ЖЭТФ, 2010, том 137, вып. 1, стр. 57–66

ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ ДИРАКОВСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ГРАФЕНЕ

Ю. Е. Лозовик [a]*, *С. Л. Огарков* [b], *А. А. Соколик* [a]

[a] *Институт спектроскопии Российской академии наук 142190, Троицк, Московская обл., Россия*

[b] *Московский инженерно-физический институт 115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 июня 2009 г.

Исследовано сверхпроводящее спаривание эффективно ультрарелятивистских электронов в графене, возникающее в результате обмена фононами. Для описания спаривания с учетом запаздывания взаимодействия получены уравнения Элиашберга в куперовском канале, которые из-за ультрарелятивизма электронов являются матричными с индексами, отвечающими валентной зоне и зоне проводимости. Уравнения решены как в пределе сильного допирования, когда спаривание является эффективно однозонным, так и в окрестности квантовой критической точки недопированного графена по величине константы связи, когда спаривание является существенно многозонным. Для этих случаев получены аналитические оценки критической температуры перехода системы в сверхпроводящее состояние. Показано, что учет динамических эффектов позволяет более точно определить критическую температуру перехода, а также критическую величину константы связи для недопированного графена, чем статическое приближение типа БКШ. Оценки констант взаимодействия электронов со скалярной оптической модой фононов в графене показывают, что при сильном химическом допировании графена достижима заметная температура перехода.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возросла потребность в различных обобщениях теории сверхпроводимости Бардина – Купера – Шриффера (БКШ) [1] на случаи многозонного спаривания, при котором в спаривании участвуют частицы сразу из нескольких зон. Такая задача впервые была рассмотрена в работе [2] и недавно приобрела особую актуальность в связи с обнаружением существенно многозонного характера спаривания в MgB_2 [3] и новых высокотемпературных сверхпроводниках на основе железа [4, 5]. Указанные примеры объединены тем, что в них все зоны спаривающихся частиц включают в себя соответствующие поверхности Ферми. Однако существует иной класс задач, таких как задачи о спаривании релятивистских фермионов, в которых существенную роль играют и удаленные от поверхности Ферми зоны античастиц. Как было показано [6, 7], учет античастиц при рассмотрении спаривания может значительно повлиять на величину щели в спектре.

Интерес к поведению ультрарелятивистских фермионов недавно получил значительный стимул в связи с экспериментальным изготовлением графена — двумерной модификации углерода с кристаллической решеткой типа «пчелиные соты» [8]. Низкоэнергетическая динамика электронов в такой системе описывается эффективным уравнением, имеющим вид двумерного уравнения Дирака для частиц с нулевой массой, скорость которых равна фермиевской скорости $v_F \approx 10^6$ м/с. В химически чистом графене уровень Ферми лежит в точке касания валентной зоны и зоны проводимости (в дираковской точке), но, прикладывая напряжение между листом графена и подложкой, его можно сдвинуть в любую из этих зон и создать тем самым электроны или дырки с концентрацией до 10^{13} см$^{-2}$ [9]. Если химический потенциал в графене находится достаточно близко к дираковской точке, то из-за отсутствия щели в спектре сверхпроводящее спаривание может затрагивать и зону проводимости, и

*E-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

валентную зону. В противоположном случае сильного допирования спаривание будет затрагивать только одну зону, содержащую поверхность Ферми.

В качестве возможных источников собственной сверхпроводимости графена были предложены фононный и плазмонный механизмы в графене, покрытом слоем металла [10], электронные корреляции [11–13] и существенно анизотропное электрон-электронное взаимодействие вблизи сингулярностей Ван Хова электронной подсистемы [14]. Помимо собственной сверхпроводимости, многозонный характер спаривания в графене может проявляться в эффекте близости при контакте со сверхпроводником (см., например, [15–17]) и электрон-дырочном спаривании в бислое графена в режиме сильной связи [18] (в отличие от электрон-дырочного спаривания в режиме слабой связи, рассмотренного для графена [19, 20], связанных квантовых ям [21] и трехмерного экситонного диэлектрика [22]). Спаривание электронов в графене, затрагивающее сразу две зоны, было рассмотрено в работе [23] в модели контактного потенциала спаривания и позднее в работе [24] путем распространения уравнений БКШ на конусообразную зонную структуру. Последний подход, пренебрегающий спинорной структурой волновых функций электронов в графене, в некотором смысле эквивалентен приближению контактного потенциала спаривания. В работе [24] и ранее в работах [25, 26] было, в частности, показано, что в недопированном графене существует квантовая критическая точка, отвечающая возникновению сверхпроводимости, когда константа связи превышает некоторое критическое значение.

В связи с применением теории БКШ для многозонного спаривания в графене представляет интерес ее дальнейшее обобщение в виде теории сверхпроводимости Элиашберга [27], учитывающей эффекты запаздывания взаимодействия. Среди немногочисленных примеров многозонного обобщения теории Элиашберга отметим двухзонное рассмотрение спаривания в MgB_2 [28, 29], при котором учет динамических эффектов дает результаты, качественно отличные от приближения БКШ [30], трехзонное рассмотрение спаривания в высокотемпературных сверхпроводниках на основе железа [31], а также применение теории Элиашберга к проблеме спаривания в кварковой материи конечной плотности посредством обмена магнитными глюонами, которые экранируются при конечных частотах, а в статическом пределе являются неэкранированными [32, 33].

Предметом рассмотрения настоящей работы является фононный механизм сверхпроводящего спаривания электронов в графене. Мы рассматриваем как однозонное спаривание в пределе сильного допирования, так и окрестность квантовой критический точки при малом допировании. Для фононного спектра мы используем приближение Эйнштейна, а уравнения Элиашберга записываем в куперовском канале, пренебрегая нормальной собственной энергией и влиянием кулоновского отталкивания на спаривание.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 выводятся уравнения Элиашберга для общего случая многозонного спаривания в графене. В разд. 3 эти уравнения решаются для случая сильного допирования и выводятся оценки для критической температуры перехода, а в разд. 4 критическая температура определяется в квантовой критической точке и ее окрестности (т. е. в пределе малого допирования). Наконец, в разд. 5 даются оценки констант связи для электрон-фононного взаимодействия в графене, а разд. 6 посвящен выводам.

2. УРАВНЕНИЯ ЭЛИАШБЕРГА ДЛЯ ГРАФЕНА

В окрестности каждой из двух точек зоны Бриллюэна ($\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}' = -\mathbf{K}$), в которых происходит касание валентной зоны и зоны проводимости, свободные электроны в графене подчиняются эффективному уравнению [34]

$$v_F(\mathbf{p}\cdot\sigma)\psi = E\psi, \tag{1}$$

где $\psi = (\psi_A, \psi_B)^T$ — двухкомпонентная волновая функция, состоящая из амплитуд плоских волн ψ_A и ψ_B, локализованных на подрешетках A и B кристаллической решетки графена, $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y\}$ — двумерный вектор, составленный из матриц Паули, $v_F \approx 10^6$ м/с — скорость электронов на поверхности Ферми. Решениями уравнения (1) являются спиноры

$$\psi = |\mathbf{p}\pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \\ \pm e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad E_\pm = \pm v_F|\mathbf{p}|,$$

соответствующие состояниям электрона в зоне проводимости («частицы») в случае знака «+» и в валентной зоне («античастицы») в случае знака «−», где φ — азимутальный угол вектора $\mathbf{p}$, отсчитываемый от некоторого фиксированного направления. Соответственно, при рассмотрении электронных переходов $|\mathbf{p}\gamma\rangle \to |\mathbf{p}'\gamma'\rangle$ под действием возмущения, одинаково влияющего на атомы подрешеток A и B, мы должны добавлять в матричные элементы этих переходов множители

$$\langle \mathbf{p}'\gamma'|\mathbf{p}\gamma\rangle = \begin{cases} \cos\dfrac{\varphi-\varphi'}{2}, & \text{если} \quad \gamma=\gamma', \\ -i\sin\dfrac{\varphi-\varphi'}{2}, & \text{если} \quad \gamma=-\gamma', \end{cases} \tag{2}$$

соответствующие перекрытию начального и конечного состояний.

Мы будем рассматривать внутризонное спаривание, которое выражается в образовании двух щелей: Δ_+ — щель в зоне проводимости (щель для «частиц») и Δ_- — щель в валентной зоне (щель для «античастиц»). При этом мы отвлекаемся от структуры конденсата по спинам и долинам, которая при s-волновом спаривании и отсутствии междолинных перебросов должна факторизоваться в виде антисимметричной спин-долинной волновой функции. Введем аномальные функции Грина в мацубаровском представлении

$$F_\gamma(\mathbf{p},\tau) = -\langle a_{\mathbf{p}\gamma}(\tau)a_{-\mathbf{p}\gamma}(0)\rangle,$$

где $a_{\mathbf{p}\gamma}$ — оператор уничтожения электрона с импульсом $\mathbf{p}$, находящегося в зоне γ. Тогда в результате решения многозонных уравнений Горькова в пренебрежении нормальной собственной энергией (в куперовском канале) мы получим

$$F_\gamma(\mathbf{p},i\varepsilon_n) = \frac{\Delta_\gamma(\mathbf{p},i\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2+\xi_\gamma^2(p)+\Delta_\gamma^2(\mathbf{p},i\varepsilon_n)}, \tag{3}$$

где $\xi_\pm(\mathbf{p}) = \pm v_F p - \mu$ — энергии электронов в зоне проводимости и валентной зоне, отсчитываемые от химического потенциала μ. Поскольку графен обладает электрон-дырочной симметрией относительно дираковской точки, в дальнейшем будем рассматривать случай $\mu > 0$.

В данной работе будем рассматривать электрон-фононное взаимодействие простейшего вида, считая, что деформационный потенциал, вызываемый длинноволновыми фононами, медленно меняется на расстояниях порядка периода решетки и тем самым действует одинаково на обе подрешетки. В таком случае затравочные матричные элементы $g_{\mathbf{pp}'\lambda}$ электрон-фононного взаимодействия умножаются на фактор перекрытия (2) и система уравнений самосогласования для щелей $\Delta_\pm$ принимает вид

$$\Delta_\gamma(\mathbf{p},i\varepsilon_n) = -T\sum_{\gamma'\lambda\varepsilon_k}\int\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2}\left|g_{\mathbf{pp}'\lambda}\right|^2\left|\langle\mathbf{p}'\gamma'|\mathbf{p}\gamma\rangle\right|^2 \times D_\lambda(\mathbf{p}-\mathbf{p}',i\varepsilon_n-i\varepsilon_k)F_{\gamma'}(\mathbf{p}',i\varepsilon_k), \tag{4}$$

где $D_\lambda(\mathbf{q},i\omega_n)$ — функция Грина фононов моды λ. Используя спектральное представление функций Грина

$$D_\lambda(\mathbf{q},i\omega_n) = \int_0^\infty d\nu\, B(\mathbf{q},\nu)\left(\frac{1}{i\omega_n-\nu}-\frac{1}{i\omega_n+\nu}\right),$$

$$F_\gamma(\mathbf{p},i\varepsilon_n) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega'\,\mathrm{Im}\,F_\gamma(\mathbf{p},\omega'+i\delta)\times\left(\frac{1}{i\varepsilon_n-\omega'}-\frac{1}{i\varepsilon_n+\omega'}\right),$$

вычисляя сумму по ε_k и делая аналитическое продолжение $i\varepsilon_n\to\omega+i\delta$, где $\delta\to+0$, приведем уравнения (4) к виду

$$\begin{aligned}\Delta_\gamma(\mathbf{p},\omega) = \sum_{\gamma'\lambda}\int\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2}\left|g_{\mathbf{pp}'\lambda}\right|^2\left|\langle\mathbf{p}'\gamma'|\mathbf{p}\gamma\rangle\right|^2 \times \\ \times\int_0^\infty d\nu\, B_\lambda(\mathbf{p}-\mathbf{p}',\nu)\int_0^\infty\frac{d\omega'}{2\pi}\,\mathrm{Im}\,F_\gamma(\mathbf{p}',\omega'+i\delta)\times \\ \times\left\{\left(\mathrm{th}\,\frac{\omega'}{2T}+\mathrm{cth}\,\frac{\nu}{2T}\right)\left(\frac{1}{\omega'+\omega+\nu+i\delta}+\right.\right. \\ \left.+\frac{1}{\omega'-\omega+\nu-i\delta}\right)-\left(\mathrm{th}\,\frac{\omega'}{2T}-\mathrm{cth}\,\frac{\nu}{2T}\right)\times \\ \left.\times\left(\frac{1}{\omega'+\omega-\nu+i\delta}+\frac{1}{\omega'-\omega-\nu-i\delta}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Ход дальнейшего решения уравнений (5) зависит от используемой процедуры интегрирования по импульсу $\mathbf{p}'$ и частоте ω'. В случае сильного допирования, когда химический потенциал μ велик по сравнению с характерными частотами фононов, функции щели $\Delta_\pm(\mathbf{p},\omega)$ слабо зависят от $\mathbf{p}$, в связи с чем уравнения (5) могут быть усреднены по импульсу и сведены к одномерным интегральным уравнениям по частоте [27]; этот случай будет рассмотрен в разд. 3. В противоположном случае слабого допирования, когда химический потенциал сравним с характерной частотой фононов или меньше ее, мы не можем проводить усреднение по поверхности Ферми в силу ее малости. Этот случай, соответствующий окрестности квантовой критической точки, будет рассмотрен в разд. 4.

3. СЛУЧАЙ СИЛЬНОГО ДОПИРОВАНИЯ

Энергетическая ширина слоя в окрестности поверхности Ферми, в пределах которого состояния электронов зоны проводимости существенно затрагиваются спариванием и $\operatorname{Im} F_+(p, \omega + i\delta) \neq 0$, равна по порядку величины характерной частоте фононов. С другой стороны, электроны валентной зоны затронуты спариванием, а $\operatorname{Im} F_-(p, \omega + i\delta) \neq 0$ при импульсах $p \approx (\omega - \mu)/v_F$ (см. (3)). Поскольку $p > 0$, $\operatorname{Im} F_-(p, \omega + i\delta) \neq 0$ только при $\omega > \mu$.

В случае сильного допирования, когда характерная частота фононов (и, соответственно, ширина частотной области, в которой $\Delta_\pm(p, \omega) \neq 0$) мала по сравнению с химическим потенциалом μ, мы можем, принимая во внимание сказанное выше и используя формулу (3), провести интегрирование по модулю импульса в уравнениях (5) следующим образом:

$$\int\limits_0^\infty \frac{p'\,dp'}{2\pi} \operatorname{Im} F_+(p', \omega' + i\delta) \approx \approx \pi \mathcal{N} \operatorname{Re} \frac{\Delta_+(\tilde{p}, \omega')}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta_+^2(\tilde{p}, \omega')}}, \quad (6)$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{p'\,dp'}{2\pi} \operatorname{Im} F_-(p', \omega' + i\delta) \sim \mathcal{N} \frac{\Delta_-(0, \mu)}{\mu}, \quad (7)$$

где $\mathcal{N} = p_F/2\pi v_F = \mu/2\pi v_F^2$ — плотность состояний на поверхности Ферми, а $\tilde{p}$ — импульс, находящийся внутри области спаривания $\mu - \omega' < v_F\tilde{p} < \mu + \omega'$. При сильном допировании функции $\Delta_\pm(p, \omega)$ на частотах порядка μ малы, поэтому мы можем пренебречь вкладом (7) по сравнению с (6).

Подставляя (6) в (5), мы видим, что $\Delta_\pm(\mathbf{p}, \omega)$ зависят от модуля импульса p только посредством спектральной функции фононов $B_\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \nu)$. Поскольку в уравнении (5) проводится интегрирование по азимутальному углу φ' импульса $\mathbf{p}'$, модуль которого, согласно формуле (6), близок к p_F, любая зависимость $\Delta_\pm(\mathbf{p}, \omega)$ от p смазывается на масштабах p_F. В результате можно считать, что щели практически не зависят от p, и рассматривать их в дальнейшем при $p = p_F$ как $\Delta_\gamma(p_F, \omega) \equiv \Delta_\gamma(\omega)$ [27].

Таким образом, подставляя (6) в (5) и полагая $p = p_F$, $\tilde{p} \approx p_F$, получим уравнения Элиашберга в куперовском канале для случая сильного допирования и конечных температур, похожие по форме на уравнения для обычного сверхпроводника [35–37]:

$$\Delta_\gamma(\omega) = \int\limits_0^\infty d\omega' K_{\gamma+}(\omega, \omega') \operatorname{Re} \frac{\Delta_+(\omega')}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta_+^2(\omega')}}, \quad (8)$$

где

$$K_{\gamma\gamma'}(\omega, \omega') = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty d\nu\, \alpha_{\gamma\gamma'}^2(\nu) F(\nu) \times \times \left\{ \left(\operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\nu}{2T} \right) \left(\frac{1}{\omega' + \omega + \nu + i\delta} + + \frac{1}{\omega' - \omega + \nu - i\delta} \right) - \left(\operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} - \operatorname{cth} \frac{\nu}{2T} \right) \times \times \left(\frac{1}{\omega' + \omega - \nu + i\delta} + \frac{1}{\omega' - \omega - \nu - i\delta} \right) \right\}. \quad (9)$$

Функции $\alpha_{\gamma\gamma'}^2(\nu)$ и $F(\nu)$ имеют смысл усредненных по поверхности Ферми квадрата матричного элемента электрон-фононного взаимодействия и плотности фононных состояний, соответственно, и определяются как

$$\alpha_{\gamma\gamma'}^2(\nu) F(\nu) = \mathcal{N} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi} \sum_\lambda |g_{\mathbf{pp}'\lambda}|^2 |\langle \mathbf{p}'\gamma' | \mathbf{p}\gamma \rangle|^2 \times \times B_\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \nu), \quad (10)$$

где векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ находятся на поверхности Ферми, а интегрирование проводится по азимутальному углу вектора $\mathbf{p}'$. Заметим, что в правую часть уравнений Элиашберга входит только щель в зоне проводимости $\Delta_+(\omega)$, поэтому самосогласованное решение необходимо находить только для $\Delta_+(\omega)$, а функция $\Delta_-(\omega)$ может быть найдена в явном виде по известной зависимости $\Delta_+(\omega)$.

Для аналитического решения интегрального уравнения (8) для функции $\Delta_+(\omega)$ будем аппроксимировать ее в правой части ступенчатой пробной функцией [36, 38]

$$\Delta_+(\omega') = \Delta_+ \Theta(\omega' - \omega_0) \quad (11)$$

шириной ω_0, а для вычисления величины Δ_+ в левой части формулы (8) будем полагать $\omega = 0$. В таком подходе частота обрезания ω_0 является свободным параметром, который можно полагать равным по порядку величины максимальной частоте фононов. Однако более естественно определить ω_0 самосогласованным образом — как частоту ω, при которой обращается в нуль функция щели $\Delta_+(\omega)$, которая дается левой частью (8) при подстановке в правую часть выражения (11). Решение получаемого таким образом уравнения для ω_0 оказывается непростой задачей, однако в работе [38] было показано, что частота ω_0 должна находиться вблизи «центра тяжести» функции $\alpha_{++}^2(\nu) F(\nu)$.

Для нахождения критической температуры сверхпроводящего перехода T_c, которая может служить верхней оценкой температуры перехода

Костерлица – Таулеса в квазидвумерной системе, линеаризуем уравнение (8) для $\gamma = +$, принимающее с учетом подстановки (11) вид

$$1 = \int\limits_0^{\omega_0} \frac{d\omega'}{\omega'} K_{++}(0,\omega'). \tag{12}$$

В приближении $T_c \ll \omega_0$ аналогично работе [38] находим

$$\int\limits_0^{\omega_0} \frac{d\omega'}{\omega'} K_{++}(0,\omega') \approx -\int\limits_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu}\,\alpha^2_{++}(\nu)F(\nu) \times \\ \times \left\{ \ln\left|1-\frac{\nu^2}{\omega_0^2}\right| - 2\,\mathrm{Re}\,\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{i\nu}{2\pi T_c}\right) + \right. \\ \left. + 2\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{cth}\,\frac{\nu}{2T_c}\ln\left|\frac{\omega_0+\nu}{\omega_0-\nu}\right| \right\}, \tag{13}$$

где $\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Вводя эффективную константу связи

$$\lambda = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu}\,\alpha^2_{++}(\nu)F(\nu) \tag{14}$$

и (аналогично работе [38]) функцию температуры

$$\Lambda(T) = \int\limits_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu}\,\alpha^2_{++}(\nu)F(\nu) \left\{ \ln\left|1-\frac{\omega_0^2}{\nu^2}\right| + \right. \\ + 2\ln\frac{\nu}{2\pi T} - 2\,\mathrm{Re}\,\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{i\nu}{2\pi T}\right) + \\ \left. + \mathrm{cth}\,\frac{\nu}{2T}\ln\left|\frac{\omega_0+\nu}{\omega_0-\nu}\right| \right\}, \tag{15}$$

получим из выражения (13) следующее уравнение для T_c:

$$T_c = \frac{2\omega_0 e^{\gamma}}{\pi}\exp\left\{-\frac{1+\Lambda(T_c)}{\lambda}\right\}, \tag{16}$$

где $\gamma \approx 0.577$ — постоянная Эйлера.

Чтобы конкретизировать функцию $\alpha^2_{++}(\nu)F(\nu)$, будем рассматривать одну моду оптических фононов, частота которых при $q = 0$ равна ω_1, причем $T_c \ll \omega_1 \ll \mu$. Кроме того, будем считать, что частота этой моды слабо меняется по сравнению с ω_1, а матричные элементы электрон-фононного взаимодействия $g_{\mathbf{pp}'\lambda}$ слабо зависят от импульсов на масштабах p_F (так как в электрически допированном графене импульс p_F мал по сравнению с вектором обратной решетки, на масштабах которого свойства фононов могут заметно меняться). Таким образом, характеристики фононов будем задавать моделью Эйнштейна:

$$g_{\mathbf{pp}'\lambda} \approx g, \quad B_\lambda(\mathbf{q},\nu) \approx \delta(\nu-\omega_1). \tag{17}$$

Из уравнений (17) и (10) получим

$$\alpha^2_{++}(\nu)F(\nu) = \frac{\mathcal{N}g^2}{2}\,\delta(\nu-\omega_1). \tag{18}$$

За счет наличия факторов перекрытия (2) («киральности» электронов) константа связи в графене эффективно уменьшается в два раза по сравнению с обычным металлом. Подставляя уравнение (18) в (14) и (15), с учетом условия $T_c \ll \omega_1$ получаем

$$\lambda = \frac{\mathcal{N}g^2}{\omega_1}, \quad \Lambda(T_c) \approx \lambda\ln\left(1+\frac{\omega_0}{\omega_1}\right). \tag{19}$$

Уравнение (16) с учетом (19) дает результат для критической температуры перехода в пределе слабого допирования:

$$T_c = \frac{2\omega_{eff}e^{\gamma}}{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\right\}, \quad \frac{1}{\omega_{eff}} = \frac{1}{\omega_0}+\frac{1}{\omega_1}. \tag{20}$$

Оценка (20) отличается от оценки БКШ $T_c = (2\omega_D e^{\gamma}/\pi)\exp(-1/\lambda)$ заменой дебаевской частоты ω_D на эффективную частоту ω_{eff}, которая является приведенной частотой, составленной из ω_0 и ω_1. Эффективная частота меньше каждой из частот ω_0, ω_1 и приближенно равна меньшей из них, если частоты по каким-то причинам сильно различаются по величине. Однако в модели Эйнштейна для фононного спектра более естественным является предположение $\omega_0 \approx \omega_1$, откуда $\omega_{eff} \approx \omega_1/2$.

4. ОКРЕСТНОСТЬ КВАНТОВОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

Существование квантовой критической точки в графене при $\mu = 0$ по отношению к константе связи является результатом обращения в нуль плотности состояний в дираковской точке. Поэтому при рассмотрении квантовой критической точки и ее окрестности нужно аккуратно проводить интегрирование по малым импульсам в уравнениях для щели. В то же время детали зависимости функций щели $\Delta_\pm(\mathbf{p},\omega)$ от частоты не являются принципиально важными для физики квантовой критической точки. Таким образом, для рассмотрения спаривания при малом допировании вернемся к уравнению (5) и сделаем предположение

$$\Delta_\gamma(\mathbf{p},\omega) = u_\gamma(p)\Theta(\omega_0-\omega), \tag{21}$$

а в левой части формулы (5), соответственно, положим $\omega = 0$. При этом, согласно формуле (3), при $\omega' \geq 0$

$$\operatorname{Im} F_{\gamma'}(\mathbf{p}', \omega' + i\delta) = \frac{\pi u_{\gamma'}(p')}{2E_{\gamma'}(p')} \delta\left[\omega' - E_{\gamma'}(p')\right] \times \times \Theta\left[\omega_0 - E_{\gamma'}(p')\right], \quad (22)$$

где $E_{\gamma'}(p') = \sqrt{\xi^2_{\gamma'}(p') + u^2_{\gamma'}(p')}$. Подставим теперь уравнение (22) в (5) и линеаризуем уравнение для нахождения T_c, сделав замену $E_{\gamma'}(p') \to |\xi_{\gamma'}(p')|$. Получим

$$u_\gamma(p) = \sum_{\gamma'} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} L_{\gamma\gamma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{u_{\gamma'}(p')}{2|\xi_{\gamma'}(p')|}, \quad (23)$$

где

$$L_{\gamma\gamma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \Theta\left[\omega_0 - |\xi_{\gamma'}(p')|\right] \sum_\lambda |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}|^2 \times \times |\langle \mathbf{p}\gamma|\mathbf{p}'\gamma'\rangle|^2 \int_0^\infty d\nu\, B_\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \nu) \times \times \left\{ \operatorname{th} \frac{|\xi_{\gamma'}(p')|}{2T_c} \left(\frac{1}{|\xi_{\gamma'}(p')| + \nu} - \frac{P}{|\xi_{\gamma'}(p')| - \nu} \right) + \right. \left. + \operatorname{cth} \frac{\nu}{2T_c} \left(\frac{1}{|\xi_{\gamma'}(p')| + \nu} + \frac{P}{|\xi_{\gamma'}(p')| - \nu} \right) \right\}, \quad (24)$$

а символ «P» означает интегрирование в смысле главного значения.

До сих пор мы не делали никаких предположений относительно параметров задачи. Теперь допустим, что $\mu < \omega_0$, тогда пределы интегрирования по модулю импульса p' в уравнении (23) определяются множителем $\Theta\left[\omega_0 - |\xi_{\gamma'}(p')|\right]$ в формуле (24) и для $\gamma = \pm$ равны, соответственно, $0 < p' < (\omega_0 \pm \mu)/v_F$. Получаем, что зависимость u_γ от p в левой части формулы (23), определяемая спектральной функцией $B_\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \nu)$ в уравнении (24), в результате интегрирования по $\mathbf{p}'$ размазывается по области импульса порядка ω_0/v_F. Поскольку частота ω_0, равная по порядку величины характерной частоте фононов, много меньше ширины π-зоны электронов графена, составляющей около 6 эВ, эта область мала по сравнению с вектором обратной решетки.

Поскольку область импульсов $\mathbf{p}'$, по которой проводится интегрирование в уравнениях для щели (23), мала по сравнению с зоной Бриллюэна, есть основания, как и в предыдущем разделе, использовать для оценки модель Эйнштейна (17) для одной моды оптических фононов. В таком подходе функции $u_\gamma(p)$ оказываются не зависящими от импульсов. Более того, в результате интегрирования фактора перекрытия $|\langle \mathbf{p}\gamma|\mathbf{p}'\gamma'\rangle|^2$ по углу между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ получим, что $u_\gamma(p)$ не зависят также от индекса зоны γ. Поэтому можно в явном виде провести интегрирование по p' и суммирование по γ' в уравнениях (23) согласно правилу

$$\sum_{\gamma'} \int_0^\infty \frac{p'\,dp'}{2\pi} f\left(|\xi_{\gamma'}(p')|\right) = 2\mathcal{N} \int_0^\infty d\xi\, f(\xi) \max\left(1, \frac{\xi}{\mu}\right).$$

Получим в результате

$$\frac{1}{G} = \int_0^{\omega_0} \frac{d\xi}{2\xi} \max(\mu, \xi) \times \times \left\{ \operatorname{th} \frac{\xi}{2T_c} \left(\frac{1}{\xi + \omega_1} - \frac{P}{\xi - \omega_1} \right) + \right. \left. + \operatorname{cth} \frac{\omega_1}{2T_c} \left(\frac{1}{\xi + \omega_1} + \frac{P}{\xi - \omega_1} \right) \right\}, \quad (25)$$

где введена безразмерная константа связи

$$G = \frac{g^2}{2\pi v_F^2}. \quad (26)$$

Из уравнения (25) следует наличие квантовой критической точки при $\mu = 0$, связанное с тем, что спаривание осуществляется, только если константа связи G превышает некоторое критическое значение. Действительно, при сколь угодно малом, но конечном μ интеграл в правой части (25) расходится при стремлении T_c к нулю, что означает возможность спаривания (т. е. существование $T_c > 0$) при сколь угодно малой G. Вместе с тем, при $\mu = 0$ и устремлении T_c к нулю интеграл в правой части стремится к конечному пределу, равному пороговому значению $1/G$. Если отношение $1/G$ превышает этот порог, то уравнение (25) для T_c не имеет решений.

Рассмотрим соотношение параметров системы, соответствующее квантовой критической точке и ее ближайшей окрестности: $\mu \ll T_c \ll \omega_1 \sim \omega_0$. При этом уравнение (25) примет вид

$$\frac{1}{G} = \ln\left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) + \frac{2T_c \ln 2}{\omega_1} + \frac{\mu^2}{4\omega_1 T_c}.$$

Решая получившееся квадратное уравнение относительно T_c, получим выражение для температуры перехода в окрестности квантовой критической точки:

$$T_c = \frac{\omega_1}{4\ln 2} \left\{ \ln\left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) - \frac{1}{G} + \right. \left. + \sqrt{\left[\ln\left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) - \frac{1}{G}\right]^2 + \frac{2\mu^2 \ln 2}{\omega_1^2}} \right\}. \quad (27)$$

При $\mu = 0$ выражение (27) дает температуру перехода в самой критической точке,

$$T_c = \frac{\omega_1}{2\ln 2}\left\{\ln\left(1+\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)-\frac{1}{G}\right\}, \tag{28}$$

причем спаривание может существовать только при

$$G > \frac{1}{\ln\left(1+\omega_0/\omega_1\right)}. \tag{29}$$

Теперь рассмотрим случай дальней окрестности квантовой критической точки, для которой $T_c \ll \mu < \omega_1 \sim \omega_1$. Уравнение (25) для таких соотношений между параметрами принимает вид

$$\frac{1}{G} = \ln\frac{\omega_0+\omega_1}{\mu+\omega_1} + \frac{\mu}{\omega_1}\left\{\ln\frac{2\omega_1 e^{\gamma}}{\pi} - \ln\frac{\mu+\omega_1}{\mu}\right\},$$

откуда находим

$$T_c = \frac{2e^{\gamma}}{\pi}\frac{\mu\omega_1}{\mu+\omega_1}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}+\frac{\omega_1}{\mu}\ln\frac{\omega_0+\omega_1}{\mu+\omega_1}\right\}, \tag{30}$$

где мы перешли от константы G к константе $\lambda = G\mu/\omega_1$ (см. уравнение (19)).

Выражения (27), (28) и (30) для температуры перехода в квантовой критической точке и ее окрестностях похожи по своей форме на выражения, полученные в работе [24], но являются более точными благодаря учету динамических эффектов и фактора перекрытия (2), проистекающего из учета спинорной природы волновых функций электронов. Критическое значение силы электрон-фононного взаимодействия, даваемое неравенством (29), зависит от соотношения частоты обращения в нуль сверхпроводящей щели ω_0 и частоты фононов ω_1.

Отметим также некоторое сходство между результатами (20) и (30) для критической температуры, полученными соответственно при условиях $T_c \ll \omega_0 \sim \omega_1 \ll \mu$ и $T_c \ll \mu < \omega_0 \sim \omega_1$. Эти случаи соответствуют физическим ситуациям однозонного и многозонного спаривания, и плавная интерполяция между соответствующими выражениями для T_c может дать ответ на вопрос об изменении факторов, влияющих на критическую температуру при постепенном переходе от многозонного спаривания к однозонному.

5. ОЦЕНКИ

Сделаем теперь оценки констант связи, достижимых в графене за счет электрон-фононного взаимодействия. Как известно (см., например, работы [39, 40] и цит. лит.), среди фононных мод графена наиболее сильное взаимодействие с электронами демонстрируют скалярные фононы A_1, имеющие импульс $\pm\mathbf{K}$, и псевдовекторные фононы E_2 с импульсом Γ. Обе указанные ветви являются оптическими с частотами $\omega_{\mathbf{K}} \approx 0.170$ эВ и $\omega_\Gamma \approx 0.196$ эВ, и каждая из них представлена двумя вырожденными модами. Было обнаружено, что значения констант электрон-фононной связи для $\mathbf{K}$-моды, извлекаемые из экспериментальных данных, превышают в 2–5 раз значения, получаемые из первых принципов [41, 42]. Этот эффект был приписан роли электрон-электронного взаимодействия, эффективно перенормирующего электрон-фононные вершины [40, 43] (в то же время константа связи для Γ-моды практически не перенормируется). С учетом такой перенормировки отношение безразмерных констант электрон-фононного взаимодействия $\lambda^{(el-ph)} = -(\partial\,\mathrm{Re}\,\Sigma_{el}(\varepsilon)/\partial\varepsilon)|_{\varepsilon=\mu}$, определяющих перенормировку электронных свойств [42, 44, 45] и соответствующих $\mathbf{K}$- и Γ-модам фононов, составляет $\lambda_{\mathbf{K}}^{(el-ph)}/\lambda_{\Gamma}^{(el-ph)} \approx 3.2$ [40]. В связи с этим для дальнейших оценок будем рассматривать только скалярную $\mathbf{K}$-моду с частотой $\omega_1 = 0.17$ эВ.

Соотнося определения используемой нами константы электрон-фононной связи g с рассматриваемой в работе [42] безразмерной константой $\lambda(\epsilon_f)$ (формула (15) и рис. 5 в работе [42]) и принимая во внимание двукратное вырождение $\mathbf{K}$-моды, получим $g^2 = 2\omega_1\lambda(\epsilon_f)/\mathcal{N}$. С другой стороны, можно установить соответствие с константой λ_{A_1} из работы [40] (формула (9) и рис. 6 из работы [40]): $g^2 = v_F^2\lambda_{A_1}$. В обоих случаях для введенных нами безразмерных констант (19) и (26) получаем очень близкие результаты:

$$\lambda \approx 0.02\,\frac{\mu}{\omega_1}, \quad G \approx 0.02. \tag{31}$$

При электрическом допировании образцов графена достижимы концентрации носителей до 10^{13} см$^{-2}$, соответствующие значению химического потенциала $\mu = v_F\sqrt{\pi n}$ до 0.3 эВ [9]. Если $\mu \ll \omega_1$, чему соответствует $n \ll 2\cdot 10^{12}$ см$^{-2}$, то система находится в окрестности квантовой критической точки, рассмотренной в разд. 4. Однако с учетом формулы (31) критическое значение G (29) может быть достигнуто только при очень большом отношении ω_0/ω_1, что нереалистично. Следовательно, скалярная $\mathbf{K}$-мода фононов не приводит к сверхпроводящему спариванию электронов в графене в окрестности квантовой критической точки $\mu = 0$.

При концентрации носителей $n \sim 2\cdot 10^{12}$ см$^{-2}$ система находится в области кроссовера от многозонного к однозонному режиму спаривания, а при максимально достижимой концентрации $n = 10^{13}$ см$^{-2}$

в электрически допированном графене режим спаривания можно считать уже однозонным. При этом $\mu \approx 0.37$ эВ, а формулы (31) и (20) дают $\lambda \approx 0.044$, $T_c \approx 1.5 \cdot 10^{-7}$ К. Однако при химическом допировании графена достижимы гораздо более высокие концентрации носителей — вплоть до $n = 1.6 \cdot 10^{14}$ см$^{-2}$, что соответствует $\mu \approx 1.5$ эВ [46–48]. При таких условиях приближение дираковской динамики электронов (1) нарушается, а поверхность Ферми претерпевает сильное треугольное искажение. Однако качественно можно распространить выводы настоящей работы и на этот случай, принимая во внимание, что треугольное искажение будет способствовать спариванию электронов с противоположными импульсами из разных долин $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}' = -\mathbf{K}$. При $\mu \sim 1.5$ эВ будем иметь $\lambda \sim 0.18$, $T_c \sim 4.3$ К. Конечно же, при таком сильном допировании нужно учитывать ряд дополнительных факторов, например, влияние примесей на сверхпроводящее состояние [49] и образование энергетических зон примесных атомов (по аналогии с химически расслоенным графитом — см., например, работу [50]), а также проанализировать возможные структурные перестройки решетки графена [48].

6. ВЫВОДЫ

В работе получены уравнения Элиашберга, описывающие сверхпроводящее спаривание ультрарелятивистских электронов в графене из-за обмена фононами с учетом динамических эффектов. Для рассмотрения мы ограничились приближением куперовского канала, не учитывающим перенормировку нормальных свойств, и приближением Эйнштейна для фононного спектра, которое является адекватным для любых оптических фононов, если область импульсного пространства, захватываемого спариванием, мала по сравнению с зоной Бриллюэна.

Аналитические выражения для щели были получены как в пределе сильного допирования, когда в спаривании участвуют электроны из узкого слоя вблизи поверхности Ферми и спаривание, фактически, является однозонным, так и в окрестности квантовой критической точки $\mu = 0$, где спаривание является существенно многозонным. Критическая температура перехода в обоих случаях и критическая величина силы электрон-фононной связи при $\mu = 0$ зависят от соотношения частоты обращения в нуль сверхпроводящей щели и частоты фононов.

Оценки констант связи с учетом наиболее сильно взаимодействующей с электронами скалярной фононной моды графена A_1 показывают, что в окрестности квантовой критической точки данная мода не может привести к спариванию электронов. При сильном химическом допировании графена (когда реализуется однозонный режим спаривания) константа связи может достигать существенных значений за счет большой плотности электронных состояний. Однако при таких условиях необходимо учитывать отклонение дисперсии электронов от линейного закона и влияние примесных атомов на электронную структуру графена.

Для более аккуратных оценок необходимо рассматривать взаимодействие электронов с другими модами фононов в графене, помимо A_1 (в том числе с изгибными модами, появляющимися в свободно подвешенном графене [51], которые, по некоторым оценкам [52], могут демонстрировать сильное взаимодействие с электронами), что будет предметом дальнейшей работы.

Представляет интерес распространение использованной модели на общий случай спаривания ультрарелятивистских фермионов, обменивающихся массивными или безмассовыми бозонами, которое, в отличие от чисто статических моделей БКШ [6, 7], будет принимать во внимание эффекты запаздывания взаимодействия. При этом учет обмена бозонами, которые обладают достаточно малой массой и, соответственно, малыми характерными энергиями, требует более аккуратного рассмотрения интегрирования в области малых частот [38].

При малом допировании, в окрестности квантовой критической точки, становится важным вопрос о применимости теоремы Мигдала [53], которая требует, чтобы характерные частоты электронной подсистемы были велики по сравнению с характерными частотами фононов. Если химический потенциал достаточно мал, то условия применимости этой теоремы нарушаются и, как следствие, фононная функция Грина и вершины электрон-фононного взаимодействия могут претерпевать существенные перенормировки. Как было показано в работах [39, 54], изменение фононных свойств в результате взаимодействия с электронами сводится к изменению их дисперсионной зависимости, которое для оптических фононов является слабым на важных для электронного спаривания импульсах, малых по сравнению с вектором обратной решетки.

Отметим, что использованное в данной работе приближение куперовского канала приводит к качественно правильным результатам, только если перенормировка нормальных свойств и влияние кулоновского отталкивания относительно малы; в противном случае учет перенормировки нормальных свойств может привести к качественно новым зависимостям в выражениях для T_c [36, 38, 55]. Представляется важным поиск как возможностей ослабления кулоновского отталкивания (например, помещение графена в среду с большой диэлектрической проницаемостью), так и других механизмов сверхпроводимости в графене.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и программ РАН. Один из авторов (А. А. С.) благодарит за поддержку фонд некоммерческих программ «Династия» и Фонд содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
2. H. Suhl, B. T. Matthias, and L. R. Walker, Phys. Rev. Lett. **3**, 552 (1959).
3. H. Schmidt, J. F. Zasadzinski, K. E. Gray, and D. G. Hinks, Phys. Rev. Lett. **88**, 127002 (2000).
4. V. Barzykin and L. P. Gorkov, Письма в ЖЭТФ **88**, 142 (2008).
5. М. В. Садовский, УФН **178**, 1243 (2008).
6. R. D. Pisarski and D. H. Rischke, Phys. Rev. D **60**, 094013 (1999).
7. T. Ohsaku, Phys. Rev. B **65**, 024512 (2001); Phys. Rev. B **66**, 054518 (2002).
8. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al., Nature **438**, 197 (2005).
9. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al., Science **306**, 666 (2004).
10. B. Uchoa and A. H. Castro Neto, Phys. Rev. Lett. **98**, 146801 (2007).
11. A. M. Black-Schaffer and S. Doniach, Phys. Rev. B **75**, 134512 (2007).
12. C. Honerkamp, Phys. Rev. Lett. **100**, 164404 (2008).
13. S. Pathak, V. B. Shenoy, and G. Baskaran, arXiv:cond-mat/0809.0244v1.
14. J. González, Phys. Rev. B **78**, 205431 (2008).
15. H. B. Heersche, P. Jarillo-Herrero, J. O. Oostinga et al., Nature **446**, 56 (2007).
16. C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **80**, 1337 (2008).
17. M. V. Feigel'man, M. A. Skvortsov, and K. S. Tikhonov, Письма в ЖЭТФ **88**, 862 (2008).
18. Yu. E. Lozovik and A. A. Sokolic, Phys. Lett. A **373** (2009).
19. Yu. E. Lozovik and A. A. Sokolik, Письма в ЖЭТФ **87**, 61 (2008).
20. Ю. Е. Лозовик, С. П. Меркулова, А. А. Соколик, УФН **178**, 757 (2008).
21. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, Письма в ЖЭТФ **22**, 556 (1975); ЖЭТФ **71**, 738 (1976).
22. Л. В. Келдыш, Ю. В. Копаев, ФТТ **6**, 2791 (1964).
23. T. Ohsaku, Int. J. Mod. Phys. B **18**, 1771 (2004).
24. N. B. Kopnin and E. B. Sonin, Phys. Rev. Lett. **100**, 246808 (2008).
25. A. H. Castro Neto, Phys. Rev. Lett. **86**, 4382 (2001).
26. E. C. Marino and L. H. Nunes, Nucl. Phys. B **741**, 404 (2006).
27. Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **38**, 966 (1960).
28. G. A. Ummarino, R. S. Gonnelli, S. Massidda, and A. Bianconi, Physica C **407**, 121 (2004).
29. E. J. Nicol and J. P. Carbotte, Phys. Rev. B **71**, 054501 (2005).
30. O. V. Dolgov, I. I. Mazin, D. Parker, and A. A. Golubov, Phys. Rev. B **79**, 060502(R) (2009).
31. G. A. Ummarino, M. Tortello, D. Daghero, and R. S. Gonnelli, arXiv:cond-mat/0904.1808v2.
32. D. T. Son, Phys. Rev. D **59**, 094019 (1999).
33. T. Schäfer and F. Wilczek, Phys. Rev. D **60**, 114033 (1999).
34. G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **53**, 2449 (1984).
35. D. J. Scalapino, Y. Wada, and J. C. Swihart, Phys. Rev. Lett. **14**, 102 (1965).
36. W. L. McMillan, Phys. Rev. **167**, 331 (1968).
37. С. В. Вонсовский, Ю. А. Изюмов, Э. З. Курмаев, *Сверхпроводимость переходных металлов, их сплавов и соединений*, Наука, Москва (1977), с. 44.
38. М. В. Медведев, Э. А. Пашицкий, Ю. С. Пятилетов, ЖЭТФ **65**, 1186 (1973).
39. S. Piscanec, M. Lazzeri, F. Mauri et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 185503 (2004).

40. D. M. Basko and I. L. Aleiner, Phys. Rev. B **77**, 041409(R) (2008).

41. J. L. McChensey, A. Bostwick, T. Ohta et al., arXiv:cond-mat/0809.4046v1.

42. M. Calandra and F. Mauri, Phys. Rev. B **76**, 205411 (2007).

43. S. Y. Zhou, D. A. Siegel, A. V. Fedorov, and A. Lanzara, Phys. Rev. B **78**, 193404 (2008).

44. C.-H. Park, F. Giustino, M. L. Cohen, and S. G. Louie, Phys. Rev. Lett. **99**, 086804 (2007).

45. W.-K. Tse and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **99**, 236802 (2007).

46. A. Bostwick, T. Ohta, T. Seyller et al., Nature Phys. **3**, 36 (2007).

47. A. Bostwick, T. Ohta, and J. L. McChensey, New J. Phys. **9**, 385 (2007).

48. J. L. McChensey, A. Bostwick, T. Ohta et al., arXiv:cond-mat/0705.3264.

49. T. O. Wehling, H. P. Dahal, A. I. Lichtenstein, and A. V. Balatsky, Phys. Rev. B **76**, 035414 (2008).

50. R. Al-Jishi, Phys. Rev. B **28**, 112 (1983).

51. E. Mariani and F. von Oppen, Phys. Rev. Lett. **100**, 076801 (2008).

52. D. V. Khveshchenko, J. Phys.: Condens. Matter **21**, 075303 (2009).

53. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **37**, 249 (1960).

54. S. Pisana, M. Lazzeri, C. Casiraghi et al., Nature Materials **6**, 198 (2007).

55. О. Е. Долгов, Е. Г. Максимов, УФН **138**, 95 (1982).