ЖЭТФ, 2010, том 137, вып. 2, стр. 241–249

ИЗЛУЧЕНИЕ АКСИОНОВ ВОДОРОДОПОДОБНЫМ АТОМОМ В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. В. Скобелев *

Московский государственный индустриальный университет
115280, Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 июня 2009 г.

Рассмотрен резонансный эффект излучения аксионов водородоподобным атомом в сильном магнитном поле $B \gg B_0 = m^2/e = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс, стимулированный поляризацией электронно-позитронного вакуума. Вероятность и интенсивность излучения составляет величину порядка $(B/B_0) \cdot 10^{-12}$ от характеристик электромагнитного излучения, что на много порядков превышает обычное соотношение. Показано, что при температуре ранней Вселенной $\lesssim (Z\alpha)^2 m$ вклад резонансного механизма доминирует. Полученное в работе соотношение между концентрациями реликтовых фотонов и аксионов не может, однако, объяснить происхождение холодной темной материи. При этом плотность энергии аксионов в «нашу эпоху» составляет $10^{-4}(B/B_0)$ эВ/см^3.

1. ВВЕДЕНИЕ

Значение гипотетического аксиона как кандидата на роль носителя скрытой массы Вселенной подвергается сомнению из-за его малой константы связи с «обычными» частицами и, соответственно, невозможностью практически нужной для этого трансформации материи в аксионы.

Так, лагранжиан взаимодействия аксиона с электронами имеет вид

$$L_a = \frac{c_e}{2f}\left(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^5\psi\right)\frac{\partial a}{\partial x^{\mu}}, \qquad (1)$$

где $c_e \sim 1$, $f \sim 10^{10}$ ГэВ, и вершина (eea) подавлена именно по этой причине. По астрофизическим и космологическим соображениям допустимы значения f в интервале 10^9–10^{12} ГэВ. Приведенные в обзоре [1] последние данные в основном согласуются с этим. В литературе чаще приводится упомянутое «круглое» значение 10^{10} ГэВ [2], которое для оценок иногда применяется в нашей работе (формулы (57), (58), (60а), (65), (66), (68)). Следует отметить, что в работе [3] приведена аргументация, согласно которой значение f коррелирует с величиной магнитного поля в ранней Вселенной и может достигать 10^{13}–10^{15} ГэВ. Например, при $B \gtrsim 10^{24}$ Гс f имеет порядок масштаба Теории Великого Объединения

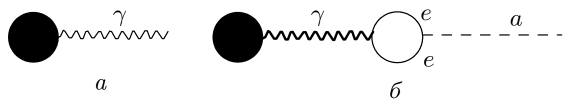

Рис. 1

10^{15} ГэВ. На наш взгляд, это весьма сомнительно, поскольку такие поля могут иметь непредсказуемые последствия для космологии из-за наличия тахионной моды в спектре заряженных векторных бозонов.

В работе [4] нами был предложен резонансный механизм усиления, основанный на предполагаемой малости массы аксиона, которая равна

$$m_a \approx 6 \cdot 10^{-4}(10^{10}\ \text{ГэВ}/f)\ \text{эВ}. \qquad (2)$$

Затравочная масса (2) индуцирована взаимодействием аксионов с глюонами в рамках квантовой хромодинамики [5]. Магнитное поле также индуцирует вклад в массу как при (ea)-взаимодействии [6], так и при (γa)-взаимодействии, в том числе с учетом конечной температуры [7]. Последнее следует из общих соображений, основанных на несохранении так называемой «магнитной спиральности» [7, 8]. В рассматриваемом в данной работе диапазоне полей и температур эти вклады в массу много меньше массы (2) согласно квантовой хромодинамике, и при оценках мы будем использовать последнее значение.

*E-mail: V. Skobelev@inbox.ru

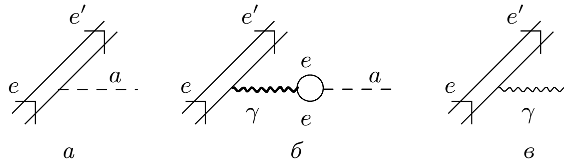

Рис. 2

Любой диаграмме рис. 1*а* с излучением фотона в сильном магнитном поле $B \gg B_0 = m^2/e = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс (m — масса электрона, e — элементарный заряд) соответствует диаграмма рис. 1*б*[1)] с излучением аксиона, и вследствие сохранения в петлевых диаграммах 4-импульса [9] фотонный пропагатор равен [4]

$$\frac{4\pi}{m_a^2 - P_\gamma(k_\parallel^2)}\, g_{\mu\nu}, \tag{3}$$

$$k_\parallel^2 = k_0^2 - k_3^2,$$

$$\mu, \nu = 0, 3.$$

Здесь ось 3 направлена вдоль поля, P_γ — поляризационный оператор фотона, который в однопетлевом приближении равен [10] (см. также [4])

$$P_\gamma(k_\parallel^2) = -ak_\parallel^2, \quad |k_\parallel^2| \ll m^2, \tag{4}$$

$$a = \frac{\alpha\gamma}{3\pi m^2}, \quad \gamma = |eB|.$$

Резонансный эффект, таким образом, обусловлен малостью знаменателя в выражении (3) при $k_\parallel^2 \approx 0$.

В рассмотренной в работе [4] генерации аксионов в комптоновском канале $\gamma e \to ae$ эффект нивелировался наличием в квадрате матричного элемента множителя $k_\parallel^2$, вследствие чего резонанс имел место лишь вблизи порога рождения аксиона, например, при температуре реликтового излучения.

В данной работе мы рассматриваем процесс излучения аксиона электроном, находящимся в поле ядра и в сильном магнитном поле $B \gg B_0 = m^2/e = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс («одномерный» водородоподобный атом, двойная линия на рис. 2*а*), и соответствующий резонансный процесс (рис. 2*б*).

[1)] Укажем также на распространенное заблуждение о наличии адлеровской аномалии в процессе, представленном на рис. 1*б*. Она отсутствует, так как в двумерном подпространстве (0,3), индуцируемом сверхсильным магнитным полем [9], псевдовекторная вершина $\gamma^5\gamma^\alpha$ ($\gamma^5 = \gamma^0\gamma^3$) фактически не отличается от векторной γ^α в силу соотношения $\gamma^5\gamma^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\gamma_\beta$, где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — абсолютно антисимметричный тензор в (0,3) (см. также [4] и разд. 4).

Расчет матричных элементов, соответствующих диаграммам рис. 2*а* (см. разд. 3) и рис. 2*б* (см. разд. 4) подразумевает использование лагранжианов (1) и электродинамического

$$L_e = e\left(\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right) A_\mu \tag{5}$$

и, следовательно, решение уравнения Дирака в поле ядра и в сильном магнитном поле (разд. 2)

$$B \gg (Z\alpha)^2 B_0, \qquad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \tag{6}$$

(здесь и далее в этом разделе мы сохраняем в формулах постоянные c и $\hbar$). При выполнении этого условия электронные состояния двукратно вырождены по четности, а решение «одномерного» уравнения Шредингера имеет вид [11]:

$$\Psi_{ns}^{(\pm)} = \begin{cases} \chi_n, & z > 0, \\ \pm\chi_n, & z < 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\chi_n = K_n e^{-\zeta/2}\zeta\Phi(1-n, 2; \zeta),$$

$$\zeta = \frac{2Z}{n}\frac{|z|}{z_0}, \quad z_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}, \tag{8}$$

$$K_n = \left(\frac{Z}{2nz_0}\right)^{1/2}, n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $\Phi(\alpha, \beta; \zeta)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, а волновая функция нормирована обычным условием

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_{ns}^2 dz = 1. \tag{9}$$

Интересующие нас квантованные значения энергии при этом совпадают со значениями в случае отсутствия магнитного поля:

$$E_n = -\frac{(Ze^2)^2 m}{2\hbar^2 n^2}. \tag{10}$$

Заметим, что зависящее от магнитного поля значение энергии в кулоновском поле ε_0 [11] в любом случае вклада не дает, поскольку результаты зависят лишь от разности энергий кулоновских уровней дискретного спектра, переходы между которыми мы рассматриваем.

2. РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО «УРАВНЕНИЯ ДИРАКА» ДЛЯ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ЯДРА

В наших работах (см., например, [9]) было, в частности, показано, что в достаточно сильных магнитных полях решение уравнения Дирака выражается через двухкомпонентный спинор υ, удовлетворяющий двумерному «уравнению Дирака»

$$\begin{gathered}(\hat{p}-m)\,\upsilon=0,\\ \hat{p}=\gamma^0 p_0-\gamma^3 p_3,\\ \upsilon\overline{\upsilon}=\hat{p}+m\end{gathered} \tag{11}$$

с матрицами 2×2:

$$\begin{gathered}\gamma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \gamma^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\\ \gamma^5\equiv\gamma^0\gamma^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{12}$$

При выполнении того же фундаментального условия (6), при котором становится одномерным уравнение Шредингера для электрона в поле ядра, уравнение Дирака (11) в координатном представлении имеет вид (далее опять пишем c и $\hbar$)[2)]

$$D_-\Psi=0. \tag{13}$$

Оператор Дирака в области $z>0$ равен

$$D_{\mp}=\left(E_r+\frac{Ze^2}{z}\right)\gamma^0-i\hbar c\gamma^3\frac{d}{dz}\mp mc^2, \tag{14}$$

где E_r — релятивистская энергия. Вводя обозначения

$$E=E_r-mc^2,\quad \varepsilon=E/mc^2, \tag{15}$$

перепишем оператор (14) с точностью до постоянного множителя в виде

$$D_{\mp}=\left(\varepsilon+1+\frac{Z\alpha^2}{x}\right)\gamma^0-i\alpha\gamma^3\frac{d}{dx}\mp 1, \tag{16}$$

$$x=z/z_0.$$

Стандартный метод решения уравнения (13) состоит в его квадрировании, т. е. ищем решение в виде

$$\Psi=D_+\varphi. \tag{17}$$

Подставляя это выражение в формулу (13), получаем для φ уравнение

$$\left[\frac{\varepsilon^2+2\varepsilon}{\alpha^2}+\frac{2(1+\varepsilon)Z}{x}+\frac{d^2}{dx^2}+\right.\\ \left.+\frac{(Z\alpha)^2}{x^2}-i\frac{Z\alpha}{x^2}\gamma^5\right]\varphi=0. \tag{18}$$

Считая, что $Z\alpha\ll 1$, ищем решение этого уравнения в виде разложения

$$\begin{gathered}\sigma=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k,\quad \rho=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k,\\ \sigma_k,\rho_k\sim(Z\alpha)^k,\end{gathered} \tag{19}$$

где

$$\varphi=\begin{pmatrix}\sigma\\ \rho\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Подставляя σ и ρ из (19) в уравнение (18) и приравнивая члены одного порядка по $Z\alpha$, получаем в нулевом порядке с учетом условия $|\varepsilon|\ll 1$

$$\left[\frac{2\varepsilon}{\alpha^2}+\frac{2Z}{x}+\frac{d^2}{dx^2}\right]\sigma_0(\rho_0)=0 \tag{21}$$

и в первом порядке —

$$\left[\frac{2\varepsilon}{\alpha^2}+\frac{2Z}{x}+\frac{d^2}{dx^2}\right]\sigma_1(\rho_1)=i\frac{Z\alpha}{x^2}\rho_0(\sigma_0). \tag{22}$$

Это означает, что в основном порядке по $Z\alpha$ величины σ и ρ действительны и удовлетворяют одному уравнению (21).

Ограничиваясь нулевым приближением, сделаем в уравнении (21) замены

$$\zeta=\frac{2\sqrt{-2\varepsilon}}{\alpha}\,x,\quad \lambda=\frac{Z\alpha}{\sqrt{-2\varepsilon}}, \tag{23}$$

после чего оно приобретает вид

$$\left[-\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{\zeta}+\frac{d^2}{d\zeta^2}\right]\sigma=0. \tag{24}$$

При $\lambda=n=1,2,3,\ldots$, что является условием конечности решения при больших $|z|$, этому же уравнению удовлетворяет решение одномерного уравнения Шредингера (7), (8) с тем же значением энергии (10). Решение исходного уравнения (13) получается из формул (16), (17), (20). Учтем при этом, что

[2)] Подробная аргументация «двумеризации» уравнения Дирака для электрона в поле ядра и в сильном магнитном поле имеется в одной из первых работ на эту тему [12]. Формальная разница в матричной структуре приведенного в ней уравнения и уравнений (13), (14) и, соответственно, в виде столбца u (26) (см. далее) имеет место из-за различного представления матриц 2×2 (12) при выборе координатных осей (в работе [12] направление по полю обозначено x, в нашей же работе более традиционно — z). Основной результат работы [12] и данного раздела при этом одинаков — компоненты спинора удовлетворяют одному уравнению типа Уиттекера (24) (см. далее). Таким образом, оба подхода фактически эквивалентны. В нашей работе оказалось более удобным использовать представление (26) для волновой функции, полученное в данном разделе, при максимально возможной в задаче ковариантности в подпространстве (0,3), в отличие от работы [12].

с той же точностью, с которой получено уравнение (24), оператор D_+ (16) имеет вид

$$D_+ \approx \frac{1}{2}(\gamma^0 + 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

так что решение исходного двумерного «уравнения Дирака» (13), (14) записывается в виде

$$\begin{gathered} \Psi_n^{(\pm)} = \Psi_{ns}^{(\pm)} u, \\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{26}$$

При этом мы заменили z на $|z|$, и решение справедливо также в области $z < 0$.

Функция (26) нормирована условием

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}_n \Psi_n dz = 1, \tag{27}$$

причем

$$\begin{gathered} \overline{u} \equiv u^\dagger \gamma^0 = (1, 0), \\ \overline{u} u = 1. \end{gathered} \tag{28}$$

Заметим, что из явного вида матриц 2×2 (12) следует, что

$$\begin{cases} \overline{u}\gamma^0 u = 1, \\ \overline{u}\gamma^3 u = \overline{u}\gamma^5 u = 0. \end{cases} \tag{29}$$

3. ИЗЛУЧЕНИЕ АКСИОНА ОДНОМЕРНЫМ АТОМОМ

В этом разделе рассмотрим простейший механизм излучения, соответствующий рис. 2a с использованием лагранжиана (1).

С помощью стандартных методов в дипольном приближении легко получить следующее выражение для вероятности перехода $n \to n'$ в единицу времени с излучением аксиона с импульсом k (снова опускаем c и $\hbar$):

$$\begin{cases} A_{nn'} = \displaystyle\int |M_0|^2 (2\pi)\delta(\Delta E - k_0) \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3}, \\ \Delta E = E_n - E_{n'}, \end{cases} \tag{30}$$

где матричный элемент

$$M_0 \approx i\left(\frac{c_e}{2f}\right) k_3^2 (z)_{n'n}, \tag{31}$$

$$(z)_{n'n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, \Psi_{n's}^* z \Psi_{ns}, \tag{32}$$

Ψ_{ns} — решение одномерного уравнения Шредингера (7). После элементарного интегрирования выражение (30) записывается в виде[3)] ($m_a \ll \Delta E$, поэтому массой аксиона здесь пренебрегаем)

$$A_{nn'} = \left(\frac{c_e}{2f}\right)^2 \frac{\Delta E^5 (z)^2_{n'n}}{5(2\pi)}. \tag{33}$$

Очевидно, что $(z)_{n'n} \neq 0$ лишь для переходов с изменением четности, т. е.

$$(z)_{n'n} = 2\int\limits_0^{\infty} dz\, \chi_{n'}^* z \chi_n. \tag{34}$$

С учетом вида χ (8) этот интеграл может быть найден из интегрального соотношения 7.622 работы [13] с помощью операции дифференцирования по параметру s и с учетом значений

$$a = 1 - n, \quad \alpha = 1 - n', \quad \lambda = n/n'. \tag{35}$$

Результат имеет вид

$$\begin{gathered} (z)_{n'n} = 8(-1)^{n'} \frac{z_0}{Z} \frac{(nn')^{5/2}}{(n-n')^4} \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^{n+n'} \tilde{F}, \\ \tilde{F} = \left(\frac{2nn'}{n+n'} - 1\right) F\,(1-n, 1-n'; 2; -x) + xF', \\ x = \frac{4nn'}{(n-n')^2}, \end{gathered} \tag{36}$$

где F — конечный в нашем случае гипергеометрический ряд,

$$\begin{gathered} F = (n-1)!(n'-1)! \times \\ \times \sum_{k=0}^{n'-1} \frac{(-x)^k}{(n-k-1)!(n'-k-1)!k!(k+1)!}, \end{gathered} \tag{37}$$

а производная F' берется по аргументу.

Подставляя $(z)_{n'n}$ из формулы (36) в формулу (33), с учетом значения

$$\Delta E = \frac{(Z\alpha)^2 mc^2}{2} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

[3)] Заметим, что дипольное приближение по z справедливо, поскольку $|z|_{eff} \sim z_0$, $|k_3 z|_{eff} \sim \Delta E z_0 \ll 1$, а вклады $(x)_{n'n}$ и $(y)_{n'n}$ вообще равны нулю из-за ортогональности волновых функций $\Psi \equiv \Psi(z)$.

для вероятности получаем

$$A_{nn'} = \frac{c_e^2}{20\pi}\left(\frac{mc^2}{f}\right)^2 (Z\alpha)^8 \frac{c}{\lambda_C} J(n,n'),$$
$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \tag{38}$$
$$J(n,n') = \frac{1}{(nn')^5}\left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^{2(n+n')} \times \times (n-n')^{-3}(n+n')^5\tilde{F}^2.$$

Полная вероятность излучения аксиона в единицу времени равна

$$A_n = \frac{c_e^2}{20\pi}\left(\frac{mc^2}{f}\right)^2 (Z\alpha)^8 \frac{c}{\lambda_C} J(n), \quad J(n) = \sum_{n'=1}^{n-1} J(n,n'). \tag{39}$$

4. РЕЗОНАНСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ АКСИОНА ОДНОМЕРНЫМ АТОМОМ

Рассмотренный «простой» механизм излучения аксиона подавлен из-за наличия в формулах (38), (39) коэффициента

$$\left(\frac{mc^2}{f}\right)^2 (Z\alpha)^8.$$

При резонансном механизме излучения, которому соответствует диаграмма рис. 2*б*, он отчасти компенсируется пропагаторным фактором (3), а интерференцией диаграмм на рис. 2*а,б* можно пренебречь.

Исходим из полного лагранжиана взаимодействия (1), (5):

$$L = L_a + L_e. \tag{40}$$

Сама идея «двумеризации» уравнения Дирака для электрона в поле ядра и в сильном магнитном поле основана на доминировании энергии взаимодействия спинового магнитного момента с магнитным полем над «кулоновской» энергией

$$\left|-\frac{\hbar eB}{2mc}\right| \gg \left|-\frac{Z^2e^4m}{2\hbar^2}\right|, \tag{41}$$

откуда и вытекает ограничение (6) на величину поля. Поэтому при более сильном условии $B \gg B_0$ при расчете петлевой диаграммы рис. 2*б* следует в качестве электронного пропагатора использовать функцию Грина уравнения Дирака для электрона в сверхсильном магнитном поле [9], пренебрегая влиянием на нее поля ядра. По-существу, это соответствует учету нулевого приближения в разложении по $Z\alpha$, уже использованного в разд. 2 [4)].

Вклад дает зависящее от разности координат двумерное представление функции Грина, имеющее вид [9]

$$G(x-y) = \frac{\gamma}{2\pi} \times \times \exp\left\{-\frac{\gamma}{4}\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right]\right\} \times \times \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2q \exp\left[-iq(x-y)\right]G(q), \quad G(q) = \frac{\hat{q}+m}{q^2-m^2}, \quad \gamma = |eB|, \tag{42}$$

где все скалярные произведения являются двумерными в подпространстве $(0,3)$ с матрицами 2×2 (12).

Далее используем представление (3), (4) для фотонного пропагатора, а также вид псевдовектора в $(0,3)$, который соответствует петле на диаграмме рис. 2*б* [4]:

$$P_\nu = = i\int d^2p \,\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\nu \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}\hat{k}\gamma^5 \frac{\hat{p}+\hat{k}+m}{(p+k)^2-m^2}\right\},$$
$$P_\nu = 2\pi(k\varepsilon)_\nu P_{\gamma a}(\varphi), \tag{43}$$
$$P_{\gamma a} = 1 - \frac{2\varphi}{\sin\varphi},$$
$$\frac{k^2}{4m^2} = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad 0 \le k^2 \le 4m^2.$$

Здесь $(k\varepsilon)_\nu \equiv k^\mu \varepsilon_{\mu\nu}$, $\varepsilon_{\mu\nu}$ — абсолютно антисимметричный тензор в подпространстве $(0,3)$, и в нашем случае, когда $|k^2| \ll m^2$, полагаем $P_{\gamma a} \approx -1$. Это приводит к следующему соотношению, связывающему матричные элементы резонансной (M) и простой (M_0) диаграмм:

$$M = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\gamma}{m_a^2 + ak^2} M_0 \tag{44}$$

(коэффициент γ появляется при интегрировании по поперечным координатам в петле, что является общим свойством петлевых диаграмм с четным числом вершин в сильном магнитном поле [9]).

При вычислении вероятности по формуле вида (30) возникает следующий интеграл по фазовому объему аксиона:

[4)] Это же можно пояснить и следующим образом. Эффективная длина Δz формирования процесса $\gamma^* \to a$ может быть оценена из соотношения неопределенностей $\Delta z m_a \sim 1$, т. е. $\Delta z \sim \alpha(m/m_a)z_0$. Очевидно, что $\Delta z \gg z_0$ (размеров атома), и влиянием поля ядра в петлевых вставках можно пренебречь.

$$J=\int\frac{d^3k}{2k_0}\delta(\Delta E-k_0)\frac{k_3^4}{(m_a^2+ak^2)^2}. \tag{45}$$

При удержании главного резонансного вклада он равен

$$J\approx\frac{\pi}{a}\,\frac{\Delta E^3}{m_a^2(1+a)}. \tag{46}$$

С учетом явного вида a (4) получаем следующий результат для вероятности в единицу времени резонансного излучения аксиона[5)]:

$$A_{nn'}^{(res)}=\left(\frac{c_e}{2f}\right)^2\gamma\alpha\frac{3}{2^6\pi^2(1+a)}\times \\ \times\left(\frac{m}{m_a}\right)^2\Delta E^3(z)_{n'n}^2, \tag{47}$$

где матричный элемент $(z)_{n'n}$ определен формулами (35), (39). Подставляя значения ΔE и $(z)_{n'n}$, получаем

$$\begin{gathered}A_{nn'}^{(res)}=\frac{3c_e^2}{32\pi^2(1+a)}\left(\frac{mc^2}{f}\right)^2\times\\ \times\frac{B}{B_0}\left(\frac{m}{m_a}\right)^2(Z\alpha)^4\alpha\frac{c}{\lambda_C}\,J(n,n'),\\ J(n,n')=\frac{1}{nn'}\left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^{2(n+n')}\times\\ \times(n-n')^{-5}(n+n')^3\tilde{F}^2.\end{gathered} \tag{48}$$

Полная вероятность перехода с уровня n на все лежащие ниже кулоновские уровни с резонансным излучением аксиона равна

$$\begin{gathered}A_{n}^{(res)}=\frac{3c_e^2}{32\pi^2(1+a)}\left(\frac{mc^2}{f}\right)^2\times\\ \times\frac{B}{B_0}\left(\frac{m}{m_a}\right)^2(Z\alpha)^4\alpha\frac{c}{\lambda_C}\,J(n),\\ J(n)=\sum_{n'=1}^{n-1}J(n,n').\end{gathered} \tag{49}$$

Полная интенсивность аксионного излучения есть

$$W^{(res)}=\sum_{n=2}^{\infty}W_n^{(res)}, \tag{50}$$

$$W_n^{(res)}=\sum_{n'=1}^{n-1}W_{nn'}, \tag{50a}$$

$$W_{nn'}=N_n\Delta E A_{nn'}, \tag{50b}$$

где N_n — число атомов в возбужденном состоянии n.

Явное выражение для величины $W_{nn'}^{(res)}$ (интенсивность излучения при переходе $n\to n'$) имеет вид

$$\begin{gathered}W_{nn'}^{(res)}=\frac{3c_e^2}{64\pi^2(1+a)}N_n\left(\frac{mc^2}{f}\right)^2\times\\ \times\frac{B}{B_0}\left(\frac{m}{m_a}\right)^2(Z\alpha)^6\alpha mc^2\frac{c}{\lambda_C}\,I(n,n'),\\ I(n,n')=\frac{1}{(nn')^3}\times\\ \times\left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^{2(n+n'-2)}\tilde{F}^2.\end{gathered} \tag{51}$$

Полная же интенсивность при переходе с уровня n на все лежащие ниже кулоновские есть

$$\begin{gathered}W_{n}^{(res)}=\frac{3c_e^2}{64\pi^2(1+a)}N_n\left(\frac{mc^2}{f}\right)^2\times\\ \times\frac{B}{B_0}\left(\frac{m}{m_a}\right)^2(Z\alpha)^6\alpha mc^2\frac{c}{\lambda_C}\,I(n),\\ I(n)=\sum_{n'=1}^{n-1}I(n,n').\end{gathered} \tag{52}$$

Значения функций $J(n)$ (49) и $I(n)$ (52) для нескольких n приведены в таблице. Как видно, доминирует переход $2\to1$.

Отметим, что наши результаты справедливы не только для ограниченного класса моделей, в которых имеет место связь вида (1), а также в более общем случае, в моделях с $(a\gamma\gamma)$-связью

$$L_{a\gamma}=\frac{g_\gamma}{16\pi}\left(F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right)a, \tag{53}$$

где $g_\gamma=\alpha c_\gamma/2\pi f$, $c_\gamma\sim1$, а $\tilde{F}_{\mu\nu}\equiv\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ — дуальный тензор. В нашем случае под $F^{\mu\nu}$ следует понимать сумму тензора внешнего поля с отличными от нуля компонентами $F_{ext}^{21}=-F_{ext}^{12}=B$ и тензора квантованного электромагнитного поля F_{quant}. С учетом соотношения $\varepsilon_{21\alpha\beta}\equiv\varepsilon_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=0.3)$ имеем

$$L_{\alpha\gamma}=\frac{g_\gamma B}{4\pi}(\varepsilon_{\alpha\beta}F_{quant}^{\alpha\beta})\,a. \tag{54}$$

Полный лагранжиан теперь равен $L=L_e+L_{a\gamma}$, а для матричного элемента резонансного эффекта, которому теперь соответствует диаграмма, представленная на рис. 3, получается то же выражение (44)

[5)] В этом случае «отбрасывание» слагаемых k_1x и k_2y в разложении экспоненты $\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\right]$ имеет дополнительную аргументацию: соответствующие вклады в вероятность $k_1^2|\langle f|x|i\rangle|^2$ и $k_2^2|\langle f|y|i\rangle|^2$ получаются из интеграла (45) заменой $k_3^4\to k_3^2k_{1,2}^2$, и, как легко видеть, главный резонансный вклад (46) будет отсутствовать. Это означает, что при замене $(z)_{n'n}^2$ на $|\langle f|z|i\rangle|^2$ выражение (47) будет применимо для произвольных электронных состояний (при справедливости дипольного приближения) $\langle f|$ и $|i\rangle$ в сверхсильном магнитном поле, а не только для электрона на кулоновских уровнях в поле ядра.

Таблица

n	2	3	4	5	6
J	$2.06 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
I	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$2.76 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$8.68 \cdot 10^{-5}$

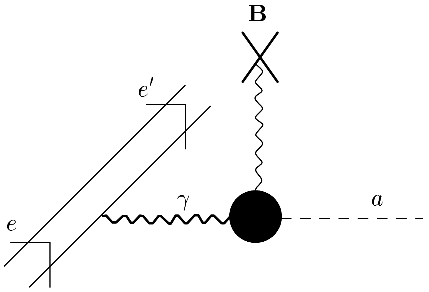

Рис. 3

(с учетом (31)) с заменой $c_e \to 8c_\gamma$. Это означает, что результаты этого раздела фактически не изменяются.

В реальной ситуации следует, вообще говоря, учесть вклад электронной компоненты плазмы с концентрацией n_e в квадрат массы фотона [14]. Наши результаты не меняются, если этот вклад не превосходит m_a^2, а вклад магнитного поля много больше плазменного, из чего следует условие

$$\frac{B}{B_0} \gg n_e \lambda_C^3 \left(\frac{m}{\Delta E}\right)^2,$$

которое вполне реализуемо, так как концентрация «свободных» электронов резко уменьшается в «эпоху образования атомов» из-за их захвата ядрами (см. разд. 5).

Заметим, что «компенсация» резонансной генерации аксионов обратным механизмом резонансного поглощения $a(Ze) \to (Ze)^*$ не имеет места, так как аксионы не находятся в термодинамическом равновесии с совокупностью «одномерных» атомов, поскольку генерируемые в резонансном механизме аксионы «уходят» из области сверхсильных полей $B \gg B_0$ (эффективная длина пробега относительно поглощения много больше размеров этой области).

Очевидно, резонансный эффект будет иметь место и в полях $B \ll B_0$, поскольку в однородном поле 4-импульс по-прежнему сохраняется, однако матричный элемент будет содержать малый коэффициент B/B_0, а вероятность — соответственно $(B/B_0)^2 \ll 1$, что отчасти уменьшает резонансный эффект, в то время как в случае $B \gg B_0$ коэффициент B/B_0 его увеличивает.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Сравним вероятности резонансного $A_{nn'}^{(res)}$ (47) и «простого» $A_{nn'}^{(s)}$ (33) механизмов генерации аксионов:

$$\frac{A_{nn'}^{(res)}}{A_{nn'}^{(s)}} \sim \alpha^{-3} \left(\frac{m}{m_a}\right)^2 \frac{B}{B_0} \sim 10^{24} \frac{B}{B_0}. \qquad (55)$$

Это же справедливо и для интенсивностей.

Ввиду такого гигантского резонансного эффекта есть даже смысл сравнить вероятности $A_{nn'}^{(res)}$ (47) и дипольного электромагнитного излучения $A_{nn'}^{(e)}$ [15], которому соответствует диаграмма рис. 2*в*:

$$A_{nn'}^{(e)} = \frac{4}{3} \frac{\alpha \Delta E^3 (z)_{n'n}^2}{\hbar^3 c^2}. \qquad (56)$$

Тогда имеем

$$\frac{A_{nn'}^{(res)}}{A_{nn'}^{(e)}} \sim 10^{-3} \left(\frac{m}{f}\right)^2 \left(\frac{m}{m_a}\right)^2 \frac{B}{B_0} \sim 10^{-12} \frac{B}{B_0}. \quad (57)$$

Это же соотношение имеет место и для переходов с кулоновских уровней на уровень с энергией ε_0, поскольку квадрат матричного элемента $(z)_{0n}^2$ и ΔE^3 в формуле (57) сокращаются (хотя, строго говоря, эти переходы мы подробно не рассматриваем). Во всех других известных нам случаях (см. также [2]) подавление аксионного излучения $A^{(a)}$ по сравнению с электромагнитным $A^{(e)}$ имеет порядок

$$\frac{A^{(a)}}{A^{(e)}} \sim \alpha^{-1} \left(\frac{m}{f}\right)^2 \sim 10^{-25}, \qquad (58)$$

так что резонансный эффект кардинальным образом меняет ситуацию, являясь наиболее ярко выраженным в области $B \gg B_0$.

Заметим, что аксионная светимость из единицы объема за счет резонансного эффекта излучения аксионов водородоподобным атомом равна

$$S^{(res)} \approx \sum_n W_n^{(res)}. \qquad (59)$$

При этом в выражении (52) под N_n следует понимать концентрацию атомов с электронами в состоянии n (на самом деле $S^{(res)}$ может быть даже больше, если учитывать переходы на уровень с энергией ε_0). Значение $S^{(res)}$ по порядку величины получим, заменив в выражении (52) N_n на N — общую концентрацию атомов (ядер) — и положив $I(n) \approx I \approx 10^{-4}$ (как это видно из таблицы). В результате, опустив постоянные c и $\hbar$, имеем

$$S^{(res)} \sim 10^{-5} m^2 N \left(\frac{m}{f}\right)^2 \frac{B}{B_0} \left(\frac{m}{m_a}\right)^2 (Z\alpha)^6 \alpha. \quad (60)$$

Для удобства запишем это выражение в обычных единицах, взяв принятые значения f и m_a:

$$S^{(res)} \sim 10^{-13} (N \cdot 1 \text{ см}^3) Z^6 \frac{B}{B_0} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}. \quad (60\text{a})$$

Для сравнения этого результата с результатами для других механизмов генерации аксионов выделим две возможные ситуации: а) генерация аксионов сколлапсированными объектами в условиях, сходных с существующей Вселенной; б) генерация аксионов на ранних этапах эволюции Вселенной.

а) Для водородной атмосферы нейтронной звезды следует положить [16] $N \sim 10^{23}$ см$^{-3}$, $Z = 1$, $B/B_0 \sim 10$. Это дает

$$S^{(res)} \sim 10^{11} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}. \quad (61)$$

При характерных значениях параметров плотного горячего ядра сверхновой [2] — температуры $T \sim 30$ МэВ и плотности $\rho \sim 10^{14}$ г/см^3 — значение аксионной светимости за счет процесса нуклон-нуклонного рассеяния $N + N \to N + N + a$ равно (см. формулу (8) работы [17]):

$$S^{(NN)} \sim 10^{33} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}. \quad (62)$$

Из сравнения с формулой (61) следует, что резонансный механизм в этом случае дает пренебрежимо малый вклад.

б) В первые моменты существования горячей Вселенной при температурах порядка f подавление процессов генерации аксионов фактором $(1/f)^2$ компенсируется энергетическим фактором T^2 и доминируют «обычные» процессы генерации аксионов за счет нуклон-нуклонного рассеяния и неупругого рассеяния фотонов на ядрах (эффект Примакова). Светимость за счет последнего механизма равна по порядку величины [18]

$$S^{(P)} \sim 10^{-2} \alpha^2 \left(\frac{T}{f}\right)^2 T^5. \quad (63)$$

На этой стадии рассмотренного резонансного эффекта нет вообще ввиду отсутствия атомов.

По мере остывания плазмы до температур $T \lesssim T_m \approx |E_1| \sim (Z\alpha)^2 m$ начинается образование атомов и при наличии остаточных сверхсильных магнитных полей включается резонансный механизм генерации аксионов. Взяв в формуле (63) максимально допустимое для резонансного эффекта значение температуры $T = T_m$, для относительного вклада светимостей получаем

$$\frac{S^{(res)}}{S^{(P)}} \sim \frac{10^{-2}}{(Z\alpha)^8 \alpha} \lambda_C^3 N \frac{B}{B_0} \left(\frac{m}{m_a}\right)^2 \sim$$
$$\sim 10^{16} \frac{B}{B_0} \left(\frac{m}{m_a}\right)^2 \lambda_C^3 N \sim 10^{34} \frac{B}{B_0} \lambda_C^3 N. \quad (64)$$

Таким образом, при температурах $T \lesssim T_m$ резонансный эффект по меньшей мере на порядок превышает вклад эффекта Примакова.

Для сравнения в этих условиях резонансного эффекта и процесса $N + N \to N + N + a$ перепишем формулу (8) работы [17] в терминах концентрации нуклонов ($N_p \sim N_n \sim N$, $f \sim 10^{10}$ ГэВ, $T \sim T_m$):

$$S^{(NN)} \sim 10^{-63} \left(\frac{N}{\text{см}^{-3}}\right)^2 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}. \quad (65)$$

Аналогичное выражение для $S^{(res)}$ имеет вид

$$S^{(res)} \sim 10^{-12} \frac{B}{B_0} \frac{N}{\text{см}^{-3}} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}. \quad (66)$$

Таким образом,

$$\frac{S^{(res)}}{S^{(NN)}} \sim 10^{51} \frac{B/B_0}{N/\text{см}^{-3}}. \quad (67)$$

Поскольку плотность вещества в «эпоху» образования атомов не может превышать ядерную, $S^{(res)}$ по крайней мере на 10 порядков превосходит $S^{(NN)}$. Наличие сверхсильного магнитного поля не меняет оценок для $S^{(P)}$ и $S^{(NN)}$. Таким образом, при $T < T_m$ резонансный эффект доминирует в процессах образования аксионной составляющей холодной темной материи.

Время существования ранней Вселенной с температурой $\Delta E \lesssim T \lesssim T_m$ (десятки и сотни тысяч лет) значительно превосходит время с температурой в интервале 10 МэВ $\lesssim T \lesssim f$ (порядка микросекунд), поэтому суммарный вклад резонансного эффекта в «реликтовую» составляющую аксионной темной материи может оказаться главным.

Попытаемся оценить массовую плотность аксионов, рожденных в резонансных процессах в «эпоху образования атомов». Согласно соотношению (57), в «те времена» концентрации аксионов и фотонов были связаны соотношением

$$n_a \sim 10^{-12}\left(\frac{B}{B_0}\right) n_{ph}. \tag{68}$$

Если предположить, что эта связь сохранилась и в наше время, то, положив $n_{ph} \sim (T/m)^3 \lambda_C^{-3}$, где T — температура реликтового излучения, из формулы (68) можно оценить массовую плотность аксионов $\rho_a = m_a n_a$ в наше время. Для m_a (2), $T \sim 4$ К и при разумной величине поля в «те времена» получается результат на несколько порядков меньше характерной плотности 10^{-33} г/см^3. Таким образом, несмотря на доминирующую роль резонансного эффекта в генерации аксионов в «эпоху образования атомов», он не может, по-видимому, объяснить происхождение холодной темной материи.

Отметим, что плотность энергии реликтовых аксионов, равная $w_a = E_a n_a$, с учетом соотношения (68) и значения $E_a \sim (Z\alpha)^2 m$, составляет

$$w_a \sim 10^{-12}\alpha^2 \frac{B}{B_0}\left(\frac{T}{m}\right)^3 \frac{m}{\lambda_C^3}, \tag{69}$$

где T — по-прежнему температура реликтового электромагнитного излучения, а B — магнитное поле в «эпоху образования атомов». Для $T \sim 4$ К получаем

$$w_a \sim 10^{-4}\frac{B}{B_0}\,\frac{\text{эВ}}{\text{см}^3}. \tag{70}$$

Дать какую-либо «астрофизическую» интерпретацию этому результату мы затрудняемся.

Во всяком случае, эта энергия никак себя не проявляет, поскольку аксионы в «нашу эпоху» практически не взаимодействуют с веществом. Вполне возможно, однако, что другие процессы, относящиеся к резонансному классу (рис. 1) и не описываемые «дипольной» формулой (47), могут дать вклад в аксионную составляющую холодной темной материи.

Автор выражает благодарность А. Ю. Казанцеву за техническую помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Amsler et al. (Particle Data Group), Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).
2. G. G. Raffelt, Phys. Rep. **198**, 1 (1990).
3. L. Campanelli and M. Gianotti, arXiv:astro-ph/0512324; L. Campanelli and M. Gianotti, arXiv:astro-ph/0611207.
4. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **132**, 1121 (2007).
5. J. E. Kim, Phys. Rep. **150**, 1 (1987); H. Y. Cheng, ibid. **158**, 1 (1988).
6. В. В. Скобелев, ЯФ **61**, 2236 (1998).
7. L. Campanelli and M. Gianotti, arXiv:hep-ph/0609199.
8. L. Campanelli and M. Gianotti, Phys. Rev. Lett. **96**, 161302 (2006); arXiv:astro-ph/0512458.
9. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **120**, 786 (2001).
10. В. В. Скобелев, Изв. вузов, физика № 10, 142 (1975).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1974), с. 527, 150.
12. В. П. Крайнов, ЖЭТФ **64**, 800 (1973).
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971), с. 875.
14. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва (1967).
15. Ю. М. Лоскутов, И. М. Тернов, А. А. Соколов, *Квантовая механика*, Учпедгиз, Москва (1962), с. 165.
16. A. Y. Potekhin et al., Adv. Space Res. **35**, 1158 (2005).
17. M. Gianotti and F. Nesti, Phys. Rev. D **72**, 063005 (2005); arXiv:hep-ph/05050901.
18. G. G. Raffelt, Phys. Rev. D **37**, 1356 (1988).