

К ТЕОРИИ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЕ

*М. В. Кузелев**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 октября 2009 г.

Получены квантовые нелинейные уравнения ленгмюровских волн в изотропной электронной бесстолкновительной плазме. Дан общий анализ дисперсионных уравнений для комплексных спектров ленгмюровских волн и волн Ван Кампена в квантовой плазме с произвольным распределением электронов по импульсам. Исследовано квантовое нелинейное бесстолкновительное затухание Ландау в максвелловской и вырожденной плазмах. Показано, что из-за квантовой поправки в условии черенковского поглощения имеет место бесстолкновительное затухание ленгмюровских волн (в том числе и нулевого звука) в вырожденной плазме, что является чисто квантовым эффектом. Найдены решения квантового дисперсионного уравнения для случая вырожденной плазмы.

1. ОПИСАНИЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЫ

Квантовая линейная теория ленгмюровских волн в вырожденной плазме изложена в монографии [1]. В книге [2] показано, что область применимости некоторых из известных квантовых спектров плазменных волн ограничена теми областями параметров плазмы, в которых квантовые эффекты малы. Вместе с тем интерес к квантовым эффектам в теории плазменных колебаний в последние годы возрос [3, 4]. Нелинейные же явления в квантовой теории плазмы до настоящего времени практически не рассматривались. Недостаточно с нашей точки зрения исследовано и квантовое бесстолкновительное затухание плазменных волн. В данной работе означенные вопросы квантовой теории плазмы рассмотрены для потенциальных ленгмюровских волн в изотропной газовой плазме. Начнем изложение с формулировки используемых нами общих уравнений квантовой теории плазмы.

В разреженной газовой плазме взаимодействие частиц осуществляется посредством самосогласованного поля, а столкновения отсутствуют. При этом каждой частице можно сопоставить волновую функцию $\psi(t, \mathbf{r})$. В отсутствие самосогласованного

поля волновая функция есть волна де Бройля

$$\psi(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}_0) = \exp\left(-i\frac{E_0}{\hbar}t + i\frac{1}{\hbar}\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}\right), \quad (1.1)$$

$$E_0 = \frac{p_0^2}{2m},$$

где \mathbf{p}_0 — импульс, E_0 — энергия частицы. При наличии поля волновая функция определяется из уравнения Шредингера, а функция (1.1) может рассматриваться как начальное (при $t = 0$ или при $t \rightarrow -\infty$) условие для этого уравнения. При этом волновая функция частицы оказывается однозначно определенной во все последующие моменты времени и может быть записана в виде

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \psi(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}_0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}\right) \tilde{\psi}(t, \mathbf{r}). \quad (1.2)$$

Уравнение Шредингера описывает рассеяние (или дифракцию) волны де Бройля на электромагнитных потенциалах самосогласованного поля, чему и соответствует выражение (1.2). Параметрическая зависимость волновой функции $\psi(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}_0)$ от \mathbf{p}_0 отражает тот факт, что состояние частицы во все последующие моменты времени однозначно определяется ее импульсом \mathbf{p}_0 в невозмущенном состоянии (функция $\tilde{\psi}(t, \mathbf{r})$ тоже зависит от \mathbf{p}_0).

Волновой функции $\psi(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}_0)$ недостаточно для описания состояния плазмы. Еще имеется статистическое распределение частиц по импульсам, которое задается функцией распределения $f_0(\mathbf{p}_0)$, имеющей

*E-mail: kuzelev@mail.ru

такой же смысл, как и при классическом описании плазмы. Квантовое описание, учитывающее вероятностный характер распределения состояний частиц, может быть осуществлено при помощи одночастичной матрицы плотности [5, 6], которую определим формулой [6]

$$\rho(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int f_0(\mathbf{p}_0) \psi^*(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}_0) \psi(t, \mathbf{r}'; \mathbf{p}_0) d\mathbf{p}_0. \quad (1.3)$$

Любые макроскопические физические величины, характеризующие плазму (см. ниже формулы (1.6)), вычисляются через матрицу плотности следующим образом:

$$L(t, \mathbf{r}) = \hat{L}' \rho(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}} = \int f_0(\mathbf{p}_0) \psi^*(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}_0) \hat{L}' \psi(t, \mathbf{r}'; \mathbf{p}_0) d\mathbf{p}_0|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}, \quad (1.4)$$

где \hat{L}' — оператор физической величины L , действующий только на координату \mathbf{r}' . Среднее значение от величины (1.4) $\langle L(t, \mathbf{r}) \rangle$ (см. ниже формулу (1.7)) содержит как квантовомеханическое усреднение, так и статистическое усреднение по функции распределения. Поскольку волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера, функция (1.3) удовлетворяет известному уравнению для матрицы плотности [5]. Плазма состоит из частиц разного сорта, поэтому приведенные выше выражения и уравнения должны записываться для частиц каждого из сортов. Мы этого не делаем, поскольку рассматриваем только электронную плазму, а движение других частиц плазмы не учитываем.

С помощью интегрального преобразования матрицы плотности можно ввести квантовую функцию распределения в представлении Вигнера [1, 7]:

$$f_W(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{r}_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0\right) \times \rho\left(t, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_0}{2}, \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}_0}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \times \iint f_0(\mathbf{p}_0) \psi^*\left(t, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_0}{2}; \mathbf{p}_0\right) \psi\left(t, \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}_0}{2}; \mathbf{p}_0\right) \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0\right) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0. \quad (1.5)$$

Используя известные из квантовой механики формулы для плотностей заряда и тока частиц с волновой функцией $\psi(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}_0)$, из выражения (1.3) и представления (1.5) определяем плотности заряда и тока электронов плазмы:

$$\begin{aligned} \rho_e(t, \mathbf{r}) &= en_{0e} \int f_0(\mathbf{p}_0) |\psi(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}_0)|^2 d\mathbf{p}_0 = \\ &= en_{0e} \int f_W(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \\ \mathbf{J}_e(t, \mathbf{r}) &= en_{0e} \frac{i\hbar}{2m} \times \\ &\times \int f_0(\mathbf{p}_0) \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{r}} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \right) d\mathbf{p}_0 = \\ &= en_{0e} \frac{1}{m} \int p f_W(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь e , m — заряд и масса электрона, n_{0e} — невозмущенная плотность электронов плазмы, а функции распределения $f_0(\mathbf{p}_0)$ и $f_W(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ нормированы на единицу. То, что в формулы (1.6) входит величина n_{0e} — среднее число электронов в единице объема, а функции распределения нормированы на единицу, определяет и нормировку волновой функции:

$$\begin{aligned} \langle \psi(t, \mathbf{r}) \psi^*(t, \mathbf{r}) \rangle &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{V} \iint_V \psi(t, \mathbf{r}) \psi^*(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где V — некоторый достаточно большой объем, уточняемый ниже.

Введение волновой функции (1.2), однозначно определяемой начальным состоянием электрона, предполагает отсутствие столкновений, носящих случайный характер и приводящих к хаотическим сбоям фазы волновой функции. Ситуация вполне аналогична той, что имеет место при классическом описании бесстолкновительной плазмы в теории Власова, где состояние электрона во все последующие моменты времени однозначно определяется его координатой \mathbf{r}_0 и импульсом \mathbf{p}_0 при $t = 0$. Известно, что решение уравнения Власова для одночастичной функции распределения можно представить в виде [8]

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \iint f_0(\mathbf{p}_0) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)] \times \delta[\mathbf{p} - \mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)] d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ и $\mathbf{P}(t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ — решения уравнений Ньютона, дополненных начальными условиями $\mathbf{R}(t = 0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{P}(t = 0) = \mathbf{p}_0$. Функция распределения (1.8) является классическим аналогом квантовой функции распределения (1.5).

Отсутствие столкновений в плазме означает малость газового параметра, который будем записывать в виде

$$\eta = \frac{\hbar\omega_{Le}}{\varepsilon_0} \leq \frac{\hbar\omega_{Le}}{\varepsilon_F} \approx \left(\frac{e^2}{(r)\varepsilon_F} \right)^{1/2} \ll 1, \quad (1.9)$$

где $\varepsilon_0 = mV_0^2/2$, V_0 — средняя скорость хаотического движения электронов плазмы, ε_F — энергия Ферми, $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n_{0e}/m}$ — электронная ленгмюровская частота, $\langle r \rangle = n_{0e}^{-1/3}$ — среднее расстояние между электронами. Малость параметра (1.9) должна учитываться при рассмотрении квантовых эффектов в плазме [2].

В квантовой теории плазмы, а также в теории квантовых жидкостей [9, 10] газовый параметр часто определяют через амплитуду рассеяния f [5], а именно: $\eta' \sim |f|/r_0$, где r_0 — размер области, вне которой взаимодействием частиц можно пренебречь. В электронной плазме потенциалом взаимодействия является экранированный кулоновский потенциал, поэтому r_0 есть дебаевский радиус электронов $r_{De} \approx V_0/\omega_{Le}$. При выполнении неравенства (1.9) газовый параметр, выраженный через амплитуду рассеяния, определяется формулой [5]

$$\eta' = \frac{\hbar}{mV_0 r_B} \approx \frac{r_{De}}{r_B} \eta, \quad (1.10)$$

где $r_B = \hbar^2/e^2 m$ — боровский радиус. Если электроны вырожденные, то $r_{De}/r_B \approx (\langle r \rangle/r_B)^{1/2}$, при отсутствии вырождения отношение r_{De}/r_B будет больше. Таким образом условие $\eta' \ll 1$ как условие применимости газового приближения является более жестким, чем условие (1.9). Только в достаточно плотной плазме (например, в электронной плазме металлов) параметры η и η' практически эквивалентны. В настоящей работе используется газовый параметр (1.9) только по той причине, что он естественным образом возникает в излагаемой ниже квантовой теории ленгмюровских волн.

Уравнение Шредингера совместно с уравнениями поля и формулы (1.3), (1.6) и (1.7) являются основой для дальнейшего изложения. Будет рассчитываться также и вигнеровская функция распределения (1.5) (усредненная), хотя непосредственно для излагаемой теории ленгмюровских волн в плазме она не требуется.

2. КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

Из уравнения Шредингера, уравнения Пуассона и первого выражения (1.6) следует, что в потенциальном приближении возмущения равновесного состояния электронной плазмы описываются уравнениями

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = e\varphi \psi, \quad (2.1)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi e n_{0e} \int f_0(\mathbf{p}_0) |\psi(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}_0)|^2 d\mathbf{p}_0.$$

Интересуясь малыми волновыми возмущениями, представим скалярный потенциал в виде

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\tilde{\varphi}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \tilde{\varphi}^*(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})). \quad (2.2)$$

Волна де Бройля (1.1) рассеивается на периодическом потенциале (2.2), и в результате волновая функция электрона оказывается следующей (см. (1.2)):

$$\begin{aligned} \psi(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}_0) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}\right) \times \\ &\times (A_0(t) + A_-(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \\ &+ A_+(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) = \\ &= A_0(t) \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + A_-(t) \exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}] + \\ &+ A_+(t) \exp[i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}]. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Здесь для удобства введен волновой вектор $\mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_0/\hbar$ волны де Бройля электрона в невозмущенном состоянии. То, что волновая функция имеет структуру (2.3) есть чисто математический результат. Действительно, уравнение Шредингера с потенциалом (2.2) является дифференциальным уравнением с периодическим коэффициентом. Решение такого уравнения, как известно [11], имеет вид (1.2), где

$$\tilde{\psi}(t, \mathbf{r}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s(t) \exp(is\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (2.4)$$

В выражении (2.3), основываясь на малости возмущений в плазме, учтены только три основных слагаемых в разложении (2.4) (параметр малости будет указан ниже в разд. 5). Заметим, что амплитуды A_s помимо времени зависят еще и от \mathbf{p}_0 , т. е. $A_s = A_s(t, \mathbf{p}_0) = A_s(t, \mathbf{k}_0)$.

Подстановка (2.2) и (2.3) в уравнения (2.1) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dt} + i\omega_0 A_0 &= -\frac{i}{2\hbar} e (\tilde{\varphi} A_- + \tilde{\varphi}^* A_+), \\ \frac{dA_-}{dt} + i\omega_- A_- &= -\frac{i}{2\hbar} e \tilde{\varphi}^* A_0, \\ \frac{dA_+}{dt} + i\omega_+ A_+ &= -\frac{i}{2\hbar} e \tilde{\varphi} A_0, \\ k^2 \tilde{\varphi} &= 8\pi e n_{0e} \int f(\mathbf{p}_0) (A_0 A_-^* + A_0^* A_+) d\mathbf{p}_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\hbar k_0^2}{2m} = \frac{m\mathbf{v}_0^2}{2\hbar}, \\ \omega_- &= \frac{\hbar(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})^2}{2m} = \omega_0 + \omega_{\hbar} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0, \\ \omega_+ &= \frac{\hbar(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})^2}{2m} = \omega_0 + \omega_{\hbar} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0/m$ — скорость электрона, $\omega_{\hbar} = \hbar k^2/2m$ — важная для дальнейшего квантовая частота. При получении уравнений (2.5) предполагалась ортогональность функций $\exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})$ и $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, что задает объем V в нормировочном соотношении (1.7).

Волновая функция (2.3) (или более общая функция (1.2) и (2.4)) является суммой волн де Бройля — первичной волны и рассеянных волн. Поэтому величины $|A_s|^2$ определяют плотности вероятности того, что импульс электрона равен $\mathbf{p}_0 + s\hbar\mathbf{k}$, $s = 0, \pm 1, \dots$. Как видим, импульс электрона меняется при взаимодействии с полем (2.2) дискретно, на величину, кратную $\hbar\mathbf{k}$. При этом меняется и число электронов (оно пропорционально $f(\mathbf{p}_0)|A_s(t, \mathbf{p}_0)|^2$) с тем или иным значением импульса. Из первых трех уравнений системы (2.5) и формулы (1.7) следует соотношение

$$|A_0(t, \mathbf{p}_0)|^2 + |A_-(t, \mathbf{p}_0)|^2 + |A_+(t, \mathbf{p}_0)|^2 = 1, \quad (2.7)$$

отражающее сохранение плотности вероятности, а в итоге — сохранение полного числа электронов.

В качестве функции распределения электронов квантовой плазмы по импульсам следует взять усредненную функцию Вигнера $f(t, \mathbf{p}) = \langle f_W(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle$, где усреднение по пространству такое же, как в (1.7). Используя формулы (1.3), (1.5) и (2.3), для функции распределения находим следующее выражение:

$$\begin{aligned} f(t, \mathbf{p}) &= f_0(\mathbf{p})|A_0(t, \mathbf{p})|^2 + f_0(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}) \times \\ &\times |A_-(t, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k})|^2 + f_0(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})|A_+(t, \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})|^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если при $t = 0$ возмущения в плазме отсутствуют, то $A_0(0) = 1$ и $A_{\pm}(0) = 0$, поэтому имеем $f(0, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p})$. Физический смысл соотношения (2.8) следующий: число электронов с импульсом \mathbf{p} в первую очередь определяется амплитудой $A_0(t, \mathbf{p})$ (первое слагаемое в правой части (2.8)), а кроме того, число электронов с импульсом \mathbf{p} возрастает, когда электроны с импульсом $\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}$ отдают квант (второе слагаемое) или когда электроны с импульсом $\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}$ получают квант (третье слагаемое). С учетом интеграла (2.7) видим, что нормировка функции (2.8) сохраняется и совпадает с нормировкой функции $f_0(\mathbf{p})$.

При выполнении неравенства $\hbar k \ll \Delta p$, где Δp — характерная ширина функции $f_0(\mathbf{p})$, выражение (2.8) с учетом (2.7) преобразуется к виду

$$f(t, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p}) + \hbar k \frac{df_0}{d\mathbf{p}} (|A_-(t)|^2 - |A_+(t)|^2). \quad (2.9)$$

Уравнения (2.5) являются нелинейными. В частности, они учитывают обратное воздействие поля ленгмюровской волны на распределение электронов плазмы по импульсам. Однако нелинейность уравнений (2.5) должна быть малой (параметр малости уточняется ниже при обсуждении формулы (5.5)), поскольку при выводе уравнений (2.5) в разложении (2.4) были оставлены только три члена. Такое нелинейное явление как захват электрона полем (2.2) уравнения (2.5) не описывают.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЕ

Прежде чем приступить к решению уравнений (2.5), проанализируем их в линейном приближении. Как видно из первого уравнения системы (2.5), в линейном приближении имеем $A_0 = \exp(-i\omega_0 t)$. Тогда, полагая

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= b \exp(-i\omega t), \quad A_- = a_- \exp[-i(\omega_0 - \omega)t], \\ A_+ &= a_+ \exp[-i(\omega_0 + \omega)t] \end{aligned} \quad (3.1)$$

и исключая постоянную b , из уравнений (2.5) получаем систему однородных интегральных уравнений второго рода относительно функций $a_{\pm}(\mathbf{p})$ (переменную интегрирования \mathbf{p}_0 для удобства заменяем на \mathbf{p}):

$$\begin{aligned} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega_{\hbar})a_-(\mathbf{p}) &= \\ &= -\frac{\omega_{Le}^2}{2\omega_{\hbar}} \int f_0(\mathbf{p}) [a_-(\mathbf{p}) + a_+(\mathbf{p})] d\mathbf{p}, \\ (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_{\hbar})a_+(\mathbf{p}) &= \\ &= \frac{\omega_{Le}^2}{2\omega_{\hbar}} \int f_0(\mathbf{p}) [a_-(\mathbf{p}) + a_+(\mathbf{p})] d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Условие разрешимости системы (3.2) является следующее дисперсионное уравнение для определения частоты ω продольных ленгмюровских колебаний квантовой плазмы:

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) \equiv 1 - \omega_{Le}^2 \int \frac{f_0(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 - \omega_{\hbar}^2} = 0. \quad (3.3)$$

Интегрирование в правой части (3.3) осуществляется по контуру, определяемому правилом Ландау

[12]. Левая часть дисперсионного уравнения (3.3) $\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})$ есть продольная диэлектрическая проницаемость электронной квантовой плазмы. Не сложно придать этой диэлектрической проницаемости и другую, более известную, форму записи [1, 2]:

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{2\omega_{\hbar}} \times \int \frac{f_0(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}/2) - f_0(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}/2)}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{p}. \quad (3.4)$$

Для общего анализа и последующего решения дисперсионное уравнение (3.3) удобно преобразовать. Перейдем от интегрирования по импульсу к интегрированию по скорости \mathbf{v} , координатную ось z направим вдоль вектора \mathbf{k} , т.е. положим $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$, и выполним интегрирование по v_x и v_y . В результате получим

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_0(v_z) dv_z}{(v_z - v_1)(v_z - v_2)} = = i\pi \frac{\omega_{Le}^2}{k^2} \frac{\tilde{f}_0(v_1) - \tilde{f}_0(v_2)}{\omega_{\hbar}/k}. \quad (3.5)$$

Здесь $v_{1,2} = \omega/k \pm \omega_{\hbar}/k$, а $\tilde{f}_0(v_z)$ — функция, получающаяся интегрированием функции $f_0(v)$ по v_x и v_y . Интегрирование в (3.5) осуществляется вдоль действительной оси. Правая часть уравнения (3.5) описывает бесстолкновительное затухание волн в квантовой плазме. Электроны, у которых $v_z \approx v_1$, излучают плазменную волну. Механизмом является черенковское излучение. Электроны, у которых $v_z \approx v_2$, поглощают плазменную волну. В квантовой плазме, как и в классическом случае, бесстолкновительное затухание обусловлено конкуренцией процессов излучения и поглощения. При $\omega_{\hbar} \rightarrow 0$ квантовое дисперсионное уравнение переходит в классическое дисперсионное уравнение плазменных волн теории Власова–Ландау [12].

Если правая часть уравнения (3.5) мала, то для мнимой части частоты справедливо следующее выражение:

$$\text{Im } \omega = i \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{Le}^2}{k^2} \left(\frac{\partial D(\omega_0)}{\partial \omega} \right)^{-1} \times \times \frac{\tilde{f}_0(\omega_0/k + \omega_{\hbar}/k) - \tilde{f}_0(\omega_0/k - \omega_{\hbar}/k)}{\omega_{\hbar}/k}, \quad (3.6)$$

где ω_0 — действительная часть частоты, а $D(\omega)$ — левая часть уравнения (3.5). В классическом пределе из (3.6) получается известная формула для декремента затухания Ландау ленгмюровских волн [12].

Для вычисления частоты ω_0 следует конкретизировать функцию распределения $f_0(\mathbf{v})$. Для случая вырожденной плазмы это будет сделано далее в разд. 6 настоящей работы (см. также [1, 2, 10]). Пока же не будем конкретизировать функцию распределения, а исследуем в общем виде роль квантовых поправок в спектрах ленгмюровских волн.

Из уравнения (3.3) видно, что для сравнения квантовых и «тепловых» поправок в спектрах следует сопоставить частоты ω_{\hbar} и kV_0 . В случае максвелловской плазмы $V_0 = V_{Te}$, а в случае вырожденной плазмы $V_0 = V_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar n_{0e}^{1/3} / m$, где V_{Te} — тепловая скорость электронов, V_F — скорость Ферми. Скорость V_0 не может быть меньше скорости Ферми, поэтому, проводя оценки, считаем плазму вырожденной. Тогда имеем

$$\frac{\omega_{\hbar}}{kV_0} \leq \frac{\omega_{\hbar}}{kV_F} \approx \frac{\langle r \rangle}{\lambda}, \quad (3.7)$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина ленгмюровской волны. В случае ленгмюровских волн, обусловленных нарушением квазинейтральности в объемах, содержащих большое число частиц, отношение (3.7) мало по определению. Поэтому квантовая поправка в спектре ленгмюровских волн всегда меньше «тепловой» поправки, обусловленной хаотическим движением электронов плазмы.

Роль квантовых поправок в спектрах ленгмюровских волн помимо (3.7) характеризуется еще и следующей величиной:

$$\frac{\omega_{\hbar}}{\omega_{Le}} \approx \frac{\langle r \rangle^2}{\eta \lambda^2}, \quad (3.8)$$

где η — малый газовый параметр (1.9). Таким образом квантовая частота в принципе может превосходить электронную ленгмюровскую частоту. Однако в максвелловской плазме это не совсем так. Действительно, из-за малости отношения (3.7) имеет место неравенство $\omega_{\hbar} < kV_{Te}$, но одновременно должно быть $kV_{Te} < \omega_{Le}$, так как в противном случае ленгмюровские волны в плазме фактически не существуют из-за их сильного затухания Ландау (см. разд. 5). Поэтому в максвелловской плазме слабозатухающие ленгмюровские волны возможны только при $\omega_{\hbar} < kV_{Te} < \omega_{Le}$, когда квантовые эффекты малы. Однако в вырожденной плазме, где затухание ленгмюровских волн согласно классической теории отсутствует и при $kV_F > \omega_{Le}$ (нулевой звук), возможны случаи, когда параметр (3.8) не является малым. В дальнейшем для конкретных функций распределения мы исследуем спектры квантовых ленгмюровских волн в плазме как с помощью дисперси-

онного уравнения (3.5), см. разд. 6, так и путем спектрального анализа решений нелинейных уравнений (2.5), см. разд. 5.

4. КВАНТОВЫЕ ВОЛНЫ ВАН КАМПЕНА

Помимо обычных ленгмюровских волн, обусловленных коллективными движениями электронов в самосогласованном поле, в плазме имеются и одночастичные возмущения, представляющие собой моноскоростные электронные пучки. Такие возмущения известны как баллистические моды, или псевдоволны [13]. Роль псевдоволн в плазме велика, поскольку их взаимодействие с обычными (коллективными) волнами плазмы лежит в основе многих резонансных явлений волна–частица (затухание Ландау, черенковское излучение, плазменный резонанс и т. д.). С псевдоволнами связаны и известные волны Ван Кампена [14, 15]. Рассмотрим волны Ван Кампена в квантовой плазме.

Осуществляя подстановку (3.1), преобразуем лиnearизованную систему уравнений (2.5) к виду

$$\begin{aligned} (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega_h) a_-(\mathbf{p}) &= -\frac{e}{2\hbar} b^*, \\ (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_h) a_+(\mathbf{p}) &= \frac{e}{2\hbar} b, \\ b &= \frac{8\pi en_0 e}{k^2} \int f_0(\mathbf{p}) [a_-(\mathbf{p}) + a_+(\mathbf{p})] d\mathbf{p}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Решение первых двух уравнений запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} a_-(\mathbf{p}) &= -\frac{e}{2\hbar} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega_h} b^* - \\ &\quad - C_- \frac{e}{2\hbar} b^* \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega_h), \\ a_+(\mathbf{p}) &= \frac{e}{2\hbar} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_h} b + \\ &\quad + C_+ \frac{e}{2\hbar} b \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_h). \end{aligned} \tag{4.2}$$

В выражениях (4.2) вторые слагаемые описывают моноскоростные электронные пучки, интенсивность которых определяется произвольными постоянными C_{\mp} . Подставляя решения (4.2) в последнее уравнение системы (4.1), находим дисперсионное уравнение волн Ван Кампена

$$1 = \frac{\omega_{Le}^2}{k^2} \left\{ \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_0(v_z) dv_z}{(v_z - v_1)(v_z - v_2)} - \frac{C_- \tilde{f}_0(v_1) - C_+ \tilde{f}_0(v_2)}{2\omega_h/k} \right\}, \tag{4.3}$$

где использованы те же обозначения, что в уравнении (3.5). Волны Ван Кампена принадлежат непрерывному спектру, поскольку определяемая из уравнения (4.3) частота $\omega = \omega(k, C_-, C_+)$ зависит от произвольных интенсивностей пучков C_{\mp} .

Особым является случай, когда

$$C_- \tilde{f}_0(v_1) = C_+ \tilde{f}_0(v_2). \tag{4.4}$$

При этом черенковское излучение и поглощение пучков компенсируют черенковское поглощение и излучение на электронах плазмы. Поэтому затухание Ландау отсутствует, а частоты квантовых ленгмюровских волн определяются из уравнения (3.3), в котором интеграл вычисляется в смысле главного значения.

Как видно из выражений (4.2), частоты квантовых баллистических мод определяются соотношениями $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \pm \omega_h$. Эти же соотношения являются квантовыми условиями черенковского поглощения и излучения свободным электроном продольных волн [16]:

$$\omega = kv_z \pm \frac{\hbar k^2}{2m}. \tag{4.5}$$

Поскольку скорость v_z может быть мала по сравнению со скоростью Ферми, квантовая поправка в (4.5) может быть сравнима с классической частотой kv_z , т. е. баллистические моды могут быть существенно квантовыми.

5. ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ КВАНТОВЫХ ВОЛН. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Поскольку квантовая поправка в условиях Черенкова (4.5) может быть существенной, рассмотрим затухание Ландау квантовых ленгмюровских волн. Будем использовать уравнения (2.5), при помощи которых можно исследовать и нелинейное затухание Ландау, т. е. учесть обратное воздействие поля ленгмюровской волны на функцию распределения электронов, определяемую формулой (2.8). Попутно вычислим и частоты квантовых ленгмюровских волн.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} \tau = \omega_{Le} t, \quad \xi = \frac{v_z}{V_0}, \quad \kappa = \frac{kV_0}{\omega_{Le}}, \\ \mu = \frac{\omega_h}{\omega_{Le}} = \frac{1}{4} \eta \kappa^2, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где κ — безразмерное волновое число, а η — газовый параметр (1.9). Заметим, что из-за малости па-

раметра (3.7) всегда должно выполняться неравенство $\mu/\kappa < 1$. Полагая далее

$$A_0 = a_0 \exp(-i\omega_0 t), \quad A_{\mp} = a_{\mp} \exp(-i\omega_0 t),$$

запишем систему уравнений (2.5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{d\tau} &= -i \frac{1}{2\mu} (\varphi a_- + \varphi^* a_+), \\ \frac{da_-}{d\tau} + i(\mu - \kappa\xi) a_- &= -i \frac{1}{2\mu} \varphi^* a_0, \\ \frac{da_+}{d\tau} + i(\mu + \kappa\xi) a_+ &= -i \frac{1}{2\mu} \varphi a_0, \\ \varphi \int \tilde{f}_0(\xi) (a_0 a_-^* + a_0^* a_+) d\xi. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Напомним, что амплитуды волновой функции a_0 , a_{\mp} зависят от безразмерного времени τ и безразмерной скорости ξ . Начальная функция распределения $\tilde{f}_0(\xi)$ в (5.2) уже проинтегрирована по поперечным к вектору \mathbf{k} составляющим скорости. Согласно формуле (2.8), для всех последующих моментов времени безразмерная функция распределения электронов плазмы $\tilde{f}(\tau, \xi)$ определяется через начальное распределение $\tilde{f}_0(\xi)$ формулой

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tau, \xi) &= \tilde{f}_0(\xi) |a_0(\tau, \xi)|^2 + \tilde{f}_0\left(\xi + \frac{2\mu}{\kappa}\right) \times \\ &\times \left| a_- \left(\tau, \xi + \frac{2\mu}{\kappa} \right) \right|^2 + \tilde{f}_0\left(\xi - \frac{2\mu}{\kappa}\right) \times \\ &\times \left| a_+ \left(\tau, \xi - \frac{2\mu}{\kappa} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Функция (5.3) так же проинтегрирована по поперечным скоростям.

При решении системы (5.2), а она в общем виде решается только численно, следует правильно задать начальные условия. Дело в том, что начальные условия должны соответствовать структуре волновой функции электрона в ленгмюровской волне. Только такие возмущения порождают регулярные ленгмюровские волны. Из произвольных же возмущений развиваются различные баллистические моды непрерывного спектра, которые накладываются на интересующие нас ленгмюровские волны и существенно затрудняют исследование. Требуемое начальное условие можно, например, задать в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_0(0, \xi) &= 1 - 2\alpha^2, \quad a_-(0, \xi) = \alpha, \\ a_+(0, \xi) &= -\alpha, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где α — некоторый достаточно малый вещественный параметр. В случае начальных условий (5.4) в плазме возбуждены две симметричные ленгмюровские

волны, распространяющиеся навстречу друг другу. Это обстоятельство будет учтено ниже при обсуждении результатов решения задачи (5.2), (5.3). Более правильно считать (5.4) не начальными условиями, а параметрами возмущений плазмы к моменту включения некоторого внешнего источника, создавшего в плазме ленгмюровские волны.

Для оценки параметра α в (5.4) следует установить, какая амплитуда плазменной волны в квантовой теории считается большой. Рассмотрим электроны плазмы, у которых скорость v_z близка к фазовой скорости ленгмюровской волны ω/k . В соответствии с (4.5) условие захвата волной как излучающих, так и поглощающих волну электронов имеет вид [17]

$$|e\varphi| > \frac{1}{2} m \left(2 \frac{\omega \hbar}{k} \right)^2. \quad (5.5)$$

Отсюда и из уравнения Пуассона находим неравенство, определяющее амплитуды волновых функций в ленгмюровской волне большой амплитуды:

$$|a_{\pm}| > \mu. \quad (5.6)$$

В рамках модели, основанной на представлении (2.3), а не на разложении (2.4), случай (5.6) рассмотрен быть не может. Поэтому уравнения (2.5) применимы только при выполнении неравенства

$$|a_{\pm}| \ll \min(\mu, 1). \quad (5.7)$$

Можно показать, что обрывание разложения (2.4) осуществляется именно по малому параметру (5.7). Величина α в (2.4), естественно, также должна удовлетворять неравенству (5.7).

Интегралы уравнений (5.2) с учетом начальных условий (5.4) записываются в виде

$$\begin{aligned} |a_0(\tau, \xi)|^2 + |a_-(\tau, \xi)|^2 + |a_+(\tau, \xi)|^2 &= 1, \\ \int \tilde{f}_0(\xi) [|a_-(\tau, \xi)|^2 - |a_+(\tau, \xi)|^2] d\xi &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Первый из этих интегралов тождественен (2.7). Вторым интеграл (5.8) означает, что полный импульс двух встречных ленгмюровских волн одинаковой амплитуды равен нулю.

Уравнения (5.2) содержат один параметр плазмы η и один параметр ленгмюровской волны κ . Уравнения зависят также от равновесной функции распределения, которую определим одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2), \\ \tilde{f}_0(\xi) &= \frac{3}{4} \begin{cases} 1 - \xi^2, & |\xi| < 1, \\ 0, & |\xi| > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.9)$$

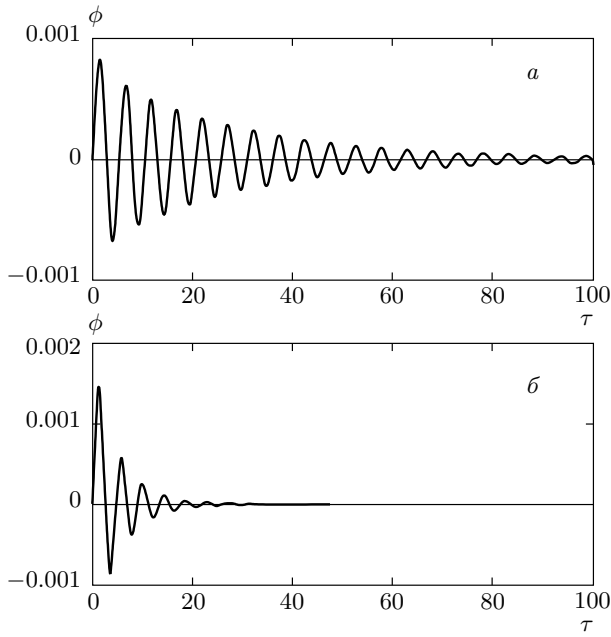


Рис. 1. Динамика потенциала в ленгмюровской волне квантовой максвелловской плазмы: $\kappa = 0.5$ (а), 0.75 (б)

Первая функция (5.9) описывает максвелловскую плазму, а вторая — вырожденную.

Для определения частоты ленгмюровской волны введем спектральную плотность колебаний потенциала:

$$S(\Omega) = \sqrt{[\Phi(\Omega, \tau)\Phi^*(\Omega, \tau)]_{\tau \gg 1}},$$

$$\Phi(\Omega, \tau) = \int_0^\tau \varphi(\tau') \exp(i\Omega\tau') d\tau'. \quad (5.10)$$

Безразмерную частоту $\Omega(\kappa)$ находим как точку максимума спектральной плотности $S(\Omega)$, размерная частота есть $\omega(k) = \omega_{Le}\Omega(\kappa)$.

Рассмотрим теперь результаты численного решения уравнений (5.2). Квантовые эффекты тем сильнее, чем больше параметр μ в формуле (5.1). Поэтому будем рассматривать два случая: квантовый, $\eta = 0.5$, и почти классический, $\eta = 0.05$. Начнем с максвелловской плазмы. На рис. 1а в зависимости от времени τ построена функция $\phi = \text{Im} \varphi(\tau)$, полученная численным решением задачи (5.2), (5.4) при $\kappa = 0.5$ и $\eta = 0.5$ (при этом $\mu \approx 0.03$). Практически такая же зависимость получается и для случая $\eta = 0.05$ ($\mu \approx 0.003$). Наблюдаются высокочастотные колебания с затухающей амплитудой. Это и есть затухание Ландау с учетом квантовых эффектов. Однако роль этих эффектов в рассматрива-

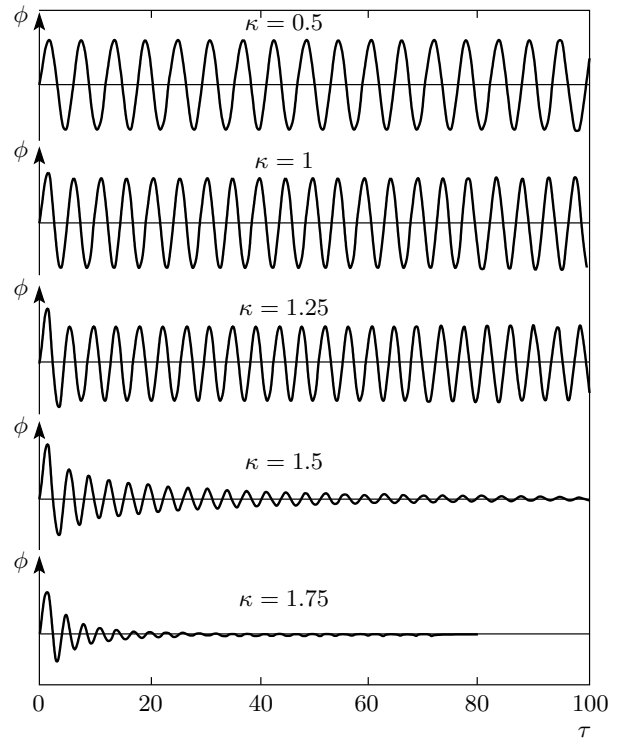


Рис. 2. Динамика потенциала ленгмюровских волн квантовой вырожденной плазмы при $\eta = 0.5$ для различных волновых чисел κ

емом случае весьма мала. Можно было бы надеяться на возрастание квантовых поправок при увеличении волнового числа κ . При этом, однако, возрастает затухание Ландау, так что о ленгмюровских волнах вообще говорить не приходится. Для подтверждения сказанного на рис. 1б изображена функция $\phi(\tau)$ для случая $\kappa = 0.75$ и $\eta = 0.5$ ($\mu \approx 0.07$). Таким образом, в максвелловской плазме квантовые эффекты при описании слабозатухающих ленгмюровских волн оказываются несущественными.

Перейдем теперь к рассмотрению вырожденной плазмы. На рис. 2 представлены функции $\phi(\tau)$ ленгмюровских волн вырожденной плазмы при $\eta = 0.5$ для различных безразмерных волновых чисел κ . Видно, что, начиная с некоторого волнового числа κ , ленгмюровские волны становятся затухающими. Известно, что по классической теории ленгмюровские волны вырожденной плазмы не затухают [1, 2] (речь идет только о бесстолкновительном затухании). Таким образом, затухание, показанное на рис. 2 является чисто квантовым эффектом. При еще больших κ затухание становится столь сильным, что ленгмюровские волны в вырожденной плазме можно считать отсутствующими.

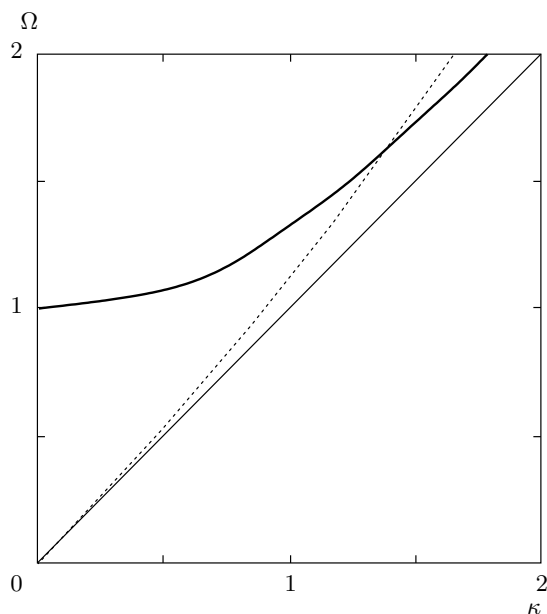


Рис. 3. Дисперсионная кривая ленгмюровской волны вырожденной квантовой плазмы при $\eta = 0.5$ — жирная линия, линия черенковского поглощения — пунктирная, линия нулевого звука $\Omega = \kappa$ — тонкая линия

На рис. 3 представлен результат спектрального анализа (при помощи формул (5.10)) зависимостей с рис. 2 — дисперсионная кривая $\Omega(\kappa)$. В область больших κ кривая не продолжена из-за сильного затухания Ландау (см. разд. 6). На рис. 3 показана также линия нулевого звука $\Omega = \kappa$ ($\omega = kV_F$). Видно, что фазовая скорость ленгмюровской волны больше скорости Ферми, чем и обусловлено отсутствие затухания ленгмюровской волны в вырожденной плазме согласно классической теории. Но в квантовой теории в условии черенковского поглощения (условие (4.5) со знаком плюс) имеется квантовая поправка, что и приводит к появлению бесстолкновительного затухания.

Подставляя в условие (4.5) вместо v_z максимальную скорость V_F , запишем следующее условие возникновения затухания Ландау ленгмюровской волны в вырожденной квантовой плазме (в размерной и безразмерной формах):

$$\omega(k) \leq kV_F + \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad \Omega(\kappa) \leq \kappa + \frac{1}{4} \eta \kappa^2. \quad (5.11)$$

Условие (5.11) означает, что резонансные электроны, способные поглощать волну, просто есть в наличии. Если в соотношениях (5.11) поставить знаки равенства, то получится уравнение для определения

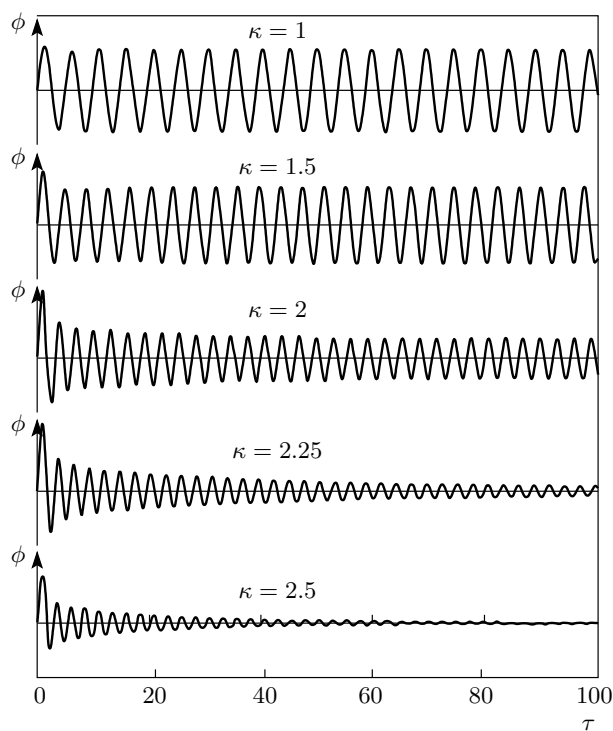


Рис. 4. Динамика потенциала ленгмюровских волн квантовой вырожденной плазмы при $\eta = 0.05$ для различных волновых чисел κ

порогового волнового числа $\kappa = \kappa_F$, выше которого возникает затухание (см. разд. 6). На рис. 3 пунктирной кривой показана линия квантового черенковского поглощения (правая часть (5.11)). Графическое определение порогового волнового числа дает значение $\kappa_F \approx 1.35$, что согласуется с зависимостями, представленными на рис. 2.

При переходе к классическому случаю затухание Ландау ленгмюровских волн в вырожденной плазме должно пропадать, точнее смещаться в коротковолновую область, что и подтверждается расчетами для плазмы с $\eta = 0.05$, результаты которых представлены на рис. 4, 5, являющихся соответственно аналогами рис. 2, 3. Видно, что при $\eta = 0.05$ пороговое волновое число возросло до $\kappa_F \approx 2$. Кроме того, согласно рис. 5 при достаточно больших κ имеем $\Omega(\kappa) \approx \kappa$, т. е. волна фактически является нулевым звуком, испытывающим бесстолкновительное затухание, а при $\kappa > 3$ волны из-за сильного затухания нет вообще (см. ниже в разд. 6). Заметим, что из-за малости величины (3.7) вторые слагаемые в правых частях (5.11) должно быть меньше первого. Нетрудно проверить, что в проведенных расчетах это выполнялось с запасом в полтора–два порядка.

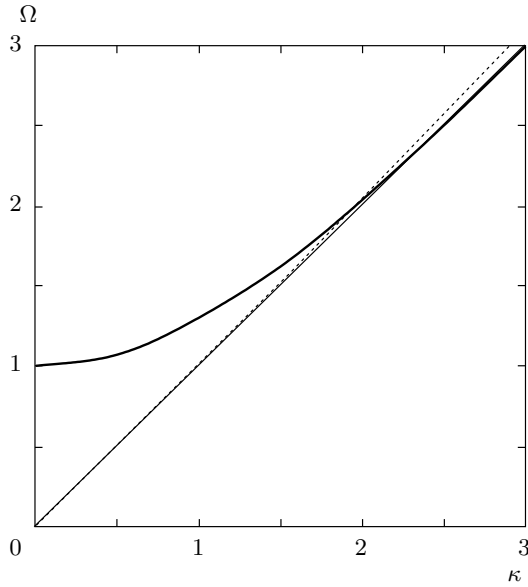


Рис. 5. Дисперсионная кривая ленгмюровской волны вырожденной квантовой плазмы при $\eta = 0.05$ — жирная линия, линия черенковского поглощения — пунктирная, линия нулевого звука $\Omega = \kappa$ — тонкая линия

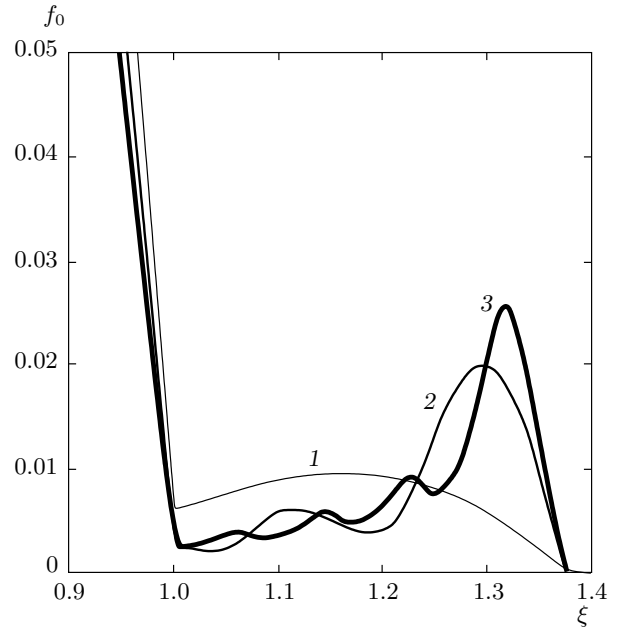


Рис. 7. Функция распределения электронов вырожденной квантовой плазмы в области наибольших возмущений для трех моментов времени $\tau = 5$ (1), 25 (2), 50 (3)

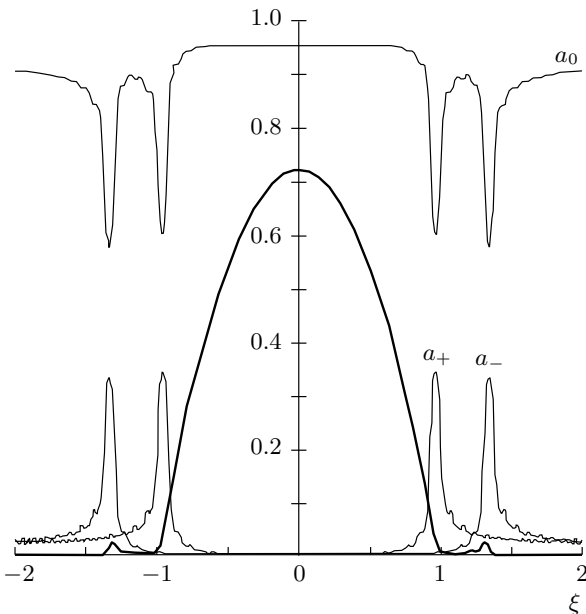


Рис. 6. Амплитуды волновой функции и функция распределения (жирная линия) электронов к моменту времени $\tau = 50$

Рассмотрим еще микроскопические характеристики вырожденной квантовой плазмы с возбужденной в ней ленгмюровской волной — волновые функции электронов и функцию распределения электронов по скоростям (5.3). На рис. 6 для момента времени $\tau = 50$ представлены функция распределения $\tilde{f}(\tau, \xi)$ и амплитуды волновой функции $a_0(\tau, \xi)$ и $a_{\pm}(\tau, \xi)$ для случая $\eta = 0.5$ и $\kappa = 1.5 > k_F$ (см. предпоследний график на рис. 2). Наиболее сильное изменение амплитуд волновой функции, обусловленное черенковским излучением и поглощением, происходит в окрестностях точек $\xi = \Omega/\kappa - \mu/\kappa \approx 0.97$ (поглощение; электроны с такими скоростями есть) и $\xi = \Omega/\kappa + \mu/\kappa \approx 1.36$ (излучение; электронов с такими скоростями в невозмущенном состоянии нет). Безразмерная фазовая скорость ленгмюровской волны $\Omega/\kappa \approx 1.17$. Возмущение испытывают только самые граничные области функции распределения (жирная линия), что в масштабе рисунка не очень заметно. Симметрия рисунка относительно точки $\xi = 0$ обусловлена тем, что в плазме имеются две одинаковые ленгмюровские волны, распространяющиеся навстречу друг другу.

На рис. 7 для трех моментов времени представлен фрагмент функции распределения в области наибольших возмущений. Как и должно быть в

области скоростей, превышающих скорость Ферми ($\xi = 1$) и фазовую скорость волны ($\xi = 1.17$), функция распределения обогащается за счет электронов, ускоренных при черенковском поглощении. Соответственно в области меньших скоростей наблюдается обеднение функции распределения.

Таким образом, в плазме с максвелловской функцией распределения электронов по скоростям квантовые эффекты малы и в практическом плане никак проявляться не могут. В вырожденной же плазме квантовые эффекты играют более значительную роль и проявляются в первую очередь в виде бесстолкновительного затухания ленгмюровских волн. В твердотельной плазме металлов и некоторых полупроводников газовый параметр (1.9) изменяется от значений, чуть меньших единицы, до нескольких единиц. Результаты, приведенные выше для $\eta = 0.5$, без существенных изменений переносятся и на случай больших η . Например, при $\eta = 1$ для порогового волнового числа получается значение $\kappa_F \approx 1.15$. В реальных твердотельных плазмах ленгмюровские волны с длиной, в полтора–два раза превышающей значение $2\pi\omega_{Le}^{-1}V_F$, претерпевают сильное бесстолкновительное затухание, что является чисто квантовым эффектом. При этом нужно, конечно, иметь в виду, что при нарушении неравенства (1.9) любая газовая теория не может претендовать на правильное количественное описание реальной электронной плазмы твердых тел [1, 10]. Не в твердотельной плазме в пределах применимости газового приближения квантовое бесстолкновительное затухание проявляется только при очень больших плотностях. Например, при $n_{0e} = 10^{26} \text{ см}^{-3}$ имеем $\eta \approx 0.46$, а температура вырождения электронов порядка 10^7 К . Затухание возникает на более коротких, чем $2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ длинах волн, при среднем расстоянии между электронами на порядок меньшем.

6. РЕШЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОЙ КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЫ

Для продолжения дисперсионных кривых ленгмюровских волн (рис. 3, 5) в область сильного бесстолкновительного затухания метод спектрального анализа, основанный на формулах (5.10), не пригоден. Требуется решение точного дисперсионного уравнения (3.3). Однако при подстановке в это уравнение функции распределения вырожденной плазмы (вторая функция (5.9)) возникает проблема аналитического продолжения функции $\tilde{f}_0(\xi)$

с действительной оси на комплексную плоскость $\xi = v_z/V_F = \xi' + i\xi''$. В данной ситуации вместо второй функции (5.9) удобно использовать следующую аналитическую функцию распределения (она получается из распределения Ферми с конечной температурой в результате интегрирования по v_x, v_y):

$$\tilde{f}_0(\xi) = \frac{3}{4\beta} \ln(1 + \exp[\beta(1 - \xi^2)]), \quad \beta \gg 1, \quad (6.1)$$

где $\beta = V_F^2/V_{Te}^2$. Функция (6.1) в области $G = \{(\xi')^2 > 1 + (\xi'')^2\}$ близка к нулю.

В случае распределения (6.1) в безразмерных величинах (5.1) дисперсионное уравнение (3.3) в форме (3.5) после вычисления интеграла по v_z и предельного перехода $\beta \rightarrow \infty$ записывается в виде

$$1 + \frac{3}{4\kappa^2} \left[2 + \frac{\xi_1^2 - 1}{\xi_1 - \xi_2} \ln \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1 + 1} + \frac{\xi_2^2 - 1}{\xi_2 - \xi_1} \ln \frac{\xi_2 - 1}{\xi_2 + 1} \right] = -i \frac{3\pi}{4} \frac{(\xi_1^2 - 1)\theta(\xi_1) - (\xi_2^2 - 1)\theta(\xi_2)}{\mu\kappa}, \quad (6.2)$$

где

$$\xi_{1,2} = \frac{\Omega}{\kappa} \pm \frac{\mu}{\kappa}, \quad \theta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in G, \\ 1, & \xi \notin G. \end{cases} \quad (6.3)$$

Правая часть уравнения (6.2) возникла из-за применения правила Ландау: она равна сумме интегралов по замкнутым контурам вокруг полюсов $\xi = \xi_{1,2}$, лежащих в нижней полуплоскости комплексной плоскости $\xi = v_z/V_F$ вне области G , где функция распределения (6.1) исчезающе мала; если полюс лежит в области G , то его вклад в правую часть уравнения равен нулю, что учитывается множителями $\theta_{1,2}$. Заметим, что уравнение (6.2) приведено в монографии [10], но правая часть уравнения определена там только на действительной оси комплексной плоскости Ω , чего недостаточно для определения частот сильно затухающих волн.

На рис. 8 представлены результаты численного решения уравнения (6.2) для двух случаев, $\eta = 0.5$ и $\eta = 0.05$: изображены действительная часть и модуль мнимой части комплексной частоты $\Omega(\kappa)$, а также прямая нулевого звука $\Omega = \kappa$. Дисперсионные кривые на рис. 8 продолжают соответствующие кривые, представленные на рис. 3 и рис. 5, в коротковолновую область. Видно хорошее согласие методов спектрального анализа и дисперсионного уравнения в тех областях волновых чисел, где затухания нет или оно мало.

На рис. 8 можно выделить три характерные области: первая — длинноволновая область незатухающих ленгмюровских волн, вторая — промежуточная

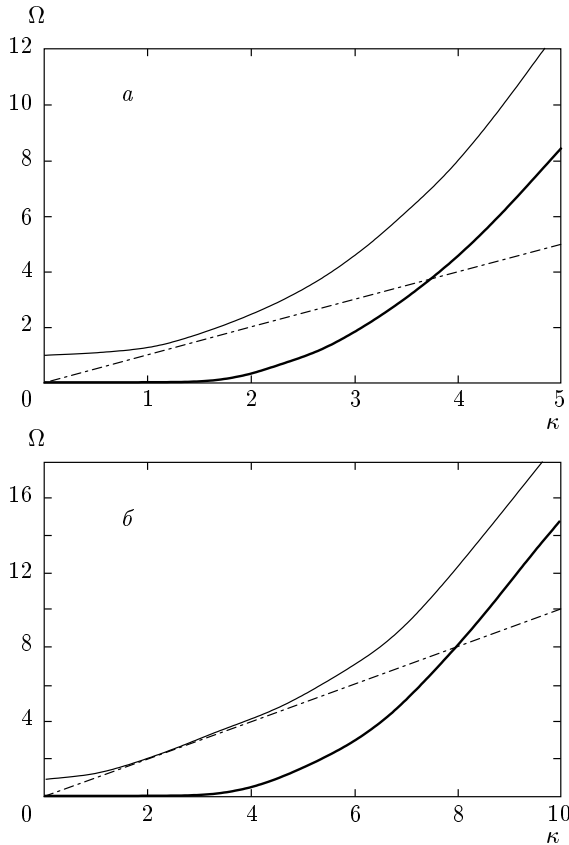


Рис. 8. Результаты решения дисперсионного уравнения (6.1) при $\eta = 0.5$ (а), 0.05 (б), $\text{Re } \Omega$ — тонкие линии, $|\text{Im } \Omega|$ — жирные линии, линии нулевого звука $\Omega = \kappa$ — штрихпунктирные

область (вблизи порога κ_F) слабозатухающей волны типа нулевого звука, третья — коротковолновая область сильнозатухающих колебаний, которые к волновым возмущениям можно отнести только условно. Вторая промежуточная область видна тем отчетливее, чем меньше параметр η (т. е. чем меньше роль квантовых эффектов), что видно из сравнения рис. 8а и рис. 8б. Третья область существенно квантовая, она может быть продолжена в область еще более коротких длин волн, вплоть до $\kappa \sim 4/\eta$ (когда параметр (3.7) приближается к единице).

Для трех указанных характерных областей удастся найти приближенные аналитические решения дисперсионного уравнения (6.2). В первой, длинноволновой, области имеем известный спектр [1, 2]

$$\Omega = \sqrt{1 + \frac{3}{5}\kappa^2 + \frac{1}{16}\eta^2\kappa^4} \rightarrow \omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \frac{3}{5}k^2V_F^2 + \left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2}. \quad (6.4)$$

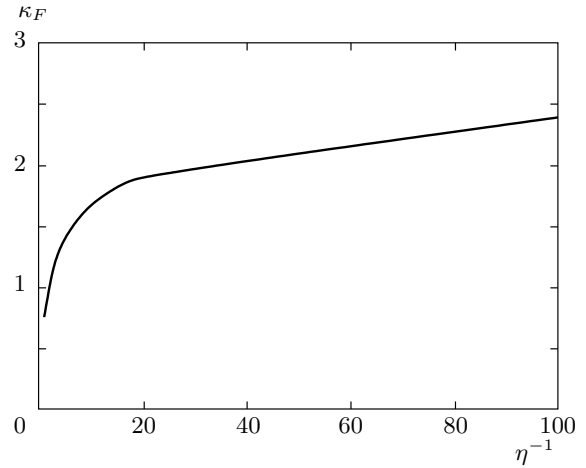


Рис. 9. Зависимость безразмерного порогового волнового числа от обратного газового параметра

В третьей, коротковолновой, области комплексный спектр сильнозатухающих квантовых колебаний оказывается следующим:

$$\Omega = \mu + \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (1 - i) \sqrt{\mu\kappa} \kappa \rightarrow \omega = \omega_h + \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (1 - i) \left(\frac{\omega_h k V_F}{\omega_{Le}^2}\right)^{1/2} k V_F. \quad (6.5)$$

При получении формулы (6.5) было учтено, что в коротковолновой области правая часть уравнения (6.2) является большой по абсолютной величине.

Для решения дисперсионного уравнения (6.2) в промежуточной области волновых чисел удобно воспользоваться приближенной формулой (3.6), поскольку вблизи порога мнимая часть у частоты мала. Предварительно следует определить пороговое значение κ_F . Сделаем это для почти классического случая $\eta \ll 1$, когда безразмерное волновое число $\kappa \sim \kappa_F$ достаточно велико. Приравнивая левую часть уравнения (6.2) нулю, находим известное выражение для действительной частоты нулевого звука [1, 2]:

$$\Omega = \kappa \left[1 + 2 \exp\left(-\frac{2}{3}\kappa^2 - 2\right) \right] \rightarrow \omega = k V_F \left[1 + 2 \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k^2 V_F^2}{\omega_{Le}^2} - 2\right) \right]. \quad (6.6)$$

Подставляя далее (6.6) в условие черенковского поглощения, получаем следующее уравнение для определения порогового волнового числа κ_F (рис. 9):

$$F(\kappa) = \eta\kappa - 8 \exp\left(-\frac{2}{3}\kappa^2 - 2\right) = 0. \quad (6.7)$$

Напомним, что затухание возникает при $\kappa > \kappa_F$, или в размерном виде при $k > \kappa_F \omega_{Le} / V_F$. Наконец, подставляя (6.6) в формулу (3.6), находим выражение для декремента затухания нулевого звука в вырожденной плазме:

$$\begin{aligned} \text{Im } \Omega &= i \frac{\pi}{8} \kappa F(\kappa) \rightarrow \text{Im } \omega = \\ &= -i \frac{\pi}{2} k V_F \left[\frac{\omega_{\hbar}}{k V_F} - 2 \exp \left(-\frac{2}{3} \frac{k^2 V_F^2}{\omega_{Le}^2} - 2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Формула (6.8) справедлива только при $\kappa > \kappa_F$; при $\kappa < \kappa_F$ следует полагать $\text{Im } \omega = 0$. Приближенные формулы (6.4)–(6.8) хорошо согласуются с результатами численного решения дисперсионного уравнения (6.2).

В заключение выскажем предположение о структуре частотных спектров рассмотренных ленгмюровских волн в еще более коротковолновой области, когда параметр (3.7) является большим и представление о самосогласованном поле становится некорректным. В этом случае взаимодействие электронов плазмы происходит только за счет столкновений. Если же таковые отсутствуют, то частота продольных квантовых колебаний плазмы определяется формулой

$$\omega = \omega_{\hbar}. \quad (6.9)$$

В отличие от коллективных ленгмюровских колебаний волны (6.9) являются одночастичными [1, 2]. При увеличении волнового числа k формула (6.5) предположительно изменяется следующим образом: начиная с некоторого k второе слагаемое перестает нарастать, а затем вообще уменьшается до нуля. Квантовые эффекты, обусловленные одночастичными волнами (6.9), могут оказаться существенными при взаимодействии плазмы с какими-то другими электромагнитными волнами, например, при черенковской пучковой неустойчивости в среде [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Атомиздат, Москва (1961).
2. А. Ф. Александров, А. А. Рухадзе, *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред*, Изд-во МГУ, Москва (1999).
3. P. K. Shukla, L. Stenflo, and K. Bingham, *Phys. Lett. A* **359**, 218 (2006).
4. S. Ali and P. K. Shukla, *Eur. Phys. J. D* **41**, 319 (2007).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1974).
6. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1973).
7. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1982).
8. Ю. В. Бобылев, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Радиотехн. и электрон.* **47**, 166 (2002).
9. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
10. Д. Пайнс, Ф. Нозьер, *Теория квантовых жидкостей*, Мир, Москва (1967).
11. Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва (1953).
12. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988).
13. А. В. Тимофеев, *Резонансные явления в колебаниях плазмы*, Физматлит, Москва (2009).
14. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, Москва (1976).
15. Г. Эккер, *Теория полностью ионизованной плазмы*, Мир, Москва (1974).
16. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *УФН* **178**, 1025 (2008).
17. Р. И. Ковтун, А. А. Рухадзе, *ЖЭТФ* **58**, 1709 (1970).
18. М. В. Кузелев, *Физика плазмы* **36**, 132 (2010).