

ВЛИЯНИЕ КРОССКОРРЕЛЯЦИЙ МЕЖДУ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПАРАМЕТРОВ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ НА СПЕКТР И ЗАТУХАНИЕ УПРУГИХ ВОЛН

В. А. Игнатченко^{a,}, Д. С. Полухин^b*

^a *Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук
660036, Красноярск, Россия*

^b *Сибирский федеральный университет
660041, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 29 июня 2009 г.

Исследованы законы дисперсии и затухания упругих волн в изотропной среде с одно- и трехмерными неоднородностями плотности $\rho(\mathbf{x})$ вещества и силовых упругих констант $\mu(\mathbf{x})$ и $\lambda(\mathbf{x})$ с учетом кросскорреляций между этими неоднородностями. Показано, что положительные кросскорреляции между $\mu(\mathbf{x})$ и $\lambda(\mathbf{x})$, а также отрицательные кросскорреляции между $\rho(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ или $\rho(\mathbf{x})$ и $\lambda(\mathbf{x})$ приводят к усилению модификации закона дисперсии и к росту затухания волн. Положительные кросскорреляции между $\rho(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ или между $\rho(\mathbf{x})$ и $\lambda(\mathbf{x})$, а также отрицательные кросскорреляции между $\mu(\mathbf{x})$ и $\lambda(\mathbf{x})$ приводят к обратному эффекту — ослаблению модификации закона дисперсии и уменьшению затухания. Анализ результатов, полученных в этой работе и в работе [15], позволяет сформулировать общую закономерность действия кросскорреляций, не зависящую от физической природы волн: характер действия кросскорреляций между неоднородностями любых двух параметров вещества на спектр волн определяется тем, принадлежат ли оба параметра, связанные кросскорреляциями, к той же самой части гамильтониана (т.е. оба относятся к кинетической или оба — к потенциальной части) или они принадлежат к разным частям гамильтониана. В первом случае положительные кросскорреляции приводят к большей модификации закона дисперсии и росту затухания волн, во втором случае — к уменьшению этих характеристик. Соответственно, отрицательные кросскорреляции в каждом из этих случаев приводят к обратным эффектам. Дано качественное объяснение этой закономерности.

1. ВВЕДЕНИЕ. АВТОКОРРЕЛЯЦИИ И КРОССКОРРЕЛЯЦИИ

Аморфные и нанокристаллические материалы широко используются в различных устройствах современной электроники, построенных на основе пространства и преобразования электромагнитных, упругих и спиновых волн. С точки зрения теории, такие материалы характеризуются двумя основными свойствами: 1) неоднородностью всех параметров гамильтониана (плотности вещества, упругих силовых констант, параметров обмена, магнитной анизотропии и т.д.); 2) протяженными корреляциями этих неоднородностей, корреляционный радиус которых определяется как топологическим, так и композиционным беспорядком и может меняться в ши-

роких пределах (десятки и сотни межатомных расстояний). Наличие больших корреляционных радиусов делает невозможным использование хорошо развитых теоретических методов, учитывающих влияние некоррелированных (δ -коррелированных) неоднородностей для расчета целого ряда эффектов в этих материалах.

Влияние неоднородностей с произвольными радиусами корреляций на спектр и затухание спиновых волн в модели сплошной среды было учтено в работах [1–3] в первом неисчезающем приближении теории возмущений. Затем в этом же приближении влияние коррелированных неоднородностей на спектр спиновых волн было учтено в решеточной модели ферромагнетика [4, 5] и в модели сплошной среды [6]. Влияние неоднородностей с произвольными радиусами корреляций на спектр и затухание упру-

*E-mail: vignat.ch@iph.krasn.ru

гих волн в изотропной среде учитывалось в работах [1, 7, 8].

В таких случайно-неоднородных средах частота $\omega'(k)$ и затухание $\omega''(k)$ волн являются функционалами от корреляционных функций, описывающих стохастические свойства пространственных функций параметров среды. В работах [1–6, 8] влияние каждого флуктуирующего параметра среды $A_i(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ рассматривалось отдельно: например, полагалась неоднородной константа обмена $\alpha(\mathbf{x})$ при условии постоянства всех других параметров спинового гамильтониана, затем при аналогичных условиях рассматривалась задача о влиянии неоднородностей величины магнитной анизотропии $\beta(\mathbf{x})$ и т. д.

Случайная функция $A_i(\mathbf{x})$ для каждого i -го параметра среды представлялась в виде

$$A_i(\mathbf{x}) = A_i [1 + \gamma_i \rho_i(\mathbf{x})], \quad (1)$$

где A_i и γ_i — соответственно среднее значение и относительное среднеквадратичное отклонение функции $A_i(\mathbf{x})$, а $\rho_i(\mathbf{x})$ — центрированная ($\langle \rho_i(\mathbf{x}) \rangle = 0$) и нормированная ($\langle \rho_i^2(\mathbf{x}) \rangle = 1$) однородная случайная функция координат. Стохастические характеристики случайной функции $\rho_i(\mathbf{x})$ описываются автокорреляционной функцией $K_{ii}(\mathbf{r})$ или связанной с ней преобразованием Фурье спектральной плотностью $S_{ii}(\mathbf{k})$ неоднородностей:

$$K_{ii}(\mathbf{r}) = \langle \rho_i(\mathbf{x}) \rho_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \\ S_{ii}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int K_{ii}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (2)$$

где $|\mathbf{r}|$ — расстояние между двумя точками в пространстве, а угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций случайной функции $\rho_i(\mathbf{x})$. Из физических соображений и анализа ряда точно решаемых моделей (см., например, [9–12]) автокорреляционные функции $K_{ii}(\mathbf{r})$ моделировались быстроубывающими функциями с произвольными корреляционными радиусами r_{ii} (исследовалась экспоненциальная функция, функции Гаусса и Кармана). Величина $2r_{ii}$ определяет длину коррелированных (и соответственно самых коротких) флуктуаций. В частном случае поликристалла (нанокристалла) при отсутствии какого-либо беспорядка внутри каждого кристаллита, корреляционная длина $2r_{ii}$ соответствует среднему размеру кристаллита. Спектральная плотность $S_{ii}(\mathbf{k})$ неоднородностей при этом также является монотонно убывающей функцией, спектр которой обрезается корреляционным волновым числом $k_{ii} = r_{ii}^{-1}$.

Следует заметить, что в некоторых специфических случаях могут возникать неоднородности, описываемые немонотонно убывающими корреляционными функциями. Исследуя закономерности рассеяния рентгеновских лучей в перенасыщенных твердых растворах, Кривоглаз [13], видимо, первый обратил внимание на то, что для таких сред нарушение среднего концентрационного профиля происходит лишь в малых локальных объемах. Из-за закона сохранения атомов в каждом таком малом объеме коррелированными между собой оказываются соседние положительные и отрицательные «полуволны» отступления концентрации от средней. Поэтому корреляционная функция концентрации также имеет отрицательную полуволну после положительной и интеграл от $K_{ii}(\mathbf{r})$ по объему обращается в нуль. В наших работах (см. ссылки в обзоре [14]) были также исследованы эффекты, к которым приводят такие корреляционные функции. Однако топологический беспорядок, характерный для аморфных и нанокристаллических сред, не имеет локальных законов сохранения и приводит к монотонно убывающим корреляционным функциям [9–12], которыми мы и ограничимся в данной работе.

Таким образом, неоднородность каждого параметра среды добавляет в теорию две произвольные постоянные: среднеквадратичное отклонение γ_i и корреляционный радиус r_{ii} (или корреляционное волновое число k_{ii}) флуктуаций данного параметра A_i . Эти величины должны либо определяться сравнением развиваемой феноменологической теории с экспериментом, либо рассчитываться из микроскопических моделей неоднородностей в данной конкретной среде.

Главный результат теории, развитой в работах [1–3], заключается в том, что в окрестности волнового числа $k = k_{ii}/2$ должно наблюдаться изменение законов дисперсии $\omega'(k)$ и затухания $\omega''(k)$ и оно различно для неоднородностей разных физических параметров. Так, неоднородность обмена приводит в области $k \sim k_{ii}/2$ к изгибу дисперсионной кривой $\omega'(k)$ для спиновых волн в сторону меньших значений ω' , а неоднородность величины магнитного момента — к изгибу в сторону больших ω' . Дисперсионная кривая $\omega'(k)$ для упругих волн также имеет в этой области различные изгибы при неоднородностях упругих констант или неоднородности плотности материала. Величины этих эффектов пропорциональны γ_i^2 . Качественная картина модификации кривых $\omega'(k)$ и $\omega''(k)$ не зависит от формы моделирующей корреляционной функции, если эта функция характеризуется достаточно быстрым спадом кор-

реляций. Все эти эффекты обусловлены тем, что волны по-разному рассеиваются на коррелированных ($k > k_{ii}/2$) и некоррелированных ($k \ll k_{ii}/2$) участках неоднородностей. На основе этой теории был развит экспериментальный метод корреляционной спин-волновой спектроскопии, с помощью которого были измерены корреляционные радиусы неоднородностей r_{ii} и величины среднеквадратичных отклонений γ_i для многих аморфных и нанокристаллических магнитных сплавов [14], определены зависимости величин r_{ii} и γ_i от состава и температурной обработки сплава.

Теория, в которой неоднородности каждого параметра рассматриваются отдельно, приближенно справедлива в ряде случаев. Одним из них является ситуация, когда вклад флуктуаций одного из параметров среды в модификацию зависимостей $\omega'(k)$ и $\omega''(k)$ является преобладающим. Типичным примером являются электромагнитные волны, уравнения которых обычно содержат только один неоднородный параметр — диэлектрическую проницаемость. Другой случай соответствует ситуации, когда модификации в спектре волн, обусловленные неоднородностями различных параметров, находятся в различных диапазонах волновых чисел k (благодаря существенной разнице величин их корреляционных радиусов r_{ii}) и эти неоднородности могут приближенно рассматриваться как статистически независимые. Во всех этих случаях автокорреляционные функции вида (2) обычно называют просто корреляционными функциями.

Однако в общем случае усреднение стохастических волновых уравнений, содержащих несколько неоднородных параметров $A_i(\mathbf{x})$, приводит к тому, что $\omega'(k)$ и $\omega''(k)$, как и все неслучайные характеристики случайной системы, становятся функционалами не только автокорреляционных функций $K_{ii}(\mathbf{r})$ каждого параметра A_i , но и функций взаимных корреляций (кросскорреляций) $K_{ij}(\mathbf{r})$ между параметрами (или их спектральных плотностей $S_{ij}(\mathbf{k})$) вида

$$\begin{aligned} K_{ij}(\mathbf{r}) &= \langle \rho_i(\mathbf{x}) \rho_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \\ S_{ij}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int K_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $i \neq j$ и усреднение проводится по ансамблям реализаций обеих случайных функций, $\rho_i(\mathbf{x})$ и $\rho_j(\mathbf{x})$.

Таким образом, анализу усредненных уравнений, описывающих волновой спектр и затухание неоднородной среды, должен предшествовать расчет или физически обоснованное моделирование функций $K_{ii}(\mathbf{r})$ и $K_{ij}(\mathbf{r})$. Последовательный расчет этих

функций может быть проведен только для ограниченного числа простейших случаев. Так, в работе [7] закон дисперсии $\omega'(k)$ и затухание $\omega''(k)$ в изотропной среде были исследованы для случая, когда упругие волны $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ распространяются на фоне топологического беспорядка, описываемого метастабильными изотропными деформациями $\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv u_{ii}^0(\mathbf{x})$. В этой модели плотность вещества $p(\mathbf{x})$ и упругие константы $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ зависят от одной и той же случайной функции $\varepsilon(\mathbf{x})$. Функция $p(\varepsilon)$ может быть записана явно, а $\lambda(\varepsilon)$ и $\mu(\varepsilon)$ могут быть представлены в виде разложения в степенной ряд по этой функции. В результате все автокорреляционные функции K_{ii} и все кросскорреляционные функции K_{ij} , вошедшие в выражения для $\omega'(k)$ и $\omega''(k)$ после усреднения уравнений упругости, были выражены через единственную корреляционную функцию случайной величины $\varepsilon(\mathbf{x})$. Несмотря на то что такое представление добавило в теорию ряд произвольных констант (коэффициенты разложения параметров среды λ и μ в степенной ряд по ε), общее число произвольных констант в теории резко сократилось, так как вместо корреляционных радиусов r_{ii} и r_{ij} в нее вошел только один корреляционный радиус и одна среднеквадратичная флуктуация случайной функции $\varepsilon(\mathbf{x})$.

Однако такие простейшие случаи, когда все параметры среды могут быть представлены как точные функции топологического или композиционного беспорядка сплава, являются скорее исключениями. В современном материаловедении исследуются и используются материалы с весьма сложным составом, содержащим до пяти-шести различных компонент, необходимых для придания материалу каких-либо специальных свойств (например, нулевой средней магнитострикции). Поэтому в общем случае предполагается, что между каждыми двумя параметрами вещества существуют связи, приводящие к тому, что пространственная флуктуация этого параметра в какой-либо окрестности точки \mathbf{x} будет способствовать появлению в этой же окрестности пространственной флуктуации другого параметра. Однако флуктуация другого параметра не обязана при этом точно воспроизводить форму флуктуации первого параметра. В теории случайных полей такие связи учитываются функциями $K_{ij}(\mathbf{r})$ взаимных корреляций (кросскорреляций) между этими двумя параметрами. В отличие от автокорреляционной функции $K_{ii}(\mathbf{r})$, которая равна единице при $\mathbf{r} = 0$ кросскорреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{r})$, определяемая формулой (3), при $\mathbf{r} = 0$ равна некоторому безразмерному коэффициенту κ_{ij} . Этот коэффициент характеризует величину и знак кросскорреля-

ций между параметрами A_i и A_j и может принимать произвольное значение в интервале от -1 до $+1$. Конкретная величина и знак κ_{ij} должны определяться из опыта или рассчитываться из микроскопической модели, учитывающей реальные и в некоторых случаях весьма сложные физические связи между параметрами A_i и A_j . Такое формализованное описание позволяет исследовать на первом этапе влияние кросскорреляций на спектр системы в общем виде без детального обсуждения физических механизмов, которые привели к возникновению этих кросскорреляций.

В предельных случаях $\kappa_{ij} = \pm 1$ стохастические кросскорреляции переходят в детерминистические связи между неоднородностями различных параметров. При $\kappa_{ij} = 1$ случайные функции $\rho_i(\mathbf{x})$ и $\rho_j(\mathbf{x})$ совпадают друг с другом, а при $\kappa_{ij} = -1$ являются зеркальным отображением друг друга: положительным отклонениям функции $\rho_i(\mathbf{x})$ соответствуют отрицательные отклонения функции $\rho_j(\mathbf{x})$ такой же величины и формы и наоборот. Для изотропной упругой системы частный случай $\kappa_{ij} = 1$ совпадает с моделью функциональной зависимости между параметрами $p(\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$, исследованной в работе [7]. В общем случае наличие кросскорреляций, не меняя среднеквадратичных отклонений γ_i и γ_j случайных функций $A_i(\mathbf{x})$ и $A_j(\mathbf{x})$ приводит к частичной стохастической пространственной синхронизации этих функций, степень которой определяется абсолютной величиной коэффициента кросскорреляций κ_{ij} .

В нашей работе [15] было исследовано влияние кросскорреляций между неоднородностями параметров обмена $\alpha(\mathbf{x})$ и магнитной анизотропии $\beta(\mathbf{x})$ на спектр и затухание спиновых волн в ферромагнетике. Было показано, что положительные кросскорреляции между этими параметрами приводят к усилению модификации закона дисперсии и увеличению затухания спиновых волн. Отрицательные кросскорреляции приводят к обратным эффектам — ослаблению модификации закона дисперсии и уменьшению затухания волн.

Целью настоящей работы является расчет совместного влияния на спектр и затухание упругих волн в изотропной среде неоднородностей силовых констант $\mu(\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x})$ и плотности вещества $p(\mathbf{x})$ при наличии между случайными функциями $\mu(\mathbf{x})$ и $\lambda(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x})$ и $\lambda(\mathbf{x})$ кросскорреляций произвольной величины и знака.

2. МОДЕЛЬ И МЕТОД. ОДНОМЕРНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ

Рассмотрим модель изотропной упругой среды, где неоднородными являются силовые константы $\lambda(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ и плотность вещества $p(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Уравнение движения для вектора смещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$-p(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial u_f}{\partial x_f} \right) + \frac{\partial}{\partial x_f} \left(\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial u_s}{\partial x_f} \right) + \frac{\partial}{\partial x_f} \left(\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial u_f}{\partial x_s} \right) = 0, \quad (4)$$

где индексы « s », « f » пробегают значения x, y, z и по дважды повторяющемуся индексу f подразумевается суммирование по всем координатам. Представим зависящие от координат параметры $p(\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ в виде

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= p [1 + \gamma_p \rho_p(\mathbf{x})], & \gamma_p &= \Delta p/p, \\ \lambda(\mathbf{x}) &= \lambda [1 + \gamma_\lambda \rho_\lambda(\mathbf{x})], & \gamma_\lambda &= \Delta \lambda/\lambda, \\ \mu(\mathbf{x}) &= \mu [1 + \gamma_\mu \rho_\mu(\mathbf{x})], & \gamma_\mu &= \Delta \mu/\mu, \end{aligned} \quad (5)$$

где p и Δp , λ и $\Delta \lambda$, μ и $\Delta \mu$ — соответственно средние значения и среднеквадратичные флуктуации этих параметров, $\rho_p(\mathbf{x})$, $\rho_\lambda(\mathbf{x})$ и $\rho_\mu(\mathbf{x})$ — безразмерные центрированные ($\langle \rho_p(\mathbf{x}) \rangle = 0$, $\langle \rho_\lambda(\mathbf{x}) \rangle = 0$, $\langle \rho_\mu(\mathbf{x}) \rangle = 0$) и нормированные ($\langle \rho_p^2(\mathbf{x}) \rangle = 1$, $\langle \rho_\lambda^2(\mathbf{x}) \rangle = 1$, $\langle \rho_\mu^2(\mathbf{x}) \rangle = 1$) случайные функции координат. Угловые скобки обозначают среднее по ансамблю реализаций соответствующих случайных функций.

Вывод закона дисперсии и затухания упругих волн рассмотрим на примере одномерных неоднородностей. В этом случае вектор смещения \mathbf{u} является функцией только одной координаты z и времени. Для поперечных компонент u_t вектора \mathbf{u} уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} - v_t^2 \frac{\partial^2 u_t}{\partial z^2} = -\frac{\Delta p}{p} \rho_p(z) \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} + \frac{\Delta \mu}{p} \left[\rho_\mu(z) \frac{\partial^2 u_t}{\partial z^2} + \frac{\partial \rho_\mu(z)}{\partial z} \frac{\partial u_t}{\partial z} \right], \quad (6)$$

а для продольной компоненты u_l имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} - v_l^2 \frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2} &= -\frac{\Delta p}{p} \rho_p(z) \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{\Delta \lambda}{p} \left[\rho_\lambda(z) \frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2} + \frac{\partial \rho_\lambda(z)}{\partial z} \frac{\partial u_l}{\partial z} \right] + \\ &+ \frac{2\Delta \mu}{p} \left[\rho_\mu(z) \frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2} + \frac{\partial \rho_\mu(z)}{\partial z} \frac{\partial u_l}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где $v_t = \sqrt{\mu/p}$, $v_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/p}$ — скорости соответственно поперечных и продольных волн.

Принимая, что $\mathbf{u}(z, t) \sim e^{-i\omega t} \mathbf{u}(z)$ и проводя преобразование Фурье по z ,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(z) &= \int \mathbf{u}(k) e^{ikz} dk, \\ \mathbf{u}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{u}(z) e^{-ikz} dz, \end{aligned} \quad (8)$$

где k — волновое число, получаем из уравнений (6) и (7) уравнения для трансформант Фурье функции $\mathbf{u}(z)$:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - v_t^2 k^2) u_t(k) &= -\omega^2 \gamma_p \int_{-\infty}^{\infty} \rho_p(k - k_1) u_t(k_1) dk_1 + \\ &+ \frac{\mu}{p} \gamma_\mu k \int_{-\infty}^{\infty} k_1 \rho_\mu(k - k_1) u_t(k_1) dk_1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (\omega^2 - v_l^2 k^2) u_l(k) &= -\omega^2 \gamma_p \int_{-\infty}^{\infty} \rho_p(k - k_1) u_l(k_1) dk_1 + \\ &+ \frac{\lambda}{p} \gamma_\lambda k \int_{-\infty}^{\infty} k_1 \rho_\lambda(k - k_1) u_l(k_1) dk_1 + \\ &+ \frac{2\mu}{p} \gamma_\mu k \int_{-\infty}^{\infty} k_1 \rho_\mu(k - k_1) u_l(k_1) dk_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Усредняем уравнения (9) и (10) по случайным реализациям функций $\rho_p(k - k_1)$, $\rho_\lambda(k - k_1)$ и $\rho_\mu(k - k_1)$ и расцепляем образовавшиеся корреляторы $\langle \rho u \rangle$ в первом исчезающем порядке теории возмущений. Схему расщепления корреляторов рассмотрим на примере уравнения (9). После усреднения это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} (\omega^2 - v_t^2 k^2) \langle u_t(k) \rangle &= \\ &= -\omega^2 \gamma_p \int_{-\infty}^{\infty} \langle \rho_p(k - k_1) u_t(k_1) \rangle dk_1 + \\ &+ \frac{\mu}{p} \gamma_\mu k \int_{-\infty}^{\infty} k_1 \langle \rho_\mu(k - k_1) u_t(k_1) \rangle dk_1. \end{aligned} \quad (11)$$

По общим правилам на первом шаге расцепляем среднее от произведений функций ρ_i ($i = p, \mu$) и u_t в уравнении (11) на произведение средних и коррелятор от произведения центрированных значений этих функций:

$$\langle \rho_i u_t \rangle = \langle \rho_i \rangle \langle u_t \rangle + \langle \rho_i \overset{\circ}{u}_t \rangle, \quad (12)$$

где

$$\overset{\circ}{u}_t(k) = u_t(k) - \langle u_t(k) \rangle. \quad (13)$$

Произведение средних в выражении (12) обращается в нуль вследствие центрированности функций ρ_i . Поэтому в усредненном уравнении (11) будут отсутствовать члены, пропорциональные первым степеням γ_i , а в интегральных членах этого уравнения останутся корреляторы вида $\langle \rho_i \overset{\circ}{u}_t \rangle$.

На втором шаге выражаем формально $u_t(k)$ из уравнений (9) и повышаем в этом выражении индексы при k на единицу:

$$\begin{aligned} u_t(k_1) &= -\omega^2 \gamma_p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_p(k_1 - k_2) u_t(k_2) dk_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} + \\ &+ \frac{\mu}{p} \gamma_\mu k_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2 \rho_\mu(k_1 - k_2) u_t(k_2) dk_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычитая из этого выражения $\langle u_t(k_1) \rangle$, подставляем центрированную величину $\overset{\circ}{u}_t$ в корреляторы $\langle \rho_i \overset{\circ}{u}_s \rangle$ уравнения (11). Члены $\langle \rho_i \langle u_t \rangle \rangle$ при этом обращаются в нуль вследствие центрированности функций ρ_i , поэтому проделанная операция эквивалентна прямой подстановке выражения (14) в уравнение (11), которое принимает вид

$$\begin{aligned} (\omega - v_t^2 k^2) \langle u_t(k) \rangle &= \omega^4 \gamma_p^2 \times \\ &\times \iint \frac{\langle \rho_p(k - k_1) \rho_p(k_1 - k_2) u_t(k_2) \rangle dk_1 dk_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} - \\ &- \omega^2 \gamma_p \gamma_\mu \frac{\mu}{p} \times \\ &\times \iint \frac{k k_1 \langle \rho_\mu(k - k_1) \rho_p(k_1 - k_2) u_t(k_2) \rangle dk_1 dk_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} - \\ &- \omega^2 \gamma_p \gamma_\mu \frac{\mu}{p} \times \\ &\times \iint \frac{k_1 k_2 \langle \rho_p(k - k_1) \rho_\mu(k_1 - k_2) u_t(k_2) \rangle dk_1 dk_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} + \\ &+ \gamma_\mu^2 \frac{\mu^2}{p^2} \times \\ &\times \iint \frac{k k_2 k_1^2 \langle \rho_\mu(k - k_1) \rho_\mu(k_1 - k_2) u_t(k_2) \rangle dk_1 dk_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Продельвая такие же преобразования с уравнением (10) для продольных волн, приводим его к форме, аналогичной уравнению (15), но более громоздкой, так как помимо членов, пропорциональных γ_p^2 , γ_μ^2 и $\gamma_p \gamma_\mu$, оно содержит члены, пропорциональные γ_λ^2 , $\gamma_p \gamma_\lambda$ и $\gamma_\lambda \gamma_\mu$. Стоящие в этих уравнениях под интегралами средние от произведений трех случайных функций расцепляем в первом исчезающем приближении теории возмущений (приближении Бурре [16]):

$$\langle u_s(k_2)\rho_i(k-k_1)\rho_j(k_1-k_2)\rangle \approx \langle u_s(k_2)\rangle\langle\rho_i(k-k_1)\rho_j(k_1-k_2)\rangle, \quad (16)$$

где $s = t, l$, а каждый из индексов « i » и « j » принимает значения p, λ и μ . В этом выражении отброшен в правой части коррелятор вида $\langle \overset{\circ}{u}_s(k_2)\overset{\circ}{P}_{ij}\rangle$, где $\overset{\circ}{P}_{ij} = \rho_i\rho_j - \langle\rho_i\rho_j\rangle$. Подстановка выражения (14) с повышенными на единицу индексами при k в этот коррелятор привела бы к следующему члену ряда теории возмущения и т. д.

Так как $\rho_i(z)$ и $\rho_j(z)$ — однородные случайные функции, для них справедливо соотношение

$$\langle\rho_i(k')\rho_j^*(k'')\rangle = S_{ij}(k')\delta(k' - k''), \quad (17)$$

где $S_{ij}(k)$ — компоненты матрицы спектральной плотности случайных функций $\rho_i(k)$ и $\rho_j(k)$. Компоненты корреляционной матрицы случайных функций $\rho_i(z)$ и $\rho_j(z)$ определяются выражением

$$K_{ij}(r) = \langle\rho_i(z)\rho_j(z+r)\rangle, \quad (18)$$

где r — расстояние между двумя точками. Диагональные компоненты ($i = j$) корреляционной матрицы являются автокорреляционными функциями i -го неоднородного параметра, недиагональные компоненты ($i \neq j$) описывают кросскорреляции между i -м и j -м параметрами. Компоненты $K_{ij}(r)$ и $S_{ij}(r)$ связаны преобразованием Фурье (теорема Винера–Хинчина для однородных случайных функций):

$$K_{ij}(r) = \int S_{ij}(k)e^{ikr} dk, \quad (19)$$

$$S_{ij}(k) = \frac{1}{2\pi} \int K_{ij}(r)e^{-ikr} dr.$$

Учитывая соотношения (16) и (17), проводим в уравнении (15) и в соответствующем уравнении для $\langle u_l\rangle$ интегрирование по k_2 . После этого $\langle u_l(k)\rangle$ и $\langle u_l(k)\rangle$ могут быть вынесены из под знака интеграла и мы получаем общий вид комплексных дисперсионных уравнений для поперечных,

$$\omega^2 - v_t^2 k^2 = \omega^4 \gamma_p^2 L_{pp}^t - 2\omega^2 \gamma_p \gamma_\mu v_t^2 k L_{p\mu}^t + \gamma_\mu^2 v_t^4 k^2 L_{\mu\mu}^t, \quad (20)$$

и продольных волн:

$$\omega^2 - v_l^2 k^2 = \omega^4 \gamma_p^2 L_{pp}^l - 2\omega^2 \gamma_p \gamma_\lambda (v_l^2 - 2v_l^2) k L_{p\lambda}^l - 4\omega^2 \gamma_p \gamma_\mu v_l^2 k^2 L_{p\mu}^l + \gamma_\lambda^2 (v_l^2 - 2v_l^2)^2 k^2 L_{\lambda\lambda}^l + 4\gamma_\lambda \gamma_\mu v_l^2 (v_l^2 - 2v_l^2) k^2 L_{\lambda\mu}^l + 4\gamma_\mu^2 v_l^4 L_{\mu\mu}^l, \quad (21)$$

где

$$L_{pp}^t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{pp}(k-k_1)}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} dk_1,$$

$$L_{p\mu}^t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_1 S_{p\lambda}(k-k_1)}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} dk_1,$$

$$L_{\mu\mu}^t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_1^2 S_{\lambda\mu}(k-k_1)}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} dk_1,$$

$$L_{pp}^l = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{pp}(k-k_1)}{\omega^2 - v_l^2 k_1^2} dk_1,$$

$$L_{p\mu}^l = L_{p\lambda}^l = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_1 S_{p\lambda}(k-k_1)}{\omega^2 - v_l^2 k_1^2} dk_1,$$

$$L_{\lambda\lambda}^l = L_{\mu\mu}^l = L_{\lambda\mu}^l = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_1^2 S_{\lambda\mu}(k-k_1)}{\omega^2 - v_l^2 k_1^2} dk_1. \quad (22)$$

Члены, пропорциональные γ_p^2 , γ_λ^2 и γ_μ^2 , учитывают в этих уравнениях влияние неоднородностей плотности вещества и силовых констант, а члены, пропорциональные произведениям $\gamma_p \gamma_\lambda$, $\gamma_p \gamma_\mu$ и $\gamma_\lambda \gamma_\mu$, — влияние кросскорреляций между соответствующими неоднородностями.

Предполагаем, что спад корреляций является экспоненциальным как для автокорреляционных функций плотности вещества, $K_{pp}(r)$, и силовых констант, $K_{\lambda\lambda}(r)$, $K_{\mu\mu}(r)$, так и для функций кросскорреляций между флуктуациями плотности и силовой константы, $K_{p\lambda}(r)$, $K_{p\mu}(r)$, и между силовыми константами $K_{\lambda\mu}(r)$:

$$K_{ii} = \exp(-k_{ii}r), \quad K_{ij} = \kappa_{ij} \exp(-k_{ij}r), \quad (23)$$

где $r = |x - x'|$, κ_{ij} — безразмерные коэффициенты корреляций, лежащие в интервале $-1 < \kappa_{ij} < 1$, $k_{ii} = r_{ii}^{-1}$ и $k_{ij} = r_{ij}^{-1}$ — корреляционные волновые числа, а r_{ii} и r_{ij} — корреляционные радиусы.

В общем случае величина корреляционного радиуса r_{ii} для неоднородностей каждого параметра i может быть различна. Могут быть различными и величины радиусов кросскорреляций r_{ij} между неоднородностями различных параметров i и j . В дальнейшем ограничимся для простоты случаем, когда все корреляционные радиусы одинаковы. Такая ситуация может встречаться, например, в нанокристаллических сплавах, в которых вещество в объеме каждого зерна (кристаллита) однородно, но параметры каждого зерна отличаются друг от друга из-за слу-

чайных отклонений состава сплава в них от среднего. В этом случае все корреляционные радиусы примерно одинаковы: $r_{ii} \approx r_{ij} \approx r_c$ ($k_{ii} \approx k_{ij} \approx k_c$), где величина $2r_c$ соответствует среднему размеру зерна в нанокристаллическом сплаве. Обобщение полученных результатов на случай различных величин корреляционных радиусов не представляет принципиальных трудностей, но приводит к громоздким выражениям.

В соответствии с формулой (19) корреляционными функциям (23) соответствуют спектральные плотности вида

$$S_{ii}(k) = \frac{1}{\pi} \frac{k_c}{k_c^2 + k^2}, \quad S_{ij}(k) = \frac{\kappa_{ij}}{\pi} \frac{k_c}{k_c^2 + k^2}. \quad (24)$$

Вычисляя интегралы (22) методом теории вычетов с этими спектральными плотностями, получаем для интегралов, входящих в (20), следующие выражения:

$$\begin{aligned} L_{pp}^t &= A \left[a_- + v_t^2 k_c^2 + \frac{v_t k_c}{\omega} i(a_+ + v_t^2 k_c^2) \right], \\ L_{p\mu}^t &= kA (a_- - v_t^2 k_c^2 + 2v_t^2 i\omega k_c), \\ L_{\mu\mu}^t &= A \left\{ [k^2 a_- - k_c^2 (a_+ + v_t^2 (k^2 + k_c^2))] + \right. \\ &\quad \left. + (i\omega k_c / v_t)(a_+ + v_t^2 k_c^2) \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} a_{\pm} &= \omega^2 \pm v_t^2 k^2, \\ A &= \left\{ [(\omega - v_t k)^2 + v_t^2 k_c^2] [(\omega + v_t k)^2 + v_t^2 k_c^2] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для интегралов, входящих в выражения (21), получаем

$$\begin{aligned} L_{pp}^l &= B \left[b_- + v_l^2 k_c^2 + \frac{v_l k_c}{\omega} i(b_+ + v_l^2 k_c^2) \right], \\ L_{p\mu}^l &= L_{p\lambda}^l = kB (b_- - v_l^2 k_c^2 + 2v_l^2 i\omega k_c), \\ L_{\lambda\lambda}^l &= L_{\mu\mu}^l = L_{\lambda\mu}^l = B \left\{ [k^2 b_- - k_c^2 (b_+ + \right. \\ &\quad \left. + v_l^2 (k^2 + k_c^2))] + (i\omega k_c / v_l)(b_+ + v_l^2 k_c^2) \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} b_{\pm} &= \omega^2 \pm v_l^2 k^2, \\ B &= \left\{ [(\omega - v_l k)^2 + v_l^2 k_c^2] [(\omega + v_l k)^2 + v_l^2 k_c^2] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Представим уравнения (20) и (21) в форме

$$\omega - v_t k = \frac{R_t(\omega, k)}{\omega + v_t k}, \quad \omega - v_l k = \frac{R_l(\omega, k)}{\omega + v_l k}, \quad (29)$$

где R_t и R_l — правые части соответственно уравнений (20) и (21). Рассмотрим комплексный закон дисперсии в первом порядке теории возмущений, соответственно положив в правых частях выражений

(29) $\omega \approx v_t k$ и $\omega \approx v_l k$ и представив ω в левых частях этих выражений в виде $\omega = \omega' + i\omega''$. Вводя безразмерные величины $u = k/k_c$ и $\beta = v_t/v_l$, получаем окончательный вид законов дисперсии и затухания поперечных и продольных упругих волн с учетом взаимных корреляций между неоднородностями различных параметров в первом исчезающем приближении теории возмущений. Для поперечных волн эти законы имеют вид

$$\begin{aligned} \omega' &= v_t k \left\{ 1 + \frac{1}{2(1+4u^2)} \times \right. \\ &\quad \left. \times [(\gamma_p^2 + 2\kappa_{p\mu}\gamma_p\gamma_\mu)u^2 - \gamma_\mu^2(1+3u^2)] \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega''}{v_t k_c} &= \frac{u^2}{2(1+4u^2)} \times \\ &\quad \times [(1+2u^2)(\gamma_p^2 + \gamma_\mu^2) - 4\kappa_{p\mu}\gamma_p\gamma_\mu u^2]. \end{aligned} \quad (31)$$

Для продольных волн получаем более сложные выражения, так как в этом случае в них входят также отношения β скоростей поперечных и продольных волн:

$$\begin{aligned} \omega' &= v_l k \left\{ 1 + \frac{u^2}{2(1+4u^2)} \times \right. \\ &\quad \times [\gamma_p^2 + 2\kappa_{p\lambda}\gamma_p\gamma_\lambda(1-2\beta^2) + 4\kappa_{p\mu}\gamma_p\gamma_\mu\beta^2] - \\ &\quad - \frac{1+3u^2}{2(1+4u^2)} [\gamma_\lambda^2(1-2\beta^2)^2 + 4\kappa_{\lambda\mu}\gamma_\lambda\gamma_\mu\beta^2(1-2\beta^2) + \\ &\quad \left. + 4\gamma_\mu^2\beta^4] \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega''}{v_l k_c} &= \frac{u^2(1+2u^2)}{2(1+4u^2)} [\gamma_p^2 + \gamma_\lambda^2(1-2\beta^2)^2 + \\ &\quad + 4\kappa_{\lambda\mu}\gamma_\lambda\gamma_\mu\beta^2(1-2\beta^2) + 4\gamma_\mu^2\beta^4] - \\ &\quad - \frac{2u^4}{1+4u^2} [\kappa_{p\lambda}\gamma_p\gamma_\lambda(1-2\beta^2) + 2\kappa_{p\mu}\gamma_p\gamma_\mu\beta^2]. \end{aligned} \quad (33)$$

Знаменатель $1+4u^2$, который входит во все выражения (30)–(33), приводит к изгибу кривых $\omega'(k)$ и $\omega''(k)$ в окрестности $k = k_c/2$, так как эти кривые имеют разную асимптотику при $2u \ll 1$ и $2u \gg 1$. Это хорошо известный эффект, который был впервые установлен в работе [1] как для спиновых, так и для упругих волн. Рассмотрим закон дисперсии и затухание поперечных упругих волн. Выражение в фигурных скобках в законе дисперсии (30) представляет собой зависящий от k коэффициент, отличие которого от единицы характеризует изменение скорости волн, обусловленное неоднородностями. Видно,

что в отсутствие кросскорреляций неоднородности γ_p плотности среды приводят к росту этого коэффициента, а неоднородности γ_μ упругой константы — к его уменьшению. Однако величина γ_p^2 входит в выражение (30) с коэффициентом u^2 , а γ_μ^2 — с коэффициентом $1 + 3u^2$. Поэтому при одинаковых относительных флуктуациях γ_p и γ_μ кривая $\omega'(k)$ будет отклоняться от невозмущенного закона дисперсии в сторону меньших частот. Появление положительных кросскорреляций приводит к уменьшению этого отклонения, а отрицательных — к его увеличению. Затухание поперечных волн (31) пропорционально сумме $\gamma_p^2 + \gamma_\mu^2$ в отсутствие кросскорреляций. Появление положительных взаимных корреляций $\kappa_{p\lambda}$ приводит к уменьшению затухания волн, а отрицательных — к его увеличению. Этот эффект представляется наиболее интересным, так как из общих физических соображений можно ожидать, что между неоднородностями плотности и упругих констант возникают именно положительные кросскорреляции, которые приводят к уменьшению затухания волн.

Рассмотрим теперь выражения (32) и (33) для закона дисперсии и для затухания продольных волн. В этом случае коэффициент изменения скорости волн, стоящий в фигурных скобках в выражении (32), также состоит из разности двух членов: в положительную его часть входят флуктуации γ_p плотности, в отрицательную — флуктуации γ_λ и γ_μ упругих констант, а кросскорреляции $\kappa_{p\lambda}$, $\kappa_{p\mu}$ и $\kappa_{\lambda\mu}$ могут входить в ту или иную часть в зависимости от знаков этих корреляций. К увеличению затухания волн (33) приводят неоднородности всех упругих параметров, γ_p , γ_λ и γ_μ . Эффекты же, обусловленные кросскорреляциями, для продольных волн зависят от того, между неоднородностями каких параметров эти кросскорреляции появляются. Отличие от нуля компонент $\kappa_{p\lambda}$ или $\kappa_{p\mu}$ (или обеих этих компонент) приводит к уменьшению затухания при $\kappa_{p\lambda} > 0$ и $\kappa_{p\mu} > 0$ и к увеличению затухания при отрицательных кросскорреляциях. Однако отличие от нуля компоненты $\kappa_{\lambda\mu}$ (при $\kappa_{p\mu} = \kappa_{p\lambda} = 0$) кардинально меняет картину: теперь при положительных $\kappa_{\lambda\mu}$ происходит увеличение затухания, а при $\kappa_{\lambda\mu} < 0$ — его уменьшение.

3. ТРЕХМЕРНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ

В этом случае вектор смещения \mathbf{u} является функцией всех трех координат и времени. Принимая, что

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \sim \exp(-i\omega t)\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и проводя преобразование Фурье функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{u}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k}, \tag{34}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x},$$

получаем из уравнения (4) векторное уравнение для трансформанты Фурье функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - v_t^2 k^2)\mathbf{u}(\mathbf{k}) - (v_l^2 - v_t^2)\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k})) = & \\ = -\gamma_p \omega^2 \int \rho_p(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{u}(\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1 + & \\ + \gamma_\mu v_t^2 \int (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)\rho_\mu(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{u}(\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1 + & \\ + \gamma_\lambda (v_l^2 - 2v_t^2)\mathbf{k} \int \rho_\lambda(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_1)) d\mathbf{k}_1 + & \\ + \gamma_\mu v_t^2 \int \mathbf{k}_1 \rho_\mu(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_1)) d\mathbf{k}_1. & \end{aligned} \tag{35}$$

Методом, изложенным выше, легко показать, что в усредненном уравнении в правой части будут отсутствовать члены, пропорциональные первым степеням γ_i . Затем мы повышаем индексы при \mathbf{k} в уравнении (35) на единицу:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - v_t^2 k_1^2)\mathbf{u}(\mathbf{k}_1) - (v_l^2 - v_t^2)\mathbf{k}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_1)) = & \\ = -\gamma_p \omega^2 \int \rho_p(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{u}(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_2 + & \\ + \gamma_\mu v_t^2 \int (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)\rho_\mu(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{u}(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_2 + & \\ + \gamma_\lambda (v_l^2 - 2v_t^2)\mathbf{k}_1 \int \rho_\lambda(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_2)) d\mathbf{k}_2 + & \\ + \gamma_\mu v_t^2 \int \mathbf{k}_2 \rho_\mu(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_2)) d\mathbf{k}_2. & \end{aligned} \tag{36}$$

Согласно используемому методу, из этого уравнения должно быть выражено $\mathbf{u}(\mathbf{k}_1)$. Однако, в отличие от случая одномерных неоднородностей, мы не можем это сделать непосредственно. Поэтому прибегнем к следующему приему. Домножая уравнение (36) скалярно на \mathbf{k}_1 , получаем

$$\begin{aligned} (\omega^2 - v_t^2 k_1^2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_1)) = & \\ = -\gamma_p \omega^2 \int \rho_p(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_2)) d\mathbf{k}_2 + & \\ + \gamma_\lambda (v_l^2 - 2v_t^2)k_1^2 \int \rho_\lambda(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_2)) d\mathbf{k}_2 + & \\ + 2\gamma_\mu v_t^2 \int (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)\rho_\mu(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_2)) d\mathbf{k}_2. & \end{aligned} \tag{37}$$

Выразим из уравнения (37) скалярное произведение $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_1)$ и подставим его в левую часть уравнения (36). В результате уравнение (36) примет вид,

из которого функция $\mathbf{u}(\mathbf{k}_1)$ формально может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{k}_1) = & -\gamma_p \omega^2 \int \frac{\rho_p(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{u}(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} - \gamma_p \omega^2 (v_l^2 - v_t^2) \int \frac{\mathbf{k}_1 \rho_p(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_2)) d\mathbf{k}_2}{(\omega^2 - v_t^2 k_1^2)(\omega^2 - v_l^2 k_1^2)} + \\ & + \gamma_\lambda (v_l^2 - 2v_t^2) \int \frac{\mathbf{k}_1 \rho_\lambda(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_2)) d\mathbf{k}_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} + \gamma_\mu v_t^2 \int \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_\lambda(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{u}(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} + \\ & + \gamma_\lambda (v_l^2 - 2v_t^2) (v_l^2 - v_t^2) \times \\ & \times \int \frac{k_1^2 \mathbf{k}_1 \rho_\lambda(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_2)) d\mathbf{k}_2}{(\omega^2 - v_t^2 k_1^2)(\omega^2 - v_l^2 k_1^2)} + \gamma_\mu v_t^2 \int \frac{\mathbf{k}_2 \rho_\lambda(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_2)) d\mathbf{k}_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} + \\ & + 2\gamma_\mu v_t^2 (v_l^2 - v_t^2) \int \frac{\mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \rho_\lambda(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}_2)) d\mathbf{k}_2}{(\omega^2 - v_t^2 k_1^2)(\omega^2 - v_l^2 k_1^2)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Подставим это выражение в правую часть уравнения (35) и усредним полученное уравнение по случайным реализациям случайных функций $\rho_p(\mathbf{k})$, $\rho_\mu(\mathbf{k})$ и $\rho_\lambda(\mathbf{k})$. Ввиду сложности общих выражений, продемонстрируем дальнейшие выкладки сначала для простейшей ситуации, когда неоднородна только плотность вещества, а обе силовые константы однородны ($\gamma_p \neq 0$, $\gamma_\mu = \gamma_\lambda = 0$). В этом случае усредненное векторное уравнение эквивалентно следующей системе уравнений для усредненных поперечных $\langle u_t(\mathbf{k}) \rangle$ и продольных $\langle u_l(\mathbf{k}) \rangle$ волн:

$$\begin{aligned} \{(\omega^2 - v_t^2 k^2) \delta_{sf} - (v_l^2 - v_t^2) k_s k_f\} \langle u_f(\mathbf{k}) \rangle = & \gamma_p^2 \omega^4 \delta_{sf} \iint \frac{\langle \rho_p(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \rho_p(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) u_f(\mathbf{k}_2) \rangle d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2} + \\ & + \gamma_p^2 \omega^4 (v_l^2 - v_t^2) \iint \frac{k_{1s} k_{1f} \langle \rho_p(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \rho_p(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) u_f(\mathbf{k}_2) \rangle d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(\omega^2 - v_t^2 k_1^2)(\omega^2 - v_l^2 k_1^2)}, \end{aligned} \quad (39)$$

где индексы «s» и «f» пробегают значения t и l ; δ_{sf} — символ Кронекера.

Средние от произведения трех случайных функций в правой части уравнения расщепляем согласно приближенному выражению (16). Компоненты матрицы спектральной функции $S_{ij}(\mathbf{k})$ и корреляционной матрицы $K_{ij}(\mathbf{r})$ соответственно определяются трехмерными аналогами выражений (17) и (18), а связь между ними — трехмерными аналогами преобразований Фурье (19).

После приближенного расщепления корреляций, аналогичного (16), и интегрирования по \mathbf{k}_2 получаем систему линейных однородных уравнений для $\langle u_t(\mathbf{k}) \rangle$ и $\langle u_l(\mathbf{k}) \rangle$, определитель которой имеет вид

$$\begin{aligned} P_{sf}(\omega, \mathbf{k}) = & (\omega^2 - v_t^2 k^2 - \gamma_p^2 \omega^4 L_{tpp}) \delta_{sf} - \\ & - (v_l^2 - v_t^2) k_s k_f - \gamma_p^2 \omega^4 (v_l^2 - v_t^2) L_{ltpps f}, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} L_{tpp} = & \int \frac{S_{pp}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\omega^2 - v_t^2 k_1^2}, \\ L_{ltpps f} = & \int \frac{k_{1s} k_{1f} S_{pp}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{(\omega^2 - v_t^2 k_1^2)(\omega^2 - v_l^2 k_1^2)}. \end{aligned} \quad (41)$$

В системе координат, ось z которой совпадает с направлением вектора \mathbf{k} , в отсутствие неоднородностей ($\gamma_p = 0$) тензор P_{sf} диагонален и уравнение $P_{sf}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ приводит к независимым законам дисперсии для поперечных и продольных волн.

Предполагаем, что спад корреляций характеризуется экспоненциальными изотропными корреляционными функциями как для автокорреляционных функций всех неоднородных параметров, так и для кросс-корреляций между неоднородностями этих параметров:

$$K_{ii}(r) = \exp(-k_c r), \quad K_{ij}(r) = \kappa_{ij} \exp(-k_c r), \quad (42)$$

где $r = |\mathbf{r}|$, а также соответствующими компонентами матрицы спектральной плотности вида

$$\begin{aligned} S_{ii}(\mathbf{k}) = & \frac{1}{\pi^2} \frac{k_c}{(k_c^2 + k^2)^2}, \\ S_{ij}(\mathbf{k}) = & \frac{\kappa_{ij}}{\pi^2} \frac{k_c}{(k_c^2 + k^2)^2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляем выражение для $S_{pp}(k)$ в интегралы (41) и переходим в этих интегралах в сферическую систему координат. После замены $x = \cos \theta$ и интегрирования по азимутальному углу φ получаем

$$\begin{aligned}
 L_{tpp} &= \frac{2}{\pi k_c^2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{u_1^2 du dx}{(u_\omega^2 - v_t^2 u_1^2)(1 + u^2 + u_1^2 - 2uu_1x)^2}, \\
 L_{ltppxx} &= L_{ltppy} = \frac{1}{\pi k_c^2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{u_1^4(1-x^2) du dx}{(u_\omega^2 - v_t^2 u_1^2)(u_\omega^2 - v_t^2 u_1^2)(1 + u^2 + u_1^2 - 2uu_1x)^2}, \\
 L_{ltppzz} &= \frac{2}{\pi k_c^2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{u_1^4 x^2 du dx}{(u_\omega^2 - v_t^2 u_1^2)(u_\omega^2 - v_t^2 u_1^2)(1 + u^2 + u_1^2 - 2uu_1x)^2}, \\
 L_{ltppxy} &= L_{ltppyx} = L_{ltppxz} = L_{ltppzx} = L_{ltppyz} = L_{ltppzy} = 0,
 \end{aligned} \tag{44}$$

где введены безразмерные величины $u = k/k_c$, $u_1 = k_1/k_c$, $u_\omega = \omega/k_c$.

Из выражений (44) следует, что тензор $P_{sk}(\omega, k)$ остается диагональным и при $\gamma_p \neq 0$. Таким образом, из равенства нулю определителя (40) следуют независимые уравнения для комплексных законов дисперсии поперечных и продольных волн:

$$\omega^2 - v_t^2 k^2 = \gamma_p^2 \omega^4 [L_{tpp}^t + (v_l^2 - v_t^2)L_{ltpp}^t], \tag{45}$$

$$\omega^2 - v_l^2 k^2 = \gamma_p^2 \omega^4 [L_{tpp}^l + (v_l^2 - v_t^2)L_{ltpp}^l], \tag{46}$$

где $L_{tpp}^t = L_{tpp}^l = L_{tpp}$, $L_{ltpp}^t = L_{ltppxx} = L_{ltppy}$, $L_{ltpp}^l = L_{ltppzz}$.

Как и для случая одномерных неоднородностей, уравнения (45) и (46) представлялись в форме (29) и в правых частях этих уравнений соответственно приближенно полагалось $\omega \approx v_t k$ и $\omega \approx v_l k$. В интегралах (44) мы изменили пределы интегрирования, воспользовавшись соотношением $\int_0^\infty \int_{-1}^1 \rightarrow \int_{-\infty}^\infty \int_0^1$, справедливым для этих подынтегральных функций. Интегралы по u_1 вычислялись методом теории вычетов, затем интегрирование по x проводилось точно с помощью таблиц интегралов [17]. В результате были получены громоздкие выражения, которые несколько упрощаются в первом порядке теории возмущений для поперечных ($u_\omega \approx v_t u$) и для продольных ($u_\omega \approx v_l u$) волн. Для демонстрации приведем одно из них:

$$\begin{aligned}
 L_{ltpp}^t &= \frac{1}{4v_t^2(v_l^2 - v_t^2)u^5 k_c^2} \left\{ (1 + 2u^2) \times \right. \\
 &\times \arctg \frac{u}{1 + 2u^2} - (1 + q_+) \arctg \frac{u(1 + q_-)}{1 + q_+} + \\
 &+ 2q_- \arctg u + \frac{i}{2} \left[4(1 - \beta)u^2 - (1 + 2u^2) \times \right. \\
 &\left. \left. \times \ln(1 + 4u^2) + (1 + q_+) \ln \frac{1 + p_+}{1 + p_-} \right] \right\}, \tag{47}
 \end{aligned}$$

где $q_\pm = (1 \pm \beta^2)u^2$, $p_\pm = (1 \pm \beta)^2 u^2$, $\beta = v_t/v_l$. Видно, что в трехмерном случае законы дисперсии и затухания

содержат помимо рациональных функций от u также и трансцендентные функции от рациональных функций этого аргумента.

Представляя ω в виде $\omega = \omega' + i\omega''$, получим законы дисперсии и затухания для поперечных упругих волн при неоднородности плотности вещества в виде

$$\begin{aligned}
 \omega' &= v_t k \times \\
 &\times \{1 + \gamma_p^2 v_t^2 u^2 [(L_{tpp}^t)' + (v_l^2 - v_t^2)(L_{ltpp}^t)']\}, \tag{48}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\omega''}{v_t k_c} = \gamma_p^2 v_t^2 u^2 [(L_{tpp}^t)'' + (v_l^2 - v_t^2)(L_{ltpp}^t)''], \tag{49}$$

а для продольных волн в виде

$$\begin{aligned}
 \omega' &= v_l k \times \\
 &\times \{1 + \gamma_p^2 v_l^2 u^2 [(L_{tpp}^l)' + (v_l^2 - v_t^2)(L_{ltpp}^l)']\}, \tag{50}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\omega''}{v_l k_c} = \gamma_p^2 v_l^2 u^2 [(L_{tpp}^l)'' + (v_l^2 - v_t^2)(L_{ltpp}^l)''], \tag{51}$$

где L' и L'' — соответственно действительные и мнимые части выражений (44). Из этих выражений видно, что неоднородности плотности вещества приводят к тому, что законы дисперсии и затухания как продольных, так и поперечных волн зависят не только от собственных скоростей, но и от отношения β скоростей поперечных и продольных волн. Это отношение входит в выражения (48)–(51) как непосредственно, так и через параметры p_\pm и q_\pm .

Вернемся теперь к полному выражению (38) для $u(\mathbf{k}_1)$, содержащему неоднородности как плотности вещества, так и силовых констант. После подстановки его в правую часть уравнения (35) получаем громоздкое выражение, в котором расщепление корреляций проводим методом, продемонстрированным выше для случая неоднородностей плотности. Как и для последнего случая, получаем независимые уравнения для комплексных законов дисперсии поперечных и продольных волн. Эти уравнения учитывают неоднородности всех параметров вещества и кросскорреляции между этими неоднородностями.

Из этих уравнений получаем комплексные дисперсионные соотношения $\omega(k)$ для поперечных волн в виде

$$\begin{aligned} \omega &= v_t k \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{v_t^2}{2} [\gamma_p^2 u^2 (2L_{tpp}^{t20} - (v_l^2 - v_t^2)(L_{tpp}^{t40} - L_{tpp}^{t42})) - \right. \\ &\quad \left. - 4\gamma_p \gamma_\mu u (L_{t\mu\mu}^{t31} - (v_l^2 - v_t^2)(L_{t\mu\mu}^{t51} - L_{t\mu\mu}^{t53})) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\mu^2 (L_{t\mu\mu}^{t40} + L_{t\mu\mu}^{t42} - 4(v_l^2 - v_t^2)(L_{t\mu\mu}^{t62} - L_{t\mu\mu}^{t64})) \right\}, \end{aligned} \quad (52)$$

а для продольных волн в виде

$$\begin{aligned} \omega &= v_l k \{ 1 - v_l^2 [\gamma_p^2 u^2 (L_{tpp}^{t20} - (v_l^2 - v_t^2)L_{tpp}^{t42}) - \\ &\quad - 2\gamma_p \gamma_\lambda u (1 - 2\beta^2) (L_{tpp}^{t31} - (v_l^2 - v_t^2)L_{tpp}^{t51}) - \\ &\quad - 4\gamma_p \gamma_\mu \beta^2 (L_{t\mu\mu}^{t31} - (v_l^2 - v_t^2)L_{t\mu\mu}^{t53}) + \\ &\quad + \gamma_\lambda^2 (1 - 2\beta^2)^2 (L_{t\lambda\lambda}^{t40} - (v_l^2 - v_t^2)L_{t\lambda\lambda}^{t60}) + \\ &\quad + 4\gamma_\lambda \gamma_\mu \beta^2 (1 - 2\beta^2) (L_{t\lambda\mu}^{t42} - (v_l^2 - v_t^2)L_{t\lambda\mu}^{t62}) + \\ &\quad + 4\gamma_\mu^2 \beta^4 (L_{t\mu\mu}^{t42} - (v_l^2 - v_t^2)L_{t\mu\mu}^{t64}) \}. \end{aligned} \quad (53)$$

В эти соотношения входят 22 комплексные интегральные выражения, которые можно обобщенно записать в виде

$$\begin{aligned} L_{tij}^{lmn} &= \frac{1}{v_t^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{u_1^m x^n S_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)}{Z_1} du_1 dx, \\ L_{ltij}^{lmn} &= \frac{1}{v_l^2 v_t^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{u_1^m x^n S_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)}{Z_2} du_1 dx, \\ L_{tpp}^{lmn} &= \frac{1}{v_l^2 v_t^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{u_1^m x^n S_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)}{Z_4} du_1 dx, \\ L_{tij}^{tmn} &= \frac{1}{v_t^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{u_1^m x^n S_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)}{Z_3} du_1 dx, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$Z_1 = u_1^2 - \frac{u^2}{\beta^2},$$

$$Z_2 = \left(u_1^2 - \frac{u^2}{\beta^2} \right) (u_1^2 - u^2),$$

$$Z_3 = u_1^2 - u^2,$$

$$Z_4 = (u_1^2 - \beta^2 u^2)(u_1^2 - u^2).$$

В выражениях (54) можно выделить две группы интегралов, описывающих процессы различной физической природы: интегралы L_{tij}^{tmn} , не содержащие β , определяют вклад в модификацию дисперсионного закона процессов рассеяния для волн одного и того же типа, а все остальные интегралы, содержащие β , — с изменением типа волн. Интегралы (54) вычислялись по u_1 методом теории вычетов, затем интегрирование по x могло быть выполнено точно с помощью таблиц интегралов [17].

Представляя ω в виде $\omega = \omega' + i\omega''$ и все выражения для L в виде $L' + iL''$, легко выделить из соотношений (52) и (53) законы дисперсии и затухание поперечных и продольных волн. Полученные громоздкие выражения анализировались графически. Были также исследованы аналитически их предельные выражения, соответствующие малым и большим значениям волновых чисел. Как и для одномерных неоднородностей, основные изменения обеих кривых, $\omega'(k)$ и $\omega''(k)$, происходят в окрестности величины $k = k_c/2$, разделяющей области волн, рассеивающихся на некоррелированных ($k < k_c/2$) и коррелированных ($k > k_c/2$) участках флуктуаций. Для поперечных волн закон дисперсии в предельных случаях имеет вид

$$\frac{\omega'}{v_t k_c} \approx \begin{cases} \left(1 - \frac{\gamma_\mu^2}{3} \right) u - \left(\gamma_p^2 - \frac{2}{3} \kappa_{p\mu} \gamma_p \gamma_\mu + \frac{11\gamma_\mu^2}{15} \right) \frac{u^3}{2}, & 2u \ll 1, \\ \left(1 - \frac{1}{8} (\gamma_p^2 - 6\kappa_{p\mu} \gamma_p \gamma_\mu + 5\gamma_\mu^2) \right) u + A, & 2u \gg 1, \end{cases} \quad (55)$$

а затухание описывается выражениями

$$\frac{\omega''}{v_t k_c} \approx \begin{cases} [\gamma_p^2 (2 + \beta^3) + 2\gamma_\mu^2] \frac{u^4}{3}, & 2u \ll 1, \\ (\gamma_p^2 - 2\kappa_{p\mu} \gamma_p \gamma_\mu + \gamma_\mu^2) \frac{u^2}{4} + B, & 2u \gg 1, \end{cases} \quad (56)$$

где A и B — некоторые константы, зависящие от параметров γ_i и κ_{ij} . Предельные выражения для продольных волн громоздки из-за сложных зависимостей их коэффициентов от параметров, поэтому здесь мы их не приводим. Затухание как продольных, так и поперечных волн подчиняется универсальным зависимостям, различным для рассеивания на некоррелированных и коррелированных участках флуктуаций:

$$\omega'' \propto \begin{cases} k^4, & k \ll k_c/2, \\ k^2, & k \gg k_c/2. \end{cases} \quad (57)$$

Переход от закона Рэлея $\omega'' \propto k^4$ к закону $\omega'' \propto k^2$ в окрестности точки кроссовера $k_c/2$ исследовался ранее [1, 7].

Вид зависимостей $\omega'(k)$ и $\omega''(k^2)$ показан на рис. 1 и 2 при различных значениях коэффициентов кросскорреляций κ_{ij} между неоднородностями. Величины среднеквадратичных флуктуаций γ_i при расчете этих графиков были взяты одинаковыми: $\gamma_p^2 = \gamma_\mu^2 = \gamma_\lambda^2 = 0.8$. Из рис. 1а видно, что в отсутствие кросскорреляций (сплошная кривая) происходит как отклонение дисперсионной кривой поперечных волн от невозмущенного закона дисперсии (пунктирная кривая) в сторону малых частот, так и дальнейший изгиб этой кривой в том же направлении в окрестности точки $k/k_c = 0.5$. Появление положительных кросскорреляций между неоднородностями p и μ приводит к приближению дисперсионной кривой (штриховая кривая) к невозмущенному закону дисперсии и к уменьшению ее изгиба. Отрицательные кросскорреляции усиливают модификацию закона дисперсии (штрихпунктирная кривая). Затухание ω'' поперечных волн как функция k^2 показано на рис. 1б. В этих координатах левее точки кроссовера $(k/k_c)^2 = 0.25$ в соответствии с предельными выражениями (56) функция $\omega''(k^2)$ имеет вид параболы, а правее — прямой линии. Появление положительных кросскорреляций между неоднородностями p и μ приводит к уменьшению (штриховая кривая), а отрицательных кросскорреляций — к увеличению (штрихпунктирная кривая) затухания. На рис. 2 приведены зависимости $\omega'(k)$ и $\omega''(k^2)$ для продольных волн при учете кросскорреляций между неоднородностями различных параметров вещества. В этом случае в отсутствие кросскорреляций закон дисперсии $\omega'(k)$ имеет в окрестности точки $k/k_c = 0.5$ не изгиб, а перегиб (сплошные кривые на рис. 2а,б). Это обусловлено появлением на зависимости $\omega'(k)$ для продольных волн еще одной точки кроссовера при $k/k_c \approx \beta$. Чтобы отделить этот крос-

совер от кроссовера при $k/k_c = 0.5$, при построении графиков было выбрано $\beta = 0.2$ (обычно значение β колеблется в пределах $0.2 \leq \beta \leq 0.5$). Впервые существование этого второго кроссовера было установлено в работе [7]. Положительные кросскорреляции между неоднородностями плотности и упругих констант ($\kappa_{p\mu}$ и $\kappa_{p\lambda}$) приближают кривую $\omega'(k)$ к невозмущенному закону (штриховая кривая на рис. 2а), а отрицательные $\kappa_{p\mu}$ и $\kappa_{p\lambda}$ усиливают модификацию закона дисперсии в области $k/k_c > 0.5$ (штрихпунктирная кривая на рис. 2а). Кросскорреляции между упругими константами μ и λ приводят к прямо противоположным эффектам: при положительном значении $\kappa_{\lambda\mu}$ происходит усиление модификации закона дисперсии, при отрицательном $\kappa_{\lambda\mu}$ — уменьшение (рис. 2б).

Обе точки кроссовера проявляются и на зависимости затухания $\omega''(k^2)$ (рис. 2в,г). Дополнительно кроссоверу в этих координатах соответствует точке $(k/k_c)^2 \approx \beta^2 = 0.04$. Поэтому закон Рэлея $\omega'' \propto k^4$ проявляется только в узкой области левее этой точки. Закон затухания $\omega'' \propto k^2$ проявляется, как и для поперечных волн, правее точки основного кроссовера $(k/k_c)^2 = 0.25$. Появление положительных кросскорреляций между неоднородностями плотности и упругих констант, как и для случая одномерных неоднородностей, приводит к уменьшению (пунктирная кривая на рис. 2в), а отрицательных (штрихпунктирная кривая) — к увеличению затухания. Кросскорреляции между неоднородностями упругих констант приводят к обратным эффектам (рис. 2г): положительные корреляции увеличивают затухание, отрицательные — уменьшают.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получен парадоксальный, на первый взгляд, результат, что положительные кросскорреляции ($\kappa_{ij} > 0$) между неоднородностями некоторых параметров вещества приводит к усилению модификации закона дисперсии и росту затухания упругих волн, тогда как такие же по знаку кросскорреляции между неоднородностями других параметров вещества вызывают ослабление этой модификации и уменьшение затухания волн. Так как отрицательные кросскорреляции ($\kappa_{ij} < 0$) всегда приводят к эффектам, противоположным тем, к которым приводят положительные кросскорреляции, их действие обладает подобной же двужначностью.

Эта двужначность снимается, если обратить вни-

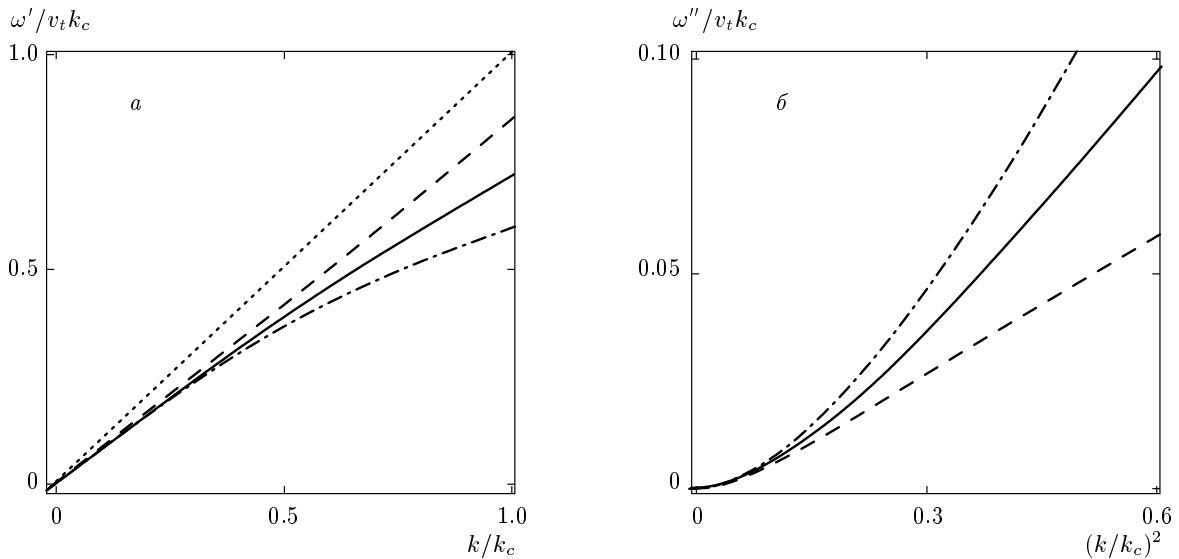


Рис. 1. Законы дисперсии (а) и затухания (б) поперечных упругих волн в среде при различных значениях коэффициентов кросскорреляций $\kappa_{p\mu}$ между трехмерными неоднородностями соответствующих параметров вещества: $\kappa_{p\mu} = 0$ (сплошные кривые); $\kappa_{p\mu} = 0.9$ (штриховые кривые); $\kappa_{p\mu} = -0.9$ (штрихпунктирные кривые). Пунктирной прямой показан закон дисперсии в однородной среде

мание на то, что параметр p относится к кинетической части гамильтониана, а параметры μ и λ — к потенциальной части. Это позволяет предположить, что характер действия кросскорреляций между параметрами меняется в зависимости от того, относятся ли оба параметра к одной и той же части гамильтониана (оба к потенциальной или оба к кинетической) или же эти параметры принадлежат к различным частям гамильтониана. Действительно, параметры μ и λ относятся к потенциальной части гамильтониана, и положительные кросскорреляции между их неоднородностями приводят к усилению модификации закона дисперсии и увеличению затухания упругих волн. Параметр p характеризует инерционность упругой системы и относится к кинетической части гамильтониана, и положительные кросскорреляции между неоднородностями p и μ или p и λ приводят к ослаблению модификации закона дисперсии и уменьшению затухания упругих волн. Проанализируем с этой точки зрения результаты работы [15]. Оба рассмотренных в этой работе неоднородных параметра (параметр обмена α и величина магнитной анизотропии β) относятся к потенциальной части спинового гамильтониана. Соответственно, положительные кросскорреляции между ними, согласно высказанному выше предположению, должны приводить к усилению модификации закона дисперсии и увеличению затухания спиновых

волн. Это и было получено в результате расчета, проведенного в работе [15].

Физический механизм таких различий в характере действия кросскорреляций можно понять на следующей упрощенной модели неоднородной среды. Закон дисперсии поперечных упругих волн в однородной изотропной среде определяется выражением

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{p}} k. \tag{58}$$

В случае очень плавных неоднородностей с характерным размером $2r_c$, много большим длины волны ($k_c \ll k$), среду можно приближенно представить состоящей из множества однородных областей размера $2r_c$, внутри которых параметры среды p и μ постоянны, но различны в разных областях (модель независимых зерен — кристаллитов). Если флуктуации величин p и μ некоррелированы между собой, то частота при данном k может существенно различаться в разных областях, так как будут существовать области, в которых произошло одновременно увеличение μ и уменьшение p (или наоборот) относительно средних значений этих величин, а частота волны определяется отношением μ и p . Положительные кросскорреляции приводят к пространственной синхронизации флуктуаций двух случайных функций без изменения величин среднеквадратичных отклоне-

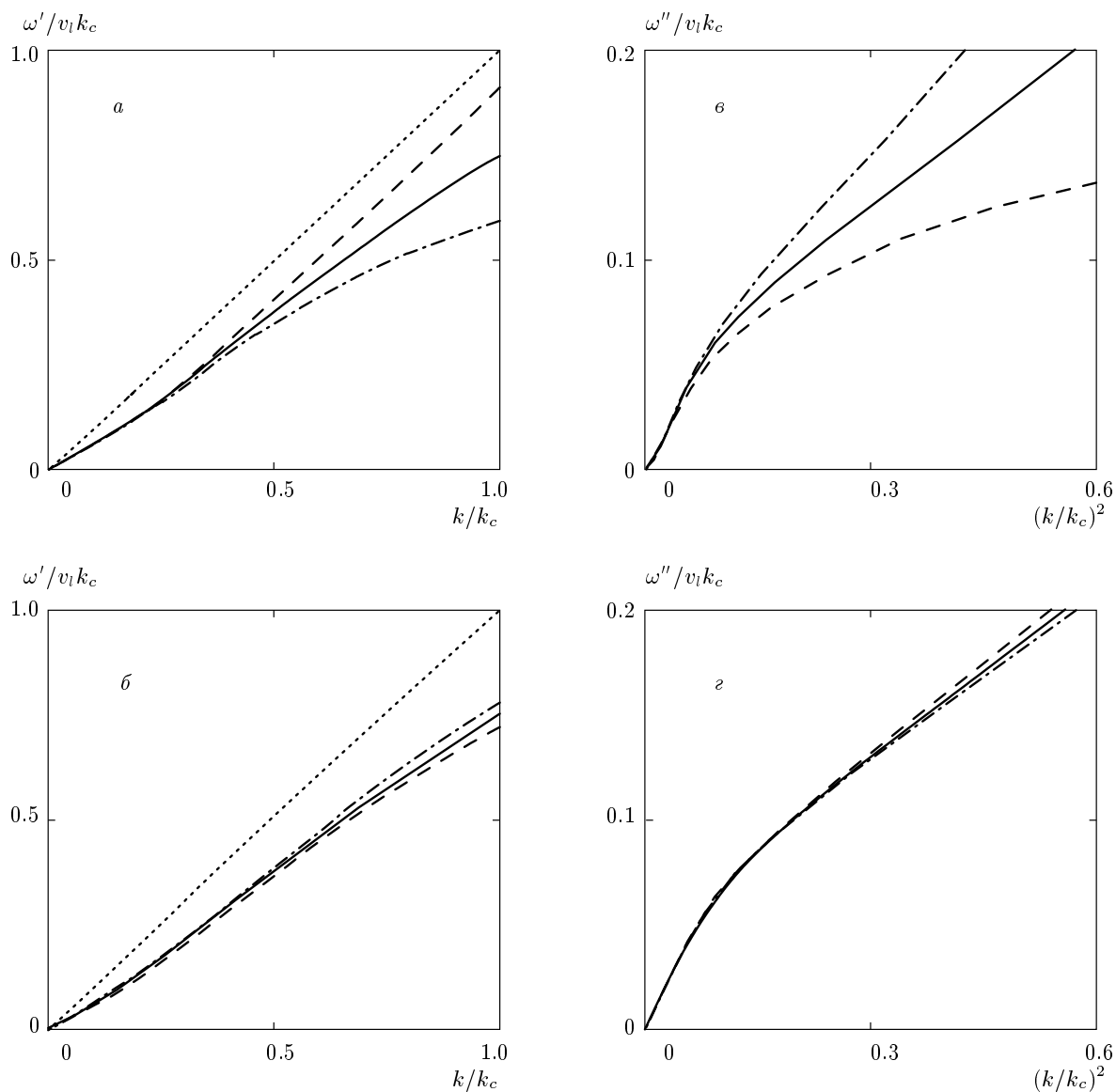


Рис. 2. Законы дисперсии (*а, б*) и затухания (*в, г*) продольных упругих волн в среде при различных значениях коэффициентов кросскорреляций κ_{ij} между трехмерными неоднородностями различных параметров вещества. Сплошные кривые — $\kappa_{ij} = 0$ (*а-г*), штриховые — $\kappa_{p\lambda} = \kappa_{p\mu} = 0.9, \kappa_{\lambda\mu} = 0$ (*а, в*), $\kappa_{p\lambda} = \kappa_{p\mu} = 0, \kappa_{\lambda\mu} = 0.9$ (*б, г*), штрихпунктирные — $\kappa_{p\lambda} = \kappa_{p\mu} = -0.9, \kappa_{\lambda\mu} = 0$ (*а, в*), $\kappa_{p\lambda} = \kappa_{p\mu} = 0, \kappa_{\lambda\mu} = -0.9$ (*б, г*). Пунктирными прямыми показан закон дисперсии в однородной среде

нений каждой из функций. Поэтому теперь в каждой из наших областей отклонению (любого знака) величины μ от ее среднего значения соответствует отклонение того же знака величины p от своего среднего. В результате случайный разброс частот волн в различных областях вещества уменьшается. Можно представить себе даже гипотетическую предельную ситуацию, когда частота упругих волн будет во всем пространстве практически одинакова, несмотря на сильные отклонения как μ , так и p в различных

областях пространства. Отрицательные кросскорреляции приводят к пространственной синхронизации отклонений величин μ и p с противоположными знаками и, соответственно, к еще большему разбросу частот волн в различных областях, чем для случая $\kappa_{p\mu} = 0$.

Аналогичные рассуждения для кросскорреляций между p и μ или p и λ можно провести и для продольных волн, закон дисперсии которых определяется выражением

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{p}} k. \quad (59)$$

Однако на этом примере можно также качественно рассмотреть влияние кросскорреляций между λ и μ . В отсутствие этих кросскорреляций наряду со случаями одновременного увеличения или уменьшения λ и μ имеются случаи, когда при увеличении (уменьшении) λ , происходит уменьшение (увеличение) μ . Включение положительных кросскорреляций исключает последние случаи: теперь λ и μ увеличиваются или уменьшаются синхронно, что усиливает разброс значений ω в различных областях вещества.

Такое же качественное рассмотрение влияния кросскорреляций между различными параметрами гамильтониана может быть проведено на упрощенной модели неоднородной среды для случая спиновых волн. Следует только при этом иметь в виду, что роль инерционного параметра, стоящего в кинетической части гамильтониана, играет не гиромагнитное отношение g , а обратная ему величина — магнито-механический параметр $p_m = g^{-1}$; именно этот параметр стоит в уравнении Ландау–Лифшица перед кинетическим членом $\partial \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) / \partial t$. При этом выражение для частоты спиновых волн принимает вид

$$\omega = \frac{(\alpha k^2 + \beta)M + H}{p_m}, \quad (60)$$

где M — намагниченность, H — магнитное поле. В этом выражении, как и в выражениях (58) и (59), частота определяется отношением параметров потенциальной части гамильтониана к параметрам его кинетической части, и все рассуждения, проведенные выше для упругих волн, могут быть повторены для спиновых волн. Так, положительные кросскорреляции между неоднородностями обмена α и анизотропии β будут приводить к росту затухания, а такие же корреляции между α и p_m или β и p_m — к уменьшению затухания.

Анализ результатов, полученных в этой работе и ранее [15], а также проведенное выше качественное рассмотрение на модели независимых зерен, позволяет сформулировать общую закономерность действия кросскорреляций, не зависящую от физической природы волн: характер действия кросскорреляций между неоднородностями любых двух параметров вещества на волновой спектр определяется тем, принадлежат ли оба параметра, связанные кросскорреляциями, к той же самой части гамильтониана (т. е. оба относятся к кинетической или оба — к потенциальной части) или они принадлежат к раз-

ным частям гамильтониана. В первом случае положительные кросскорреляции приводят к усилению модификации закона дисперсии и росту затухания волн, во втором случае — к уменьшению этих характеристик. Соответственно, отрицательные кросскорреляции в каждом из этих случаев приводят к обратным эффектам.

Полученные закономерности могут быть полезны при разработке технологии получения аморфных и нанокристаллических сплавов с целью создания условий, способствующих возникновению полезных кросскорреляций (уменьшающих затухания волн) и ограничению проявления вредных кросскорреляций, увеличивающих затухание. Экспериментальное наблюдение полученных в работе конкретных эффектов, обусловленных кросскорреляциями, возможно в ситуациях, при которых можно ожидать значительных изменений коэффициентов кросскорреляций κ_{ij} , например, для серий образцов сплавов или твердых растворов с различным соотношением между компонентами, при переходе аморфного вещества в нанокристаллическое состояние в процессе отжига и т. д. Выделение эффектов, обусловленных кросскорреляциями, при обработке подобных экспериментов усложняется тем, что одновременно с изменением коэффициентов кросскорреляций может происходить и изменение среднеквадратичных флуктуаций параметров среды. Однако, как видно из формул (30)–(33), (55), (56) и из рис. 1, 2, существуют ситуации, при которых эффекты, обусловленные среднеквадратичными флуктуациями, и эффекты, вызванные кросскорреляциями, по-разному влияют на формы кривых $\omega'(k)$ и $\omega''(k)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта № 3818.2008.3 Президента РФ в рамках Программы поддержки ведущих научных школ, гранта Программы № 27.1 Президиума РАН и Государственного контракта № 02.740.11.0220 по Федеральной целевой программе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Игнатченко, Р. С. Исхаков, ЖЭТФ **72**, 1005 (1977).
2. В. А. Игнатченко, Р. С. Исхаков, ЖЭТФ **74**, 1386 (1978).
3. В. А. Игнатченко, Р. С. Исхаков, ЖЭТФ **75**, 1438 (1978).
4. М. В. Медведев, ФТТ **22**, 1944 (1980).

5. М. В. Медведев, М. В. Садовский, ФТТ **23**, 1943 (1981).
6. K. Handrich and R. Ötting, Phys. Stat. Sol. (b) **216**, 1073 (1999).
7. В. А. Игнатченко, Л. И. Дейч, ФТТ **27**, 1883 (1985).
8. K. Handrich and R. Ötting, Phys. Stat. Sol. (b) **255**, 289 (2001).
9. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, ч. I, *Случайные процессы*, Наука, Москва (1976).
10. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику*, ч. II, *Случайные поля*, Наука, Москва (1978).
11. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности*, ч. 2, Наука, Москва (1967).
12. Д. М. Займан, *Модели беспорядка*, Мир, Москва (1982).
13. М. А. Кривоглаз, в сб. *Вопросы физики металловедения*, вып. 13, Изд-во АН УССР, Киев (1961), с. 17.
14. В. А. Игнатченко, Р. С. Исаков, в сб. *Магнитные свойства кристаллических и аморфных сред*, Наука, Новосибирск (1989), с. 128.
15. В. А. Игнатченко, Д. С. Полухин, ФТТ **51**, 892 (2009).
16. R. C. Bouret, Nuovo Cim. **26**, 1 (1962).
17. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).