ЖЭТФ, 2010, том 137, вып. 4, стр. 783–788 

# О ВЛИЯНИИ ДИССИПАТИВНЫХ ЭФФЕКТОВ НА НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

*В. П. Лахин**, *В. И. Ильгисонис*

*РНЦ «Курчатовский институт»*
*123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 сентября 2009 г.

В рамках одножидкостной диссипативной магнитной гидродинамики исследуется устойчивость дифференциально-вращающейся цилиндрической плазмы в аксиальном однородном магнитном поле. Выведено дисперсионное уравнение мелкомасштабных осесимметричных возмущений с учетом эффектов тепловой стратификации плазмы, ее резистивности и вязкости. В предельных случаях пренебрежимо малой резистивности и пренебрежимо малой вязкости получены критерии устойчивости плазмы. Показано, что в случае малой вязкости азимутальное течение резистивной плазмы в аксиальном магнитном поле неустойчиво из-за эффекта плавучести, если ее давление и энтропия одновременно либо возрастают, либо уменьшаются в радиальном направлении.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование неустойчивостей вращающейся плазмы в слабых магнитных полях является предметом интенсивного исследования в последние годы (см., например, обзоры [1–3]). В значительной степени этот интерес подогревается астрофизическими приложениями. К настоящему времени сложилась достаточно общепринятая точка зрения, что магнитовращательная неустойчивость (МВН) является источником турбулентности плазмы в аккреционных дисках и объясняет наблюдаемые высокие скорости аккреции вещества, которые существенно превышают скорости, обусловленные молекулярными вязкостью и проводимостью плазмы. МВН возникает во вращающейся плазме со спадающим по радиусу профилем угловой скорости вращения при наличии сколь угодно слабого осевого магнитного поля [4, 5]. Со времени переоткрытия неустойчивости в работе [5] многочисленными авторами изучалось влияние различных факторов на МВН. В частности, в работах [6–9] подробно исследовалось влияние эффектов вязкости и резистивности на неустойчивость. Эти работы стимулировались проектами по постановке экспериментов по лабораторному наблюдению МВН в течениях Куэтта жидких металлов. Поскольку предполагалось, что течение жидких металлов строго несжимаемо, то в указанных работах естественным образом отсутствовал эффект радиальной стратификации жидкости. Эффектом стратификации во вращающейся резистивной плазме пренебрегалось ранее и в работе [3]. С другой стороны, в приближении бездиссипативной плазмы эффект тепловой стратификации плазмы (эффект плавучести) учитывался уже в пионерской работе [5], а также в ряде более поздних работ, связанных с проблемой аккреционных течений с доминирующей конвекцией, к примеру в [10, 11]. В настоящей работе при рассмотрении устойчивости дифференциально-вращающейся плазмы в аксиальном магнитном поле одновременно учитываются как диссипативные эффекты (вязкость и резистивность), так и тепловая радиальная стратификация плазмы. Для учета последнего эффекта в приближении Буссинеска учитывается слабая сжимаемость плазмы. Анализ устойчивости осуществляется в рамках уравнений диссипативной магнитной гидродинамики; рассматриваются осесимметричные мелкомасштабные возмущения. Представляется, что результаты, полученные в сформулированной выше постановке задачи, могут быть полезны при планировании лабораторных экспериментов

*E-mail: vplakhin@mtu-net.ru, lakhin@nfi.kiae.ru

по наблюдению МВН во вращающейся плазме и интерпретации полученных в них данных [12, 13].

Настоящая работа в значительной мере мотивировалась плазменными приложениями, однако ее результаты справедливы и для иных проводящих сред (жидкостей, газов).

## 2. ЛОКАЛЬНОЕ ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

С учетом диссипативных эффектов динамику плазмы в поле силы тяжести, которую учитываем для общности, имея в виду астрофизические приложения, описываем хорошо известными уравнениями магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \nu\nabla^2\mathbf{v} - \nabla\Phi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \eta\nabla^2\mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\frac{p}{\rho^\Gamma} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{v}$, $\rho$, $p$, $\nu$ и $\eta$ — соответственно скорость, плотность, давление, вязкость и резистивность плазмы, $\Gamma$ — показатель адиабаты, а $\Phi$ — потенциал, описывающий внешнюю силу тяжести. Используется гауссова система единиц.

Предполагаем, что плазма находится в аксиальном однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$ и вращается в азимутальном направлении со скоростью $\mathbf{v}_0 = r\Omega(r)\mathbf{e}_\phi$, а сила тяжести направлена по радиусу и зависит от радиальной координаты, $\Phi = \Phi(r)$. Здесь и далее $(r,\phi,z)$ — цилиндрические координаты, $\Omega$ — угловая скорость. Радиальный баланс сил, обеспечивающий равновесие такого течения плазмы, описывается уравнением

$$\rho_0\left(r\Omega^2 - \frac{d\Phi}{dr}\right) = \frac{dp_0}{dr}, \quad (5)$$

где $\rho_0$ и $p_0$ — равновесные массовая плотность и давление плазмы.

Рассмотрим осесимметричные мелкомасштабные возмущения течения плазмы в виде плоских волн с пространственно-временной зависимостью возмущенных величин, $\exp(ik_r r + ik_z z + \gamma t)$, а сами возмущенные величины обозначим штрихом ($k_r$ и $k_z$ — радиальная и аксиальная проекции волнового вектора, $\gamma$ — инкремент возмущения). Полагаем, что равновесное магнитное поле мало, так что $c_s^2/c_A^2 \gg 1$, а угловая скорость течения мала по сравнению со звуковой частотой, $\Omega \ll k_z c_s$. Здесь $c_s^2 \equiv \Gamma p_0/\rho_0$ — скорость звука, а $c_A^2 = B_0^2/4\pi\rho$ — альфвеновская скорость. Учитываем эффект, обусловленный радиальной тепловой стратификацией плазмы (эффект плавучести), полагая, что $p_0/\rho_0 \approx \Omega^2 l_p l_s$, где $l_p$ и $l_s$ — характерные длины неоднородности равновесного давления и равновесной энтропии $s = \ln(p_0/\rho_0^\Gamma)$ плазмы.

Возмущения при таких условиях можно рассматривать как квазинесжимаемые. В уравнениях движения (1) и магнитной индукции (2) можно полагать, что радиальная и аксиальная компоненты возмущения скорости плазмы связаны условием

$$\nabla\cdot\mathbf{v}' \equiv ik_r v_r' + ik_z v_z' = 0. \quad (6)$$

Из уравнений (1) и (2) в линейном по возмущению приближении получаем

$$(\gamma+\omega_\nu)v_r' - 2\Omega v_\phi' = -ik_r\frac{P'}{\rho} + \frac{\rho'}{\rho_0^2}\frac{dp_0}{dr} + \frac{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)}{4\pi\rho}B_r', \quad (7)$$

$$(\gamma+\omega_\nu)v_\phi' + \frac{\kappa^2}{2\Omega}v_r' = \frac{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)}{4\pi\rho}B_\phi', \quad (8)$$

$$(\gamma+\omega_\nu)v_z' = -ik_z\frac{P'}{\rho} + \frac{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)}{4\pi\rho}B_z', \quad (9)$$

$$(\gamma+\omega_\eta)B_r' = i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)v_r', \quad (10)$$

$$(\gamma+\omega_\eta)B_\phi' = i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)v_\phi' + r\frac{d\Omega}{dr}B_r', \quad (11)$$

$$(\gamma+\omega_\eta)B_z' = i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)v_z'. \quad (12)$$

Здесь $\omega_\nu = \nu k^2$ и $\omega_\eta = \eta k^2$ — соответственно вязкостная и резистивная частоты, $k^2 = k_r^2 + k_z^2$, $\kappa$ — эпициклическая частота,

$$\kappa^2 = \frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left(\Omega^2 r^4\right), \quad (13)$$

а $P' = p' + B_0 B'_z/4\pi$ — возмущение полного давления (плазмы и магнитного поля). Для замыкания системы уравнений (6)–(12) используем уравнение адиабаты (4), которое в приближении Буссинеска принимает вид (см., например, работу [5])

$$\gamma\Gamma\frac{\rho'}{\rho_0} - v'_r\frac{d}{dr}\left(\ln\frac{p_0}{\rho_0^\Gamma}\right) = 0. \tag{14}$$

Решая систему уравнений (6)–(12) и (14), приходим к дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned}\gamma\Big\{\left[(\gamma+\omega_\eta)(\gamma+\omega_\nu)+\omega_A^2\right]^2 &+ \\ +\,\alpha^2\left[(\gamma+\omega_\eta)^2+\omega_A^2\right]\kappa^2 - 4\alpha^2\omega_A^2\Omega^2\Big\} &+ \\ +\,\alpha^2N^2(\gamma+\omega_\eta)\left[(\gamma+\omega_\eta)(\gamma+\omega_\nu)+\omega_A^2\right] &= 0,\end{aligned} \tag{15}$$

где $\omega_A$ — альфвеновская частота, $\omega_A^2 \equiv k_z^2 c_A^2$, $\alpha = k_z/k$, а $N$ — частота Брунта–Вяйсяля (Brunt–Väisälä), описывающая радиальную тепловую стратификацию плазмы,

$$N^2 = -\frac{1}{\Gamma\rho_0}\frac{dp_0}{dr}\frac{d}{dr}\left(\ln\frac{p_0}{\rho_0^\Gamma}\right). \tag{16}$$

В предельном случае $N^2 = 0$ данное дисперсионное уравнение переходит в соответствующее уравнение, полученное и подробно исследованное в работах [6, 7, 9]:

$$\begin{aligned}\left[(\gamma+\omega_\eta)(\gamma+\omega_\nu)+\omega_A^2\right]^2 &+ \\ +\,\alpha^2\left[(\gamma+\omega_\eta)^2+\omega_A^2\right]\kappa^2 - 4\alpha^2\omega_A^2\Omega^2 &= 0.\end{aligned} \tag{17}$$

В предельном случае идеально проводящей плазмы из уравнения (15) следует дисперсионное уравнение, выведенное в работе [5] и впоследствии подробно исследованное, к примеру, в [10, 11]:

$$\begin{aligned}\left(\gamma^2+\omega_A^2\right)^2 + \alpha^2\left(\gamma^2+\omega_A^2\right)\left(\kappa^2+N^2\right) &- \\ - 4\alpha^2\omega_A^2\Omega^2 &= 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, дисперсионное уравнение (15) обобщает дисперсионное уравнение работ [6, 7, 9] с учетом тепловой стратификации жидкости (эффекта плавучести) и дисперсионное уравнение из работы [5] с учетом диссипативных эффектов.

Дисперсионное уравнение (15) является уравнением пятой степени по отношению к $\gamma$, поэтому аналитическое нахождение его корней не представляется возможным. Однако, как хорошо известно, вывод об устойчивости возмущений, описываемых степенны́м алгебраическим уравнением можно сделать, не решая его, а лишь анализируя его коэффициенты с применением критериев Рауса–Гурвица или Льенара–Шипара [14]. В общем случае при одновременном учете вязкости и резистивности плазмы даже эта задача оказывается достаточно затруднительной. В силу высокой степени уравнения критерий устойчивости, определяемый цепочкой неравенств, не поддается разумному анализу. Поэтому в данной работе ограничимся рассмотрением влияния вязкости и резистивности на устойчивость равновесного течения плазмы по отдельности, считая магнитное число Прандтля $P_m \equiv \nu/\eta$ либо очень большим, $P_m \gg 1$, и пренебрегая резистивностью, либо, наоборот, очень малым, $P_m \ll 1$, и пренебрегая вязкостью.

## 3. ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

В чисто гидродинамическом случае (в отсутствие магнитного поля) дисперсионное уравнение (15) упрощается и сводится к уравнению третьей степени по $\gamma$:

$$\gamma(\gamma+\omega_\nu)^2 + \alpha^2\kappa^2\gamma + \alpha^2N^2(\gamma+\omega_\nu) = 0. \tag{19}$$

Левую часть этого уравнения перепишем в виде характеристического многочлена третьей степени:

$$f(\gamma) \equiv \gamma^3 + a_1\gamma^2 + a_2\gamma + a_3 = 0, \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered}a_1 = 2\omega_\nu, \quad a_3 = \alpha^2N^2\omega_\nu, \\ a_2 = \omega_\nu^2 + \alpha^2(\kappa^2+N^2).\end{gathered} \tag{21}$$

Для того чтобы рассматриваемые возмущения были устойчивыми, необходимо и достаточно, чтобы действительная часть всех корней уравнения (19) была отрицательной. Воспользуемся критерием Льенара–Шипара, который в применении к уравнению (20) гласит: для того чтобы многочлен $f(\gamma)$ имел все корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы

1) все коэффициенты многочлена $f(\gamma)$ были положительны, $a_i > 0$, $i = 1$–$3$;

2) имело место условие $T_2 > 0$ для определителя Гурвица:

$$T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3. \tag{22}$$

Применяя критерий Льенара–Шипара, получаем следующее условие устойчивости осесимметричных гидродинамических мод в вязкой вращающейся плазме в отсутствие внешнего магнитного поля:

$$N^2 > 0, \quad \omega_\nu^2 + \alpha^2 \left(\kappa^2 + N^2/2\right) > 0. \qquad (23)$$

Как видно, вязкая плазма неустойчива из-за эффекта плавучести, если радиальные градиенты давления и энтропии имеют одинаковый знак, т. е. в ситуации, когда плазма конвективно неустойчива в идеальном приближении в отсутствие вращения. Эта неустойчивость связана с тепловой стратификацией плазмы. Если же плазма устойчива по отношению к тепловой стратификации ($N^2 > 0$), то эффект плавучести и вязкость играют стабилизирующую роль и, согласно второму неравенству в (23), гидродинамическая неустойчивость возникает при радиальных профилях угловой скорости, спадающих с радиусом еще более круто, чем следует из критерия Рэлея, $\Omega \propto r^{-2}$.

В случае идеальной плазмы условие устойчивости описывается хорошо известным неравенством

$$\kappa^2 + N^2 > 0, \qquad (24)$$

которое означает, что дифференциальное вращение при $\kappa^2 > 0$ может оказывать стабилизирующее влияние на плазму, неустойчивую из-за эффекта плавучести (в случае $N^2 < 0$).

При наличии внешнего магнитного поля, считая резистивность плазмы пренебрежимо малой, $P_m \gg 1$, положим $\omega_\eta = 0$ в уравнении (15). В результате порядок дисперсионного уравнения понижается и оно принимает вид

$$\left[\gamma(\gamma+\omega_\nu) + \omega_A^2\right]^2 + \alpha^2\kappa^2\left(\gamma^2+\omega_A^2\right) + \\ + \alpha^2 N^2\left[\gamma(\gamma+\omega_\nu)+\omega_A^2\right] - 4\alpha^2\omega_A^2\Omega^2 = 0. \qquad (25)$$

Для дальнейшего анализа устойчивости перепишем левую часть уравнения (25) в виде характеристического многочлена четвертой степени:

$$f(\gamma) \equiv \gamma^4 + a_1\gamma^3 + a_2\gamma^2 + a_3\gamma + a_4 = 0, \qquad (26)$$

где

$$\begin{aligned} &a_1 = 2\omega_\nu, \quad a_3 = \left(2\omega_A^2 + \alpha^2 N^2\right)\omega_\nu, \\ &a_2 = \omega_\nu^2 + 2\omega_A^2 + \alpha^2(\kappa^2+N^2), \\ &a_4 = \left(\omega_A^2 + \alpha^2(\kappa^2+N^2) - 4\alpha^2\Omega^2\right)\omega_A^2. \end{aligned} \qquad (27)$$

Применяем критерий Льенара–Шипара к уравнению (26). Из этого критерия следует, что необходимое и достаточное условие устойчивости рассматриваемых возмущений обеспечивается положительностью всех коэффициентов многочлена $f(\gamma)$, $a_i > 0$, $i = 1$–4, и определителей Гурвица $T_3 > 0$, $T_1 = a_1 > 0$. Здесь

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2 a_4. \qquad (28)$$

Положительность величин $a_1$ и $T_1$ следует автоматически из их определения. Из условий $a_3 > 0$ и $a_4 > 0$ получаем

$$2\omega_A^2 + \alpha^2 N^2 > 0, \qquad (29)$$

$$\omega_A^2 + \alpha^2(\kappa^2+N^2) - 4\alpha^2\Omega^2 > 0. \qquad (30)$$

Неравенство (30) соответствует критерию устойчивости идеальной вращающейся стратифицированной плазмы или жидкости [5, 10, 11]. При выполнении неравенства (30) в силу неотрицательности $\omega_\nu^2$ автоматически следует выполнение неравенства $a_2 > 0$. Наконец, условие $T_3 > 0$ записывается в виде

$$2\omega_\nu^2(2\omega_A^2 + \alpha^2N^2) + 16\alpha^2\Omega^2\omega_A^2 + \\ + \alpha^4 N^2(2\kappa^2 + N^2) > 0. \qquad (31)$$

В общем случае система неравенств (29)–(31) определяет необходимое и достаточное условие устойчивости течения вязкой плазмы по отношению к осесимметричным возмущениям.

Очевидно, что если $N^2 > 0$, а профиль угловой скорости вращения плазмы более пологий, чем $\Omega \propto 1/r^2$ ( $\kappa^2 > 0$), то неравенства (29) и (31) выполняются автоматически. Критерий устойчивости дается неравенством (30), т. е. сводится к критерию устойчивости идеальной плазмы. Таким образом, в этом случае вязкость не влияет на критерий устойчивости течения плазмы.

В отличие от гидродинамического случая в отсутствие магнитного поля, согласно уравнению (29), в принципе, допускаются устойчивые течения плазмы при $N^2 < 0$. Это возможно благодаря стабилизирующему влиянию внешнего магнитного поля на неустойчивость, обусловленную стратификацией плазмы.

## 4. ВЛИЯНИЕ РЕЗИСТИВНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

Полагаем вязкость пренебрежимо малой, $P_m \ll \ll 1$, и пренебрегаем ее влиянием в дисперсионном уравнении (15). В этом предельном случае оно сводится к виду

$$\gamma\left\{\left[\gamma(\gamma+\omega_\eta)+\omega_A^2\right]^2+\alpha^2\left[(\gamma+\omega_\eta)^2+\omega_A^2\right]\kappa^2-\right.$$
$$\left.-\,4\alpha^2\omega_A^2\Omega^2\right\}+\alpha^2N^2(\gamma+\omega_\eta)\times$$
$$\times\left[\gamma(\gamma+\omega_\eta)+\omega_A^2\right]=0. \quad (32)$$

Таким образом, имеем уравнение пятой степени относительно $\gamma$, которое в целях дальнейшего анализа устойчивости перепишем в виде

$$f(\gamma)\equiv\gamma^5+a_1\gamma^4+a_2\gamma^3+a_3\gamma^2+a_4\gamma+a_5=0, \quad (33)$$

где

$$\begin{gathered}a_1=2\omega_\eta,\quad a_2=\omega_\eta^2+2\omega_A^2+\alpha^2(\kappa^2+N^2),\\ a_3=2\omega_\eta\left[\omega_A^2+\alpha^2(\kappa^2+N^2)\right],\ a_5=\alpha^2N^2\omega_\eta\omega_A^2,\\ a_4=\omega_A^4+\alpha^2(\omega_A^2+\omega_\eta^2)(\kappa^2+N^2)-4\alpha^2\Omega^2\omega_A^2.\end{gathered} \quad (34)$$

Для получения необходимого и достаточного условия устойчивости снова воспользуемся критерием Льенара–Шипара, который в данном случае записывается в виде

$$a_i>0,\quad i=1\text{–}5,\quad T_2>0,\quad T_4>0. \quad (35)$$

Здесь $T_2$ и $T_4$ — определители Гурвица,

$$T_2=\begin{vmatrix}a_1&1\\a_3&a_2\end{vmatrix}=a_1a_2-a_3,$$
$$T_4=\begin{vmatrix}a_1&1&0&0\\a_3&a_2&a_1&1\\a_5&a_4&a_3&a_2\\0&0&a_5&a_4\end{vmatrix}= \quad (36)$$
$$=a_4\left\{a_3(a_1a_2-a_3)-a_1^2a_4+2a_1a_5\right\}-$$
$$-a_5\left\{a_2(a_1a_2-a_3)+a_5\right\}.$$

Подставляя в (35) и (36) коэффициенты $a_i$ из (34), из условия $a_5>0$ получаем

$$N^2>0. \quad (37)$$

Это означает, что, подобно вязкой плазме в отсутствие магнитного поля, резистивная плазма, находящаяся во внешнем магнитном поле, неустойчива из-за эффекта плавучести, если ее давление и энтропия одновременно либо возрастают, либо убывают в радиальном направлении.

Условие $a_4>0$ записывается в виде

$$\omega_A^4+\alpha^2(\omega_A^2+\omega_\eta^2)(\kappa^2+N^2)-4\alpha^2\Omega^2\omega_A^2>0. \quad (38)$$

Несложно убедиться, что при выполнении неравенства (38) автоматически выполняются неравенства $a_2>0$ и $a_3>0$. Также автоматически выполняется неравенство

$$T_2\equiv2\omega_\eta(\omega_A^2+\omega_\eta^2)>0.$$

Кроме того, по определению, $a_1>0$. Последнее из условий, которое требуется удовлетворить ($T_4>0$), после подстановки в выражение (36) значений коэффициентов $a_i$ приводится к виду

$$(2\omega_\eta^2+8\alpha^2\Omega^2+\alpha^2N^2)(2a_4-\alpha^2N^2\omega_A^2)-$$
$$-\,2\alpha^2N^2(\omega_A^2+\omega_\eta^2)^2>0. \quad (39)$$

Очевидно, что при выполнении неравенств (37) и (39) автоматически удовлетворяется и условие $a_4>0$. Таким образом, необходимое и достаточное условие устойчивости вращающейся резистивной плазмы определяется неравенством (37) вкупе с дополнительным условием, следующим из неравенства (39),

$$(2\omega_\eta^2+8\alpha^2\Omega^2+\alpha^2N^2)\left\{\omega_A^4+\alpha^2(\omega_A^2+\omega_\eta^2)(\kappa^2+N^2)-\right.$$
$$\left.-\,4\alpha^2\Omega^2\omega_A^2-\alpha^2N^2\omega_A^2/2\right\}-$$
$$-\,\alpha^2N^2(\omega_A^2+\omega_\eta^2)^2>0. \quad (40)$$

В пренебрежении плавучестью условие (40) воспроизводит хорошо известный результат о стабилизирующем влиянии резистивности справа от линии Рэлея (при $\kappa^2>0$). Этому эффекту соответствует член в фигурных скобках, пропорциональный $\omega_\eta^2$. Сравнивая неравенство (40) с критерием (30) устойчивости идеальной плазмы при учете плавучести, приходим к выводу, что наряду с упомянутым стабилизирующим эффектом, который усиливается при $N^2>0$, при наличии стратификации резистивность плазмы приводит и к дестабилизирующим эффектам, которым соответствуют последний член в фигурных скобках, а также последний член в левой части неравенства (40). Очевидно, что при $\Omega\approx\omega_A\approx N$ в случае слабой резистивности, $\omega_\eta\ll\omega_A$, дестабилизирующее влияние резистивности превалирует и суммарное влияние резистивности на устойчивость осесимметричных возмущений резистивной плазмы является дестабилизирующим. В общем случае результирующее влияние резистивности определяется конкуренцией указанных эффектов.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получено дисперсионное уравнение мелкомасштабных осесимметричных возмущений вращающейся плазмы, находящейся в аксиальном внешнем магнитном поле, в котором одновременно учитываются эффекты диссипации плазмы (вязкость и резистивность) и ее радиальной тепловой стратификации (эффект плавучести). Это дисперсионное уравнение обобщает ранее изучавшиеся дисперсионное уравнение диссипативной несжимаемой жидкости [6, 7, 9], дополняя его эффектом, обусловленным плавучестью, и дисперсионное уравнение бездиссипативной (идеальной) плазмы [10, 11], дополняя его эффектами, обусловленными вязкостью и резистивностью плазмы.

Из полученного общего дисперсионного уравнения с использованием критерия устойчивости Льенара – Шипара найдены критерии устойчивости плазмы в предельных случаях больших ($P_m \gg 1$) и малых ($P_m \ll 1$) значений магнитного числа Прандтля.

В первом предельном случае можно пренебречь резистивностью плазмы. Показано, что в чисто гидродинамическом случае (в отсутствие магнитного поля) вязкое течение плазмы неустойчиво из-за эффекта плавучести, если радиальные градиенты давления и энтропии имеют одинаковый знак, так что $N^2 < 0$. В отличие от случая идеальных течений плазмы, эта неустойчивость не подавляется дифференциальным вращением плазмы путем подбора такого профиля вращения, для которого выполнялось бы неравенство (24). Магнитное поле играет стабилизирующую роль, и при его наличии плазма с $N^2 < 0$ может быть устойчивой при выполнении условия (29). При этом для устойчивости необходимо, чтобы профили угловой скорости вращения плазмы удовлетворяли условиям (30) и (31). При $N^2 > 0$ и профилях угловой скорости вращения, для которых $\kappa^2 > 0$, критерий устойчивости сводится к критерию устойчивости идеальной (бездиссипативной) плазмы.

В противоположном предельном случае вязкость плазмы пренебрежимо мала. Подобно случаю вязкой плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля азимутальное течение резистивной плазмы в аксиальном магнитном поле неустойчиво из-за эффекта плавучести, если ее давление и энтропия одновременно либо возрастают, либо уменьшаются в радиальном направлении. В явном виде влияние резистивности на условие устойчивости плазмы дается уравнением (40). В общем случае резистивность дает как стабилизирующие, так и дестабилизирующие члены в критерий устойчивости. В случае слабой диссипации результирующий вклад резистивности в условие устойчивости является дестабилизирующим.

Отметим, что в случае, когда эффекты резистивности и вязкости сравнимы по величине, $P_m \approx 1$, необходимым, но не достаточным, условием устойчивости азимутального течения плазмы в аксиальном магнитном поле является положительность квадрата частоты Брунта – Вяйсяля $N^2$, что имеет место в случае, когда знаки радиальных градиентов ее давления и энтропии противоположны.

Работа (частично) проведена в рамках реализации Федеральной целевой программы «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2009–2012 гг., а также частично поддержана РФФИ (гранты №№ 07-02-00441, 10-02-01302).

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Balbus and J. F. Hawley, Rev. Mod. Phys. **70**, 1 (1998).
2. S. A. Balbus, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **41**, 555 (2003).
3. А. Б. Михайловский, Дж. Г. Ломинадзе, А. П. Чуриков и др., Физика плазмы **35**, 307 (2009).
4. Е. П. Велихов, ЖЭТФ **36**, 1398 (1959).
5. S. A. Balbus and J. F. Hawley, Astrophys. J. **376**, 214 (1991).
6. H. Ji, J. Goodman, and A. Kageyama, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **325**, L1 (2001).
7. K. Noguchi, V. I. Pariev, S. A. Colgate et al., Astrophys. J. **575**, 1151 (2002).
8. G. Rüdiger and Y. Zhang, Astron. Astroph. **378**, 302 (2001).
9. E. P. Velikhov, A. A. Ivanov, V. P. Lakhin et al., Phys. Lett. A **356**, 357 (2006).
10. S. A. Balbus and J. F. Hawley, Astrophys. J. **573**, 749 (2002).
11. R. Narayan, E. Quataert, I. V. Igumenshchev et al., Astrophys. J. **577**, 295 (2002).
12. K. Noguchi and V. I. Pariev, AIP Conf. Proc. **692**, 285 (2003).
13. Z. Wang, J. Si, W. Liu et al., Phys. Plasmas **15**, 102109 (2008).
14. Ф. Р. Гантмахер, *Лекции по аналитической механике*, Наука, Москва (1966).