ЖЭТФ, 2010, том 137, вып. 2, стр. 268–276

АККРЕЦИЯ ЭКЗОТИЧЕСКОЙ МАТЕРИИ НА ЧЕРНУЮ ДЫРУ РЕЙСНЕРА – НОРДСТРЕМА

А. А. Шацкий [a*], ***А. Г. Дорошкевич*** [a], ***Д. И. Новиков*** [a,b], ***И. Д. Новиков*** [a,c]

[a] *Астрокосмический центр, Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 117997, Москва, Россия*

[b] *Astrophysics Group, Imperial College, Blackett Laboratory London, SW7 2AZ, United Kingdom*

[c] *The Nielse Bohr International Academy, The Nielse Bohr Institute Blegdamsvej 17, DK-2100 Copenhagen, Denmark*

Поступила в редакцию 10 августа 2009 г.

Рассматриваются физические процессы, возникающие при аккреции экзотической материи на заряженную черную дыру Рейснера – Нордстрема. Экзотическая материя выбирается в виде пыли с отрицательной массой. Рассматриваются разные типы горизонтов и горловин, возникающих в процессе аккреции. Уравнения Эйнштейна интегрируются аналитически с учетом вкладов от различных типов материи (пыли и магнитного поля). Найденные выражения приводятся к виду, удобному для их аналитического исследования. Для определенного класса начальных условий находятся частные решения системы и исследуются ограничения, связанные с возможностью пересечения слоев пылевой материи. Находится принципиальное изменение характеристик решения, связанное с возможным исчезновением черной дыры.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие было доказано, что во Вселенной в больших масштабах доминирует необычная материя, получившая название «темной энергии» [1, 2]. Темная энергия нарушает так называемые «сильные энергетические условия» и возможно нарушает «слабые энергетические условия» [3]. В работе [1] рассматривалась материя, которая нарушает все энергетические условия [3]. Этот вид материи получил название «экзотической материи», для которой

$$\varepsilon + p_{\parallel} < 0, \tag{1}$$

где ε — плотность энергии, $p_{\parallel}$ — радиальное давление [4].

Во многих работах последнего времени рассматривались процессы с участием «экзотической материи». Сюда относятся работы по аккреции экзотической материи на черные дыры (см., например, [5–9]), а также касающиеся процессов с участием кротовых нор [3, 10–25]. Природа сингулярности внутри черных дыр и кротовых нор рассмотрена в работе [26].

*E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru

В работах Кардашева, Новикова и Шацкого [27, 28] и Шацкого [29] была рассмотрена гипотеза о том, что некоторые астрофизические объекты (например, некоторые активные ядра галактик или некоторые квазары) могут быть входами в кротовые норы. Напомним, что кротовыми норами в общей теории относительности называются топологические тоннели, соединяющие отдаленные области пространства Вселенной (см., например, [4, 30–35]) или даже области в разных вселенных в модели множественных вселенных [36].

В работе [37] мы аналитически решили задачу аккреции пылевой материи на кротовую нору Мориса – Торна[1)] [4] с последующим возникновением черной дыры Рейснера – Нордстрема. В этой статье мы решим другую задачу: рассмотрим проблемы связанные с аккрецией экзотической материи на заряженную черную дыру Рейснера – Нордстрема. Урав-

[1)] В нашей модели [37] кротовая нора Мориса – Торна поддерживалась радиальным магнитным полем и экзотической материей в виде экзотической пыли с отрицательной плотностью энергии (еще одним возможным вариантом материи для поддержания такой кротовой норы является мнимое безмассовое скалярное поле).

нения Эйнштейна для сферически-симметричной модели аккреции пыли на черную дыру Рейснера–Нордстрема будут проинтегрированы аналитически. Будет найдено принципиальное изменение характеристик решения, связанное с аккрецией экзотической материи (пыли с отрицательной массой) и исчезновением черной дыры.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 рассматриваются разные типы возможных горизонтов и горловин. В разд. 3 дается описание модели, а также приводятся соответствующие уравнения Эйнштейна с учетом вкладов от различных типов материи. В разд. 4 на уравнения Эйнштейна накладываются начальные условия, обеспечивающие существование решения с черной дырой в начальный момент. В разд. 5 уравнения интегрируются и приводятся к виду, удобному для их аналитического исследования. В разд. 6 находится ряд частных решений системы и делается ряд предварительных выводов. В разд. 7 исследуется возможность пересечения слоев пылевой материи и ограничения, накладываемые на наш метод, связанные с такой возможностью. В разд. 8 обсуждаются результаты.

2. ГОРИЗОНТЫ И ГОРЛОВИНЫ

В данной статье мы рассматриваем сферически-симметричные модели.

Для дальнейшего нам понадобятся определения горизонтов и горловин, без которых невозможно описание черной дыры и кротовой норы.

Введем сначала определение для инварианта I_1:

$$I_1 \equiv -g^{ik} r_{;i} r_{;k}. \qquad (2)$$

Здесь и далее g_{ik} — компоненты метрического тензора; радиус r определяется так, что $4\pi r^2$ — площадь сферы, коаксиально расположенной в нашей сферической системе координат; в формулах точкой с запятой обозначаем ковариантные производные по соответствующей координате, а запятыми — обычные производные.

Стандартным определением горизонта видимости (см. [38–40]) является равенство нулю инварианта I_1:

$$I_1 = 0. \qquad (3)$$

Запишем условие (3) в нулевых координатах Крускала–Шекереса (u, v). Метрический тензор с сигнатурой $\{+, -, -, -\}$ в нулевых координатах обычно записывается в виде

$$ds^2 = 2e^{2\sigma(u,v)}\, du\, dv - r^2(u,v)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (4)$$

тогда равенство (3) равносильно выражению

$$r_{,u} r_{,v} = 0. \qquad (5)$$

Будем считать, что в нулевых координатах направление оси v соответствует лучу света, распространяющемуся в направлении бесконечности (в нашей Вселенной), а направление оси u — в противоположном.

Обычно определение черной дыры связывают с наличием горизонта событий [40]. Так называют границу области пространства-времени, из которой световые сигналы не могут уйти на (световую) бесконечность. Однако это определение нелокально и требует знания всего решения рассматриваемой задачи, всей эволюции системы вплоть до бесконечно будущих моментов времени. В последнее время все чаще предлагается рассматривать черную дыру на основе локальных определений свойств пространства-времени. Так, в работе [40] предлагается считать границей черной дыры ловушечный горизонт видимости [41]. Так называют горизонт видимости, который обладает следующим свойством [40]: идущие наружу (вдаль v, при $u = \mathrm{const}$) лучи света сходятся внутри горизонта и расходятся вне его. На самом горизонте для световых сигналов, идущих в направлении оси v,

$$r_{,v} = 0. \qquad (6)$$

Аналогично получаем определение горизонта для световых сигналов, идущих в направлении оси u:

$$r_{,u} = 0. \qquad (7)$$

В связи с возможностью взаимопревращения черных дыр и кротовых нор (см. далее) определение (3) для горизонтов видимости можно разделить на два типа (см. [10]):

1) пространственноподобный (или нулевой) горизонт видимости (ППНГ);

2) времениподобный горизонт видимости (ВПГ).

Определением ППНГ является пространственноподобный или нулевой интервал между двумя близкими событиями, лежащими на рассматриваемом горизонте видимости, соответственно ВПГ определяется как времениподобный интервал между такими же событиями. Локальное определение для этих горизонтов в нулевых координатах записывается как

$$\text{ППНГ: } \left.\frac{du}{dv}\right|_h \le 0, \quad \text{ВПГ: } \left.\frac{du}{dv}\right|_h > 0. \qquad (8)$$

Здесь и далее индексом «h» мы обозначаем величины на горизонте видимости.

Более удобной для дальнейшего аналитического исследования оказывается синхронно-сопутствующая материи система отсчета[2)], описываемая координатами τ и R:

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(\tau,R)}\,dR^2 - \\ - r^2(\tau,R)(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \quad (9)$$

Эквивалентным определению (3) для существования горизонта видимости является равенство

$$|V| = 1 \quad (10)$$

для так называемой скорости материи (см. [37, 42–45]), где «скорость» V в координатах (τ, R) определяется как

$$V^2 \equiv r_{,\tau}^2 e^{\lambda}/r_{,R}^2. \quad (11)$$

Соответственно условием отсутствия горизонта видимости является неравенство $|V| < 1$.

Найдем соответствующие определения для ППНГ и ВПГ в координатах (τ, R). Для этого представим радиально-временную часть интервала (9) в виде

$$ds_{\tau R}^2 = d\tau^2 - e^{\lambda}dR^2 = \\ = (d\tau - e^{\lambda/2}dR)(d\tau + e^{\lambda/2}dR). \quad (12)$$

Введем обозначения

$$dr_\tau \equiv \frac{\partial r}{\partial \tau}\,d\tau, \quad dr_R \equiv \frac{\partial r}{\partial R}\,dR. \quad (13)$$

Тогда формула (12) принимает вид

$$ds_{\tau R}^2 = \frac{1}{r_{,\tau}^2}(dr_\tau - V dr_R)(dr_\tau + V\,dr_R) \propto dv\,du. \quad (14)$$

Полный дифференциал $dr \equiv dr_\tau + dr_R$, поэтому на горизонте видимости (при $V = 1$) имеем

$$dr_h \propto du|_h. \quad (15)$$

Согласно определению (8) нулевой интервал на горизонте соответствует $du|_h = 0$, отсюда получаем определения для ППНГ и ВПГ в координатах (τ, R):

$$\frac{dr_h}{d\tau} \geq 0 \text{ для ППНГ}, \quad \frac{dr_h}{d\tau} < 0 \text{ для ВПГ}. \quad (16)$$

[2)] В этой работе мы используем систему единиц с $c = 1$ и $G = 1$ (соответственно скорость света и гравитационная постоянная). Синхронно-сопутствующая материи система отсчета применима к пылевидной материи, благодаря отсутствию у пыли давления (временная компонента метрики равна 1). Далее (в разд. 5) будет доказана правомерность такого выбора метрики.

Если ловушечный горизонт ППНГ является признаком существования черной дыры, то признаком существования кротовой норы является «горловина». Горловиной называется минимальное значение r (не равное нулю) вдоль топологического тоннеля кротовой норы. В случае статической кротовой норы, когда r зависит только от радиальной координаты R (в статической системе отсчета), это определение горловины однозначно.

Однако для динамической кротовой норы, когда r зависит от обеих координат (например, от τ и R в системе (9)), необходимо определить, вдоль какого сечения $\tau(R)$ определяется минимальное значение r.

В работах [46, 47] предлагалось в качестве такого сечения брать нулевую радиальную геодезическую (либо v-луч, либо u-луч). При этом Хэйвард в работе [47] добавлял условие, чтобы мировая линия горловины соответствовала внешнему ВПГ-горизонту. Недостатки подобных определений очевидны. Горловины (а следовательно, и кротовые норы) существуют при таком определении только в случае проходимых кротовых нор, т. е. только в том случае, если световой сигнал (нулевая геодезическая) даже при наличии динамической эволюции проходит из одной вселенной в другую или из одной области пространства нашей Вселенной в другую, а не заканчивается, например, на возникающей сингулярности пространства-времени. С этой точки зрения «Мост Эйнштейна–Розена» [30] не является кротовой норой. Кроме того, положение горловины зависит от того, какой луч v или u рассматривается. Наконец, при полностью симметричном сжатии проходимой кротовой норы ни v-горловина, ни u-горловина не совпадают с положением мировой линии симметрии в сечении τ–R, которую по интуитивным соображениям и следует считать горловиной.

Чтобы избежать подобных трудностей, в работе [19] было предложено выбрать в качестве сечения пространственноподобную линию $\tau(R)$. Однако ясно, что в общем случае подобный выбор неоднозначен. Даже в случае обычной шварцшильдовской черной дыры, возникающей при коллапсе сферического распределения материи, где заведомо нет никаких тоннелей, соединяющих разные области пространства, можно внутри черной дыры в вакууме выбрать пространственноподобное сечение, имеющее горловину.

В работе [3] подчеркивается, что, в принципе, можно в качестве сечения $\tau(R)$ выбрать времениподобную мировую линию для характеристики наличия кротовой норы. Это возможно, например, в случае метрики Рейснера–Нордстрема [44, 48]. Подобные определения горловины столь же субъективны, как и в предыдущем случае. Кроме того, наличие минимума r на таком сечении (даже в случае выбора геодезического сечения) может означать гравитационное отталкивание от центра (вообще без кротовых нор и черных дыр). Это имеет место, например, в решении Рейснера–Нордстрема вблизи центра при $q > M$ (соответственно q и M — заряд и масса черной дыры).

Интересным примером существования проходимой в обоих направлениях космологической кротовой норы, не содержащей никаких горизонтов, является динамическая модель, описанная в работе [19], в которой также дается определение горловины по пространственноподобному сечению.

Из всего сказанного выше можно заключить, что и черная дыра, и кротовая нора по своей сути являются объектами, которые характеризуются нелокальными понятиями.

Тем не менее признаком существования черной дыры можно считать наличие ловушечного горизонта видимости ППНГ [41].

Кротовой норой следует называть тоннель, соединяющий отдаленные области пространства Вселенной (или разных вселенных), и характерной особенностью его существования является наличие горловины, определяемой, например, по пространственноподобному сечению (как это делается в работе [19]).

Следует подчеркнуть, что наличие локальных признаков существования рассматриваемых релятивистских объектов очень важно для их теоретического исследования.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим черную дыру Рейснера–Нордстрема с зарядом q (электрическим или магнитным) и массой M. Пусть аккрецирующая материя распределена вне горизонта и представляет собой гравитирующую экзотическую пыль (с отрицательной плотностью энергии $\varepsilon < 0$).

Для аналитического исследования используем максимально упрощенную модель, тем не менее позволяющую адекватно описывать аккрецию экзотической материи и черную дыру Рейснера–Нордстрема (обладающую, как известно, не только внешним, но и внутренним горизонтом). Полная материя в модели является суперпозицией магнитного поля и экзотической пыли. Тензор энергии-импульса такой материи представляется в следующем виде:

$$T_m^n = \begin{pmatrix} \dfrac{q^2}{8\pi r^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{q^2}{8\pi r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{q^2}{8\pi r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{q^2}{8\pi r^4} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Благодаря гидродинамической независимости слоев пыли друг относительно друга, можно проинтегрировать уравнения движения для пыли аналогично решению задачи Толмена (см. [49, 50]). По сути, это та же задача Толмена в центрально-симметричном электрическом (или магнитном) поле для незаряженной пыли.

Уравнения Эйнштейна, соответствующие метрике (9), можно записать в виде[3)]

$$8\pi T_\tau^\tau = 8\pi\varepsilon + \frac{q^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}\left[1 + rr_{,\tau}\lambda_{,\tau} + r_{,\tau}^2 - \right. \\ \left. - e^{-\lambda}\left(2rr_{,RR} + r_{,R}^2 - rr_{,R}\lambda_{,R}\right)\right], \quad (18)$$

$$8\pi T_R^R = \frac{q^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}\left(1 + 2rr_{,\tau\tau} + r_{,\tau}^2 - e^{-\lambda}r_{,R}^2\right), \quad (19)$$

$$8\pi T_\tau^R = 0 = \left(2r_{,R\tau} - r_{,R}\lambda_{,\tau}\right)\frac{e^{-\lambda}}{r}, \quad (20)$$

$$8\pi T_\theta^\theta = 8\pi T_\varphi^\varphi = -\frac{q^2}{r^4} = \frac{r_{,\tau\tau}}{r} + \frac{\lambda_{,\tau\tau}}{2} + \\ + \frac{\lambda_{,\tau}^2}{4} + \frac{r_{,\tau}\lambda_{,\tau}}{2r} - \left(r_{,RR} - \frac{1}{2}r_{,R}\lambda_{,R}\right)\frac{e^{-\lambda}}{r}. \quad (21)$$

3) Вывод уравнений (18)–(21) можно посмотреть, например, в работе [51] (§ 100, задача 5).

4. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Далее индексом «i» обозначаем все величины в начальный момент $\tau = 0$. Зададим начальное распределение величины[4] $r_{,\tau}$:

$$r^2_{,\tau}\big|_i \equiv r^2_{,\tau}\big|_i(R). \tag{22}$$

Выберем в начальный момент масштаб координаты R в (9) так, что

$$r_i = R. \tag{23}$$

Это возможно сделать в случае монотонного изменения функции r по координате R в начальный момент (вне черной дыры).

Определим начальное положение горизонта как $R_h = M + \sqrt{M^2 - q^2}$.

Интегрируя по времени уравнение (20), получаем

$$e^{-\lambda} r^2_{,R} = F_1(R). \tag{24}$$

Функция $F_1(R)$ определяет начальные условия для распределения плотности пыли. Учитывая выражения (11), (22) и (24), имеем

$$F_1(R_h) = r^2_{,\tau}\big|_i(R_h). \tag{25}$$

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Подставляя (24) в уравнение (19), получаем

$$\frac{q^2}{r^2} = \frac{\left(r r^2_{,\tau}\right)_{,\tau}}{r_{,\tau}} - F_1 + 1. \tag{26}$$

Умножая это уравнение на $r_{,\tau}$ и интегрируя затем по времени, имеем

$$\frac{q^2}{r} + r r^2_{,\tau} + (1 - F_1) r = F_2(R). \tag{27}$$

Функция $F_2(R)$ определяет начальные условия для распределения скорости пыли.

Введем определение массовой функции m (определяется через I_1, см. [52]):

$$I_1 = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}. \tag{28}$$

С учетом формул (2), (9) и (28) получаем

$$2m(\tau, R) = r\left[1 + r^2_{,\tau} - F_1 + \frac{q^2}{r^2}\right]. \tag{29}$$

Сопоставляя между собой выражения (27) и (29), заключаем, что

$$F_2(R) = 2m(R), \tag{30}$$

т. е. в нашей модели массовая функция не зависит от времени.

Умножая уравнение (18) на $r^2 r_{,R}$ и выражая $\lambda_{,\tau}$ из уравнения (20), получаем

$$8\pi\varepsilon r^2 r_{,R} - \left[\frac{q^2}{r} + r(1 - F_1) + r r^2_{,\tau}\right]_{,R} = 0. \tag{31}$$

Учитывая (29) и (30), записываем еще один интеграл движения, выражающий сохранение массы в сопутствующем объеме:

$$8\pi\varepsilon r^2 r_{,R} = 8\pi\varepsilon_i r_i^2 = 2\frac{dm}{dR} = \frac{dF_2}{dR}. \tag{32}$$

Интегрируя выражение (32) в пределах от R до ∞, получаем

$$\int\limits_R^\infty 8\pi\varepsilon r^2 r_{,R}\, dR = 2[m_\infty - m(R)]. \tag{33}$$

Отсюда, учитывая формулы (25) и (29), имеем

$$\begin{gathered} \frac{2m(R_h)}{R_h} = 1 + \frac{q^2}{R_h^2}, \\ 2m_\infty = R_h + \frac{q^2}{R_h} + \int\limits_{R_h}^\infty 8\pi\varepsilon_i R^2\, dR, \\ 2m(R) = R_h + \frac{q^2}{R_h} + \int\limits_{R_h}^R 8\pi\varepsilon_i R^2\, dR. \end{gathered} \tag{34}$$

Введем обозначение

$$S(R) \equiv \frac{1}{R}\int\limits_{R_h}^R 8\pi\varepsilon_i R^2\, dR = \frac{2[m(R) - m(R_h)]}{R}. \tag{35}$$

Величина S имеет смысл удвоенного (квази) ньютоновского потенциала неэлектромагнитной аккрецирующей материи, состоящей из пыли (вне горизонтов).

С учетом последних трех выражений связь потенциала S с функциями F_1 и F_2 устанавливается из (29) и (30) в начальный момент в виде

$$F_1 = 1 - S + r^2_{,\tau}\big|_i + \frac{q^2}{R^2} - \frac{q^2}{R R_h} - \frac{R_h}{R}, \tag{36}$$

[4] Величина $r_{,\tau}$ связана со «скоростью» V формулой (11).

$$F_2 = R\left[S + \frac{R_h}{R} + \frac{q^2}{RR_h}\right]. \qquad (37)$$

Из соотношения (24) следует, что $F_1 \geq 0$. Согласно (36) это накладывает ограничение на распределение $S(R)$.

Тождества Бианки[5)]

$$T^j_{n;j} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(T^j_n\sqrt{-g}\right)}{\partial x^j} - \frac{T^{jl}}{2}\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^n} = 0 \qquad (38)$$

содержатся в уравнениях Эйнштейна, их компоненты $n = \tau, \theta, \varphi$ тождественно обращаются в нуль, а компонента $n = R$ дает результат (32), который является аналогом интеграла для чисто пылевого решения (см. [51], § 103) в теории эволюции пылевого облака.

Выражая $\lambda_{,\tau}$ и $\lambda_{,\tau\tau}$ из уравнения (20), переписываем уравнение (21) в виде

$$\left[q^2/r^2 + F_1 - r^2_{,\tau} - 2rr_{,\tau\tau}\right]_{,R} = 0. \qquad (39)$$

Интегрирование уравнения (39) приводит к уравнению (19), т. е. оно выполняется тождественно. Это тождество является следствием приравнивания временной компоненты метрики (9) единице, что доказывает допустимость такого выбора метрики (см. [37]).

Стоит отметить, что для случая пыли возможность такого выбора метрики является очевидной, поскольку у пыли нет давления, поэтому сопутствующая система отсчета является одновременно и синхронной. Но при добавлении сферически-симметричного электромагнитного поля это уже не очевидно и найденное тождество является следствием отсутствия взаимодействия между незаряженной пылью и электромагнитным полем. Кроме этого, лоренцево преобразование вдоль поля не меняет этого поля, что позволяет использовать сопутствующую пыли систему отсчета, при движении в этой системе отсчета (вдоль поля) электромагнитное поле остается инвариантом. Если бы представление нашей метрики в виде выражения (9) было невозможно, то все дальнейшие вычисления не удалось бы довести до конца.

Выражая F_1 и F_2 через S, перепишем уравнение (27) в следующем виде:

$$\left(r^2_{,\tau}(r) - r^2_{,\tau}\big|_i + S - \frac{q^2}{R^2} + \frac{q^2}{RR_h} + \frac{R_h}{R}\right)r^2 - \\ - \left(RS + R_h + \frac{q^2}{R_h}\right)r + q^2 = 0. \qquad (40)$$

Предположим, что величина функции r может принимать сколь угодно малые значения (при заданных распределениях $r^2_{,\tau}\big|_i(R)$ и $S(R)$), тогда вторым слагаемым и всеми членами в первом слагаемом (кроме $r^2_{,\tau}(r)$) в формуле (40) можно пренебречь по сравнению с q^2. Тогда при $r \to 0$ имеем $r^2_{,\tau}(r) \to -q^2/r^2 < 0$, что невозможно. Это означает, что значение $r = 0$ недостижимо при любых начальных условиях[6)]. Исключение составляет только случай шварцшильдовской черной дыры с $q = 0$. При этом известно, что в решении Рейснера–Нордстрема нулевые геодезические достигают центральной сингулярности, см. [53].

6. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИЗНАЧАЛЬНО ПОКОЯЩЕЙСЯ ПЫЛИ

Исследуем далее частный случай начальных условий, соответствующих нулевой скорости $r^2_{,\tau}\big|_i(R) = 0$.

Введем обозначения

$$\tilde{q} \equiv q/r_i, \quad \tilde{r} \equiv r/r_i, \quad \tilde{R}_h \equiv R_h/r_i, \quad \tilde{\tau} \equiv \tau/r_i. \quad (41)$$

Из уравнения (19) следует, что

$$r_{,\tau\tau}|_i = \frac{1}{2R}\left[-S - \tilde{R}_h + 2\tilde{q}^2 - \tilde{q}^2/\tilde{R}_h\right]. \qquad (42)$$

Обозначив

$$S_{collapse} \equiv -\tilde{R}_h + 2\tilde{q}^2 - \tilde{q}^2/\tilde{R}_h, \qquad (43)$$

непосредственно из (42) можно убедиться, что в начальный момент при $S > S_{collapse}$ начальное ускорение $r_{,\tau\tau}|_i$ отрицательно, поэтому пыль начнет коллапсировать.

Из формул (11), (24) и (27) можно получить выражение для скорости V в случае изменяющихся во времени горизонтов r_h (при аккреции материи):

$$V^2 = \frac{F_1 - 1 + \dfrac{F_2}{r} - \dfrac{q^2}{r^2}}{F_1} = \\ = \frac{1}{\left(1 + \tilde{q}^2 - S - \dfrac{\tilde{q}^2}{\tilde{R}_h} - \tilde{R}_h\right)\tilde{r}^2} \times \\ \times\left[\left(\tilde{q}^2 - S - \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{R}_h} - \tilde{R}_h\right)\tilde{r}^2 + \right. \\ \left. + \left(S + \tilde{R}_h + \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{R}_h}\right)\tilde{r} - \tilde{q}^2\right]. \qquad (44)$$

5) Здесь g — детерминант метрического тензора.

6) Однако можно показать, что при задании $r^2_{,\tau}\big|_i \to \infty$ минимальное значение функции r стремится к нулю, так как такие геодезические приближаются к световым.

При отсутствии электромагнитного поля это выражение совпадает с решением для коллапсирующей пыли (см. [42]). Радиусы горизонта видимости соответствуют корням уравнения $V^2(r) = 1$:

$$\tilde{r}_h^2 - \left(S + \tilde{R}_h + \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{R}_h}\right)\tilde{r}_h + \tilde{q}^2 = 0. \qquad (45)$$

Отсюда имеем

$$\tilde{r}_h = \frac{1}{2}\left\{S + \tilde{R}_h + \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{R}_h} \pm \right.$$
$$\left. \pm \left[S^2 + 2S\tilde{R}_h + \frac{2S\tilde{q}^2}{\tilde{R}_h} - 2\tilde{q}^2 + \tilde{R}_h^2 + \frac{\tilde{q}^4}{\tilde{R}_h^2}\right]^{1/2}\right\}. \qquad (46)$$

Существование второго (меньшего) корня означает наличие второго (внутреннего) горизонта $r_{,v} = 0$ в системе. В работах [54–56] также изучалась динамика черных дыр с участием этих горизонтов, хотя вопрос их исчезновения и не рассматривался.

Из формул (44) и (46), в частности, видно, что при аккреции на черную дыру экзотической пыли с $\varepsilon < 0$ и $S < 0$ горизонты могут исчезнуть: величина $V^2(\tilde{r})$ не достигнет в этом случае единицы во всей области своих значений. При этом значение потенциала $S = S_h$, при котором черная дыра становится в результате аккреции предельной (корни уравнения $V^2(\tilde{r}) = 1$ становятся кратными и равными $r_h = q$) определяется выражением

$$S_h = S_{collapse} + 2\tilde{q}(1 - \tilde{q}) = 2\tilde{q} - \tilde{R}_h - \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{R}_h} =$$
$$= -\left(\sqrt{\tilde{R}_h} - \frac{\tilde{q}}{\sqrt{\tilde{R}_h}}\right)^2 \le 0. \qquad (47)$$

Дифференцирование выражения (45) по R дает

$$r^+_{h,R} = \frac{8\pi\varepsilon_i R^2 \tilde{r}_h^+}{2\tilde{r}_h^+ - S - \tilde{R}_h - \tilde{q}^2/\tilde{R}_h}. \qquad (48)$$

Условие

$$2\tilde{r}_h^+ - S - \tilde{R}_h - \tilde{q}^2/\tilde{R}_h \ge 0$$

согласно (46) выполняется всегда, поэтому знак правой части зависит только от знака ε_i. Мы рассматриваем только случай коллапса материи ($S > S_{collapse}$), поэтому на внешнем горизонте видимости координата R будет монотонно увеличиваться со временем, а это значит, что на этом горизонте

$$\left.\frac{dR}{d\tau}\right|_h > 0. \qquad (49)$$

Из формул (48) и (49) следует важный вывод.

При положительных значениях ε_i радиус горизонта r_h будет увеличиваться при аккреции, поэтому такой горизонт будет ППНГ-типа [см. (16)]. Соответственно при отрицательных значениях ε_i радиус горизонта будет уменьшаться при аккреции, поэтому в таком случае горизонт будет ВПГ-типа [см. (16)]. Аккреция экзотической пыли с $S < S_h$ приводит к отсутствию корней у уравнения $V^2 = 1$, а значит, к исчезновению горизонтов и черной дыры. См. по этому вопросу также работу [57].

Рассмотрим далее наиболее интересный предельный случай $R_h = q$.

Из выражения (27) легко найти закон движения пылевого слоя[7)]:

$$\tau = \int\limits_{r_i}^{r} \frac{dr}{r_{,\tau}} = \int\limits_{r_i}^{r} \frac{r\,dr}{-\sqrt{(F_1 - 1)r^2 + F_2 r - q^2}} =$$
$$= r_i \int\limits_{1}^{\tilde{r}} \frac{\tilde{r}\,d\tilde{r}}{-\sqrt{(1 - \tilde{r})(S_1\tilde{r} - \tilde{q}^2)}}, \qquad (50)$$

где

$$S_1 \equiv S + 2\tilde{q} - \tilde{q}^2. \qquad (51)$$

Квадратура (50) элементарно интегрируется:

$$\tilde{\tau} = \frac{\sqrt{(1 - \tilde{r})(S_1\tilde{r} - \tilde{q}^2)}}{S_1} +$$
$$+ \frac{S + 2\tilde{q}}{2S_1^{3/2}} \arccos\left\{1 - \frac{2S_1(1 - \tilde{r})}{S_1 - \tilde{q}^2}\right\}, \qquad (52)$$

или в другой форме:

$$\tilde{\tau} = \frac{\sqrt{(1 - \tilde{r})(S_1\tilde{r} - \tilde{q}^2)}}{S_1} +$$
$$+ \frac{S + 2\tilde{q}}{S_1^{3/2}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{S_1(1 - \tilde{r})}{S_1\tilde{r} - \tilde{q}^2}}. \qquad (53)$$

Таким образом, аналогично [37] эволюция пылевых слоев зависит от потенциала $S(R)$ и начального расстояния: r_i при фиксированном заряде q.

Определим для каждого R максимальное значение функции $\tau(r, R)$, соответствующее обращению $r_{,\tau}$ и скорости в нуль. Назовем это значение τ_{stop} (от начала движения до остановки). Этот момент соответствует в формуле (52) равенству минус единице аргумента арккосинуса (или нулю подкоренного выражения в той же формуле):

$$\tilde{\tau}_{stop} = \frac{\pi(S + 2\tilde{q})}{2S_1^{3/2}}, \quad \tilde{r}_{stop} = \frac{\tilde{q}^2}{S_1}. \qquad (54)$$

---

7) Вообще говоря, это справедливо только для монотонного изменения $r(\tau)$.

7. УСЛОВИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СЛОЕВ АККРЕЦИРУЮЩЕЙ ПЫЛИ

Физически корректным рассмотрение этой модели может быть только до момента возможного пересечения пылевых слоев. Это связано с тем, что после пересечения в сопутствующей материи системе появляется встречный поток энергии (от пересекаемых слоев материи), который не учтен в тензоре энергии-импульса. Пересечение соседних слоев материи соответствует бесконечной плотности энергии. Это соответствует условию $r_{,R} = 0$ (см. (32)). Дифференцирование выражения (53) по R позволяет определить функцию $r_{,R}(r, S)$ в явном виде. Аналогично работе [37] обозначим $S' \equiv RS_{,R}$ и, опуская промежуточные громоздкие вычисления, приведем окончательный результат для этой функции:

$$
\begin{aligned}
r_{,R} = 1 &+ \frac{1-\tilde r}{2\tilde r(S_1-\tilde q^2)S_1^2}\left[(S_1-\tilde q^2)(S'-2\tilde q+2\tilde q^2)\times\right.\\
&\times \left.(2\tilde q^2-S_1\tilde r)-\tilde q^2(S+2\tilde q)(2S'+S-2\tilde q+6\tilde q^2)\right]+\\
&+\frac{1}{2\tilde r S_1^{5/2}}\left[2(S_1-\tilde q^2)S_1-(S'-2\tilde q+2\tilde q^2)(S_1-3\tilde q^2)\right]\times\\
&\times\sqrt{(1-\tilde r)(S_1\tilde r-\tilde q^2)}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{S_1(1-\tilde r)}{S_1\tilde r-\tilde q^2}}. \qquad (55)
\end{aligned}
$$

Использовать эту формулу для определения момента пересечения несоседних в начальный момент слоев нельзя, так как пересечение с несоседними слоями не приводит ни к каким особенностям для пыли.

Отметим один важный для этой работы факт: при небольших отклонениях потенциала S от нуля существует диапазон $\tilde q \in (0, \tilde q_{max})$, в котором $r_{,R} > 0$ вплоть до $r = r_{stop}$, — пересечение слоев отсутствует.

Обратным по отношению к процессу аккреции экзотической материи на черную дыру является образование черной дыры из кротовой норы, аналитическое исследование этого процесса дано в работе [37].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали аккрецию экзотической пыли на заряженную черную дыру Рейснера – Нордстрема. В рамках этого исследования было получено аналитическое решение уравнений Эйнштейна для модели экзотической материи в виде пыли с отрицательной плотностью энергии. Было доказано, что в результате этой аккреции исчезают горизонты, значит черная дыра может испариться. Доказано также, что центральная сингулярность недостижима для свободно-падающей материи, независимо от начальных условий (исключая случай отсутствия заряда q). Образующиеся в результате объекты являются промежуточным звеном между черными дырами и кротовыми норами, и поэтому их исследование является важным этапом в понимании природы черных дыр и кротовых нор.

Мы благодарны сотрудникам отдела теоретической астрофизики ФИАН за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 07-02-01128-а, 08-02-00090-а), научной школы НШ-1653.2003.2 и программы РАН «Происхождение и эволюция звезд и галактик 2008».

ЛИТЕРАТУРА

1. D. N. Spergel, et al., Astroph. J. Suppl., **148**, 175 (2003).
2. A. Vikhlinin et al., arXiv:0812.2720.
3. F. S. N. Lobo, *Classical and Quantum Gravity Research Progress*, p. 1, Nova Sci. Publ. (2008).
4. M. S. Morris and K. S. Thorn, Amer. J. Phys. **56**, 395 (1988).
5. E. Babichev, V. Dokuchaev, and Yu. Eroshenko, Phys. Rev. Lett. **93**, 021102 (2004).
6. Е. Бабичев, В. Докучаев, Ю. Ерошенко, ЖЭТФ **100**, 528 (2005).
7. Sungwook E. Hong, Dong-il Hwang, E. D. Stewart, and Dong-han Yeom, arXiv:0808.1709.
8. Dong-han Yeom and Heeseung Zoe, arXiv:0811.1637.
9. J. A. Gonzalez and F. S. Guzman, arXiv:0903.0881.
10. S. A. Hayward, arXiv:gr-qc/9805019.
11. S. A. Hayward, arXiv:gr-qc/0110080.
12. S. A. Hayward, arXiv:gr-qc/0202059.
13. S. A. Hayward and H. Koyama, arXiv:gr-qc/0406080.
14. H. Koyama and S. A. Hayward, arXiv:gr-qc/0406113.
15. А. А. Шацкий, ЖЭТФ **104**, 743 (2007).
16. S. V. Sushkov, Phys. Rev. D **71**, 043520 (2005).
17. F. S. N. Lobo, Phys. Rev. D **71**, 084011 (2005).
18. F. S. N. Lobo, Phys. Rev. D **71**, 124022 (2005).

19. H. Maeda, T. Harada, and B. Carr, arXiv:0901.1153.

20. K. A. Bronnikov and A. A. Starobinsky, arXiv:0903.5173.

21. Hisa-aki Shinkai and Sean A. Hayward, arXiv:gr-qc/0205041.

22. J. A. Gonzalez, F. S. Guzman, and O. Sarbach, arXiv:gr-qc/0806.1370.

23. A. Doroshkevich, J. Hansen, I. Novikov, and A. Shatskiy, arXiv:0812.0702.

24. S. A. Hayward, arXiv:0903.5438.

25. S. Krasnikov, Phys. Rev. D **62**, 084028 (2002).

26. E. Novikova and I. Novikov, arXiv:0907.1936.

27. Н. С. Кардашев, И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, Астрон. ж. **83**, 675 (2006).

28. N. S. Kardashev, I. D. Novikov, and A. Shatskiy, Int. J. Mod. Phys. D **16**, 909 (2007).

29. А. А. Шацкий, Астрон. ж. **84**, 99 (2007).

30. A. Einstein and N. Rosen, J. Frankl. Inst. **223**, 43 (1937).

31. C. W. Misner and J. A. Wheeler, Ann. Phys. (N. Y.), **2**, 525 (1957).

32. M. Visser, *Lorentzian Wormholes: from Einstein to Hawking*, AIP, Woodbury (1995).

33. H. G. Ellis, J. Math. Phys. **14**, 104 (1973).

34. V. P. Frolov and I. D. Novikov, *Black Hole Physics*, Kluver Acad. Publ. (1998).

35. M. Richarte and C. Simeone, Int. J. Mod. Phys. D **17**, 1179 (2008).

36. *Universe or Multiverse?*, ed. by B. Carr, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007).

37. А. А. Шацкий, И. Д. Новиков, Н. С. Кардашев, УФН **178**(5), 481 (2008).

38. L. M. Burko and A. Ori, Phys. Rev. D **56**, 7820 (1997).

39. L. M. Burko and A. Ori, Phys. Rev. D **57**, 7084 (1998).

40. A. B. Nielsen, Int. J. Mod. Phys. D **17**, 2359 (2008).

41. S. A. Hayward, Phys. Rev. D **49**, 6467 (1994).

42. А. А. Шацкий, А. Ю. Андреев, ЖЭТФ **116**, 353 (1999).

43. И. Д. Новиков, Вестник МГУ, сер. 3 **6**, 61 (1962).

44. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Релятивистская астрофизика*, т. 1, Наука, Москва (1967); *Stars and Relativity*, Univ. Chicago Press (1972).

45. А. А. Шацкий, ЖЭТФ **131**, 851 (2007).

46. D. Hochberg and M. Visser, Phys. Rev. D **58**, 044021 (1998).

47. S. A. Hayward, Int. J. Mod. Phys. D **8**, 373 (1999).

48. J. C. Graves and D. R. Brill, Phys. Rev. D **120**, 1507 (1960).

49. R. C. Tolman, Proc. Nat. Acad. Sci. US **20**, 169 (1934).

50. J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **56**, 455 (1939).

51. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, т. II, Наука, Москва (1988).

52. E. Poisson and W. Israel, Phys. Rev. D **41**, 1796 (1990).

53. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, т. 3, Айнштайн, Бишкек (1997).

54. S. O. Alexeyev et al., Int. J. Mod. Phys. D **10**, 225 (2001).

55. S. O. Alexeyev et al., Clas. Quant. Grav. **19**, 4431 (2002).

56. S. Alexeyev, M. Sazhin, and O. Khovanskaya, Astron. Lett. **3**, 139 (2002).

57. D. Novikov, A. Doroshkevich, I. Novikov, A. Shatskiy, arXiv:0908.1300.