

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ЕМКОСТИ СЕЛЕНИДА МЫШЬЯКА ФРАКТАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

В. К. Балханов, Ю. Б. Башкуев*

*Отдел физических проблем Бурятского научного центра Сибирского отделения Российской академии наук
670047, Улан-Удэ, Россия*

Поступила в редакцию 5 марта 2009 г.,
после переработки 1 октября 2009 г.

Немногим более 40 лет назад были измерены [1] температурные зависимости сопротивления R и емкости C на переменном токе для селенида мышьяка. Из результатов этих измерений следуют частотные характеристики: $R \propto \omega^{-0.80 \pm 0.01}$ и $\Delta C \propto \omega^{-0.120 \pm 0.006}$ (ω — круговая частота, ΔC отсчитывается от не зависящего от температуры значения C_0). Согласно методам фрактальной геометрии, $R \propto \omega^{1-3/h}$ и $\Delta C \propto \omega^{-2+3/h}$, где h — размерность блуждания электрического тока в селениде мышьяка. Из сравнения экспериментальных и теоретических результатов следует, что размерность блуждания, вычисленная по частотной характеристике сопротивления, равна $h_R = 1.67 \pm 0.02$, а по частотной характеристике емкости — $h_C = 1.60 \pm 0.08$. В пределах ошибок измерения оба значения, h_R и h_C , согласуются друг с другом. Фрактальная размерность распределения проводящих участков $D = 1/h = 0.6$. Поскольку $D < 1$, проводящие участки пространственно разделены и образуют канторовское множество.

Более 40 лет назад были измерены температурные зависимости электропроводности и емкости стеклообразного селенида мышьяка (As_2Se_3) на низкочастотном переменном токе [1]. На рис. 1а воспроизведен результат измерений электропроводности σ , мы добавили четыре вертикальные линии, по которым определялись частотные характеристики электропроводности при фиксированной температуре. Для дальнейшего изложения нам удобно использовать сопротивление $R = 1/\sigma$. На рис. 1б каждой вертикальной линии соответствуют четыре штриховые линии, сплошная линия — линейная аппроксимация с угловым коэффициентом, равным -0.8 . Примерно одинаковый наклон всех четырех штриховых линий означает, что угловой коэффициент не зависит от температуры. Смещением координат все четыре штриховые линии на рис. 1б располагались последовательно в ряд. Результат показан штриховой линией на рис. 1в, там же сплошная линия — линейная аппроксимация. Последний рисунок собственно и позволяет, с ошибкой чуть больше 1%, установить следующую степенную частотную характеристику сопротивления:

$$R \propto \omega^{-0.80 \pm 0.01}, \quad (1)$$

где ω — круговая частота. Результат (1) в работе [1] был интерпретирован известной моделью прыжкового механизма протекания электрического тока в неоднородных по электрическим свойствам материалах [2–4].

На рис. 2а воспроизведен результат измерений емкости [1], где добавлены четыре вертикальные линии при тех же температурах, что и на рис. 1а. Хотя в работе [1] и не было этого отмечено, но из рис. 2а следует степенная частотная характеристика величины ΔC :

$$\Delta C \propto \omega^{-0.120 \pm 0.006}. \quad (2)$$

Как следует из рис. 2а, линии 2–4 при низких температурах асимптотически стремятся к постоянному значению $C_0 = 162$ пФ. Линия 1, по-видимому, также стремится к постоянному значению, но отличному от случаев для линий 2–4. Поэтому, во-первых, частотную характеристику находим для величины ΔC , отсчитываемой от не зависящего от температуры значения C_0 . Во-вторых, исключили линию 1 на рис. 2а, так как ее асимптотическое значение отличается от C_0 . Во всем остальном поведение всех линий на рис. 2б и 2в аналогично поведению линий на рис. 1а и 1б. Только погрешность измерения порядка 5%.

Целью нашей работы является описание результатов (1) и (2) методами фрактальной геометрии.

*E-mail: ballar@yandex.ru

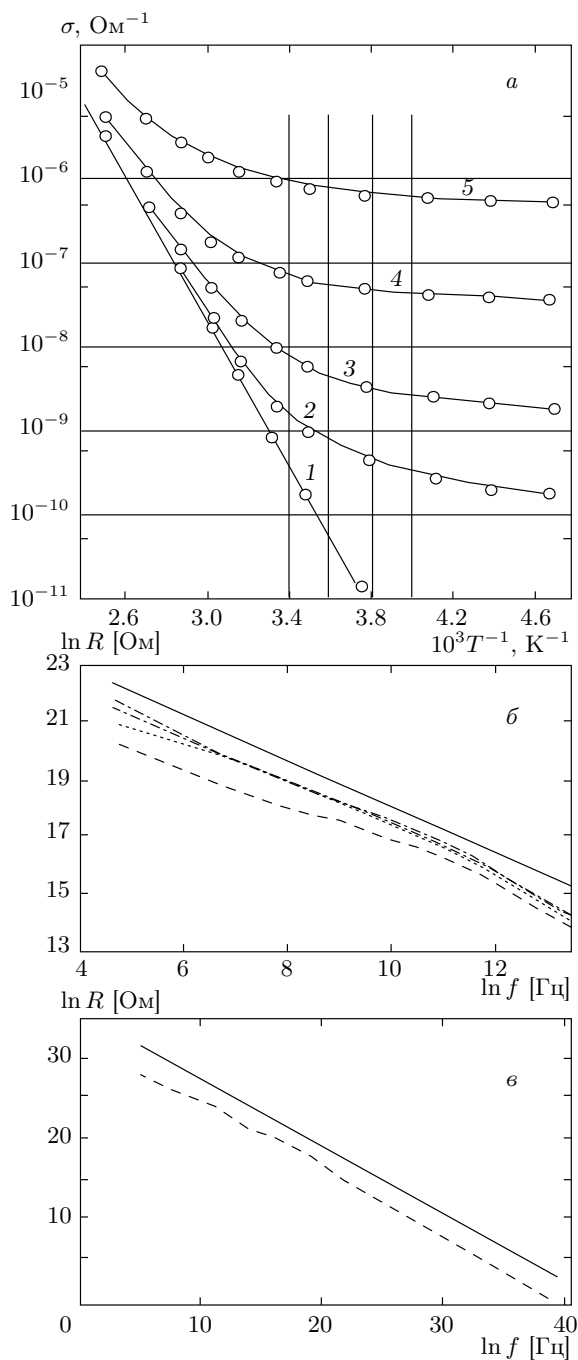


Рис. 1. а) Температурная зависимость электропроводности As_2Se_3 [1]: 1 — на постоянном токе; 2 — на переменном токе $f = 10^2$ Гц; 3 — $f = 10^3$ Гц; 4 — $f = 5 \cdot 10^4$ Гц; 5 — $f = 6 \cdot 10^5$ Гц [1]. б) Линейная аппроксимация (сплошная линия) частотных характеристик (штриховые линии). в) То же, что на рис. б, но штриховые линии смещением координат расположены в одну линию, там же показана в виде сплошной линии линейная аппроксимация. По оси $\ln R$ значения «приподняты»

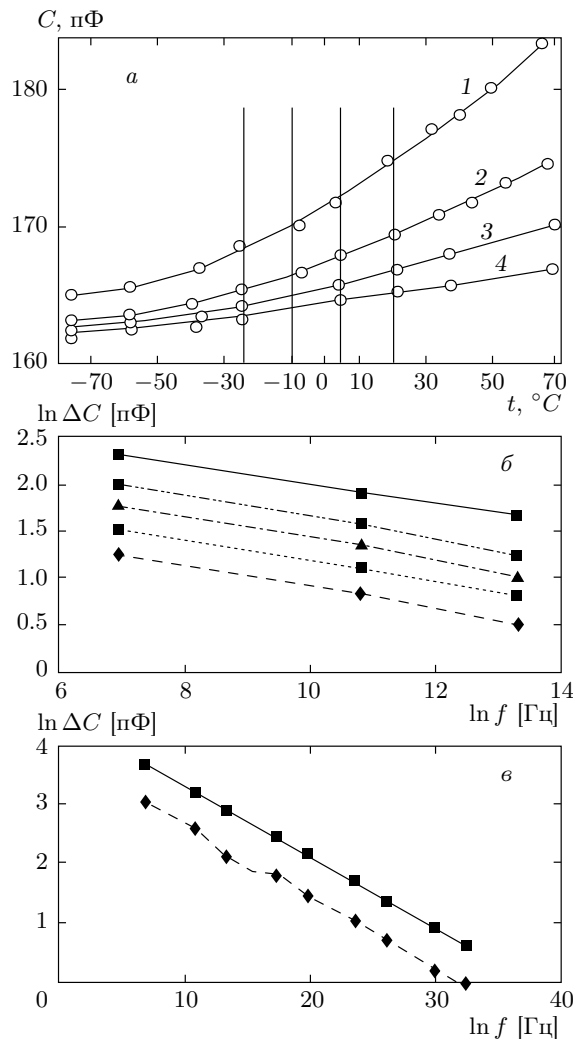


Рис. 2. а) Температурное изменение емкости As_2Se_3 на переменном токе: 1 — $f = 10^2$ Гц; 2 — $f = 10^3$ Гц; 3 — $f = 5 \cdot 10^4$ Гц; 4 — $f = 6 \cdot 10^5$ Гц [1]. б) и в) То же, что и на рис. 1б и 1в, только значения $\ln R$ заменены на значения $\ln \Delta C$

Кроме формальных математических вычислений, которые опишут закономерности (1) и (2), приведем соображения, позволяющие обосновать применение методов именно фрактальной геометрии. Такое изложение связано с тем, что, хотя после открытия фрактальной геометрии прошло более 30 лет, до сих пор встречается определенный скептицизм в отношении применения новой геометрии к физическим задачам.

Распространение электрического тока в неоднородных по электрическим свойствам материалах можно описать как его блуждание по проводящим и диэлектрическим участкам, причем участки про-

странственно разделены. Модель означает, что электроны проводимости перескакивают от одного проводящего участка к другому. Такое поведение электронов в неоднородном по электрическим свойствам материале обычно описывают теорией перколяции. Мы же обратим внимание на то, что пространственно-разделенные проводящие участки, с точки зрения фрактальной геометрии, представляют собой канторовское множество, которое характеризуется фрактальной размерностью D , причем $D < 1$.

Прыжки от одного проводящего участка к другому происходят случайным образом; это приводит к тому, что протекание электрического тока идет по причудливым кривым. Увеличение длины по сравнению с прямой линией приводит к эффективному увеличению сопротивления [5]. Но кривая линия протекания тока, с точки зрения фрактальной геометрии, также представляет собой фрактальный объект со своей фрактальной размерностью, отличной от единицы. Для нас существенно, что траекторией тока в неоднородном материале является не одна линия, а, согласно теории перколяции, множество линий, причем все эти линии подобны друг другу. А подобие объектов является одним из краеугольных понятий фрактальной геометрии.

Применение теории перколяции приводит к степенным законам, но при этом, как известно, появляется обилие степенных показателей. Фрактальная геометрия характеризуется только одним показателем — фрактальной размерностью. Применение фрактальной геометрии должно позволить выразить все степенные показатели через одну величину. Мы покажем, что это действительно так, т. е. степенные показатели в теоретических законах, описывающие результаты (1) и (2), можно выразить через одну величину — фрактальную размерность.

Сказанного должно быть достаточно, чтобы оценить возможность применения методов фрактальной геометрии к электрическим явлениям в неоднородных по электрическим свойствам материалах, например, в стеклообразном селениде мышьяка.

Математическое описание начнем с закона геометрического подобия:

$$L' = \eta L, \quad t' = \eta^h t. \quad (3)$$

Здесь L — линейный размер, например, длина траектории электрического тока, η — масштабный множитель, h — степенной показатель. В отличие от [6], где используется набор масштабных множителей, в (3) вводится один масштабный множитель и один степенной показатель, как это сделано в работе [7].

Поскольку мы будем описывать блуждание электрического тока в неоднородном материале, естественно показатель h назвать размерностью блуждания, как это предложено в [8]. Мы рассматриваем переменный электрический ток с круговой частотой ω . Очевидно, что распространение геометрического подобия на переменные процессы заключается в замене времени t на обратную величину круговой частоты $1/\omega$. Тогда (3) переписется в виде

$$L' = \eta L, \quad \omega' = \eta^{-h} \omega. \quad (4)$$

Электрические свойства материала описываются проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε (магнитные свойства мы не рассматриваем). Предполагая инвариантность материальных уравнений Максвелла относительно геометрического подобия, легко найти законы подобия для σ и ε :

$$\sigma' = \eta^{h-2} \sigma, \quad \varepsilon' = \eta^{2(h-1)} \varepsilon. \quad (5)$$

Эти законы можно получить следующим образом. Выпишем необходимые материальные уравнения Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{E}. \quad (7)$$

Здесь c — скорость света, ε_0 — диэлектрическая постоянная, E — электрическое поле, B — магнитная индукция, а магнитная проницаемость положена равной единице. Изменим масштаб физических величин:

$$E' = \eta^{-\Delta} E, \quad B' = \eta^b B, \quad (8)$$

$$\sigma' = \eta^m \sigma, \quad \varepsilon' = \eta^n \varepsilon. \quad (9)$$

Остальные величины даются выражениями (3). Перепишем уравнения (6) и (7) в «штрихованном» виде:

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}, \quad (10)$$

$$c^2 \nabla' \times \mathbf{B}' = \frac{\partial \varepsilon' \mathbf{E}'}{\partial t'} + \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \mathbf{E}'. \quad (11)$$

Обратим внимание на то, что величины ε_0 и c остаются неизменными, их масштабирование приведет только к изменению единиц измерения. Поскольку

$$\nabla' = \eta^{-1} \nabla,$$

после подстановки выражений (3), (8) и (9) в уравнения (10) и (11) получаем

$$\eta^{-1-\Delta} \nabla \times \mathbf{E} = -\eta^{-h+b} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\eta^{-1+b} c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \eta^{-h+n-\Delta} \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \eta^{m-\Delta} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{E}.$$

Чтобы эти уравнения совпали с (6) и (7), степенные показатели должны удовлетворять определенным соотношениям, которые подробно приведены в работах [9, 10]. В частности, для проводимости и диэлектрической проницаемости получаем законы (5).

Чтобы найти пространственную характеристику σ , исключим масштабный множитель следующим образом:

$$\eta = \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^{1/(h-2)} = \frac{L'}{L}.$$

Отсюда находим:

$$\sigma \propto L^{-2+h}. \quad (12)$$

С другой стороны, сопротивление $R \sim L/\sigma$ (не интересующие нас множители здесь и далее не выписываем), или, используя соотношение (12),

$$R \propto L^{3-h}. \quad (13)$$

Из соотношений (4) следует

$$L \propto \omega^{-1/h}. \quad (14)$$

Объединяя (13) и (14), находим частотную характеристику сопротивления:

$$R \propto \omega^{1-3/h}. \quad (15)$$

Сравнивая полученную зависимость с (1), находим, что размерность блуждания, вычисленная по частотной характеристике сопротивления, равна

$$h_R = 1.67 \pm 0.02.$$

Аналогично вычислениям для R , используя соотношения (4) и (5), находим пространственную характеристику диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon \propto L^{2h-2}.$$

Учитывая, что величина $\Delta C \propto \varepsilon/L$, и используя (14), окончательно находим

$$\Delta C \propto \omega^{-2+3/h}. \quad (16)$$

Сравнивая соотношения (16) и (2), находим, что определенная по частотной характеристике емкости размерность блуждания есть

$$h_C = 1.60 \pm 0.08.$$

Мы видим, что размерности блуждания, найденные по измерениям сопротивления и емкости, в пределах погрешности измерений совпали друг с другом. Такое совпадение вряд ли является случайным.

Оно указывает, что простые физические предположения о связи времени с частотой и инвариантности уравнений Максвелла относительно геометрического подобия привели к результатам, удовлетворительно описывающим измерения.

Выше мы указывали на то, что новая геометрия характеризуется фрактальной размерностью D . Результаты измерений мы описывали, используя размерность блуждания h . Используя теорию, рассмотренную в работе [11], можно доказать, что для электромагнитных процессов в неоднородных по электрическим свойствам материалах величины D и h связаны следующим соотношением:

$$D = 1/h. \quad (17)$$

Для стеклообразного селенида мышьяка мы получаем $D = 0.6$. Поскольку $D < 1$, проводящие участки пространственно разделены и образуют канторовское множество.

В заключение обратим внимание на следующее. Величина h_R измерена с высокой точностью, и ее можно принять близкой к точному значению. Величина h_C измерена с меньшей точностью. Возможно, это связано с тем, что каждая линия 1–4 на рис. 2а стремится к своему, отличному от других, асимптотическому значению. Если бы было возможно провести измерения емкости при более низких температурах, чтобы линии 1–4 на рис. 2а «вышли» на постоянные значения, то можно было бы предположить, что величина h_C сравняется со значением h_R .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 08-01-98006, 08-02-98007) и интеграционного проекта № 56 СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Круглов, Л. П. Страхов, в сб. *Вопросы электроники твердого тела*, вып. 2, изд-во Ленинградского ун-та (1968), с. 80.
2. М. Pollak and T. Geballe, *Phys. Rev.* **192**, 1742 (1961).
3. Дж. Блейкмор, *Физика твердого тела*, Мир, Москва (1988).
4. Р. Уайт, Т. Джебелл, *Дальний порядок в твердых телах*, Мир, Москва (1982).

5. С. С. Крылов, В. А. Любич, *Физика Земли*, вып. 12, 14 (2002).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1973).
7. Дж. Паладин, А. Вульпани, в сб. *Фракталы в физике*, Мир, Москва (1988), с. 624.
8. А. Марголина, в сб. *Фракталы в физике*, Мир, Москва (1988) с. 507.
9. В. К. Балханов, Ю. Б. Башкуев, в сб. *Труды 6 Международного симпозиума по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии*, Санкт-Петербург (2005), с. 265.
10. В. К. Балханов, Ю. Б. Башкуев, В. И. Козлов, В. А. Муллаяров, *ЖТФ* **79**, 152 (2009).
11. В. К. Балханов, Ю. Б. Башкуев, *Электромагнитные волны и электронные системы* вып. 6, 39 (2006).