).
9. M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
10. K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
11. M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 553 (1997).
12. K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *Nature* **417**, 150 (2002).
13. S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999).
14. J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, C. W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, and W. D. Phillips, *Science* **287**, 97 (2000).
15. M. A. Hofer, M. J. Ablowitz, I. Coddington, E. A. Cornell, P. Engels, and V. Schweikhard, *Phys. Rev. A* **74**, 023623 (2006).
16. А. М. Камчатнов, А. Гаммал, и Р. А. Краенкел, *Phys. Rev. A* **69**, 063605 (2004).
17. B. Damski, *Phys. Rev. A* **69**, 043610 (2004).
18. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, *ЖЭТФ* **92**, 1684 (1987).
19. G. A. El, V. V. Geogjaev, A. V. Gurevich, and A. L. Krylov, *Physica D* **87**, 186 (1995).
20. I. Carusotto, S. X. Hu, L. A. Collins, and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 260403 (2006).
21. Yu. G. Gladush, G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. A* **75**, 033619 (2007).
22. Ю. Г. Гладуш, А. М. Камчатнов, *ЖЭТФ* **132**, 589 (2007).
23. Yu. G. Gladush, L. A. Smirnov, and A. M. Kamchatnov, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **41**, 165301 (2008).
24. G. A. El and A. M. Kamchatnov, *Phys. Lett. A* **350**, 192 (2006); erratum: *Phys. Lett. A* **352**, 554 (2006).
25. G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 180405 (2006).
26. А. М. Камчатнов и Л. П. Питаевский, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 160402 (2008).
27. P. Engels and C. Atherton, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 160405 (2007).
28. V. Hakim, *Phys. Rev. E* **55**, 2835 (1997).
29. A. M. Leszczyszyn, G. A. El, Yu. G. Gladush, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. A* **79**, 063608 (2009).
30. M. A. Hofer, M. J. Ablowitz, and P. Engels, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 084504 (2008).
31. E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
32. Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **40**, 646 (1961).
33. V. M. Pérez-García, H. Michinel, and H. Herrero, *Phys. Rev. A* **57**, 3837 (1998).
34. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2006).
35. А. М. Камчатнов, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations*, World Sci., Singapore (2000).
36. M. G. Forest and J. E. Lee, in *Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness*, ed. by C. Dafermos et al., IMA Volumes on Mathematics and its Applications **2**, Springer, New York (1987).
37. М. В. Павлов, *ТМФ* **71**, 351 (1987).
38. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Г. А. Эль, *ЖЭТФ* **101**, 1797 (1992).
39. С. П. Царев, *Изв. РАН, сер. матем.* **54**, 1048 (1990).
40. В. Р. Кудашев, С. Е. Шарипов, *ТМФ* **85**, 205 (1990).
41. Г. В. Потемин, *УМН* **43**, 211 (1988).
42. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **65**, 590 (1973).
43. А. М. Камчатнов, Р. А. Краенкел, и В. А. Умаров, *Phys. Rev. E* **66**, 036609 (2002).
44. G. A. El, A. M. Kamchatnov, V. V. Khodorovskii, E. S. Annibale, and A. Gammal, arXiv:0906.2394.