

# МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ ОПТИЧЕСКОГО ОТКЛИКА СИСТЕМЫ КВАЗИДВУМЕРНЫХ ЭКСИТОННЫХ ПОЛЯРИТОНОВ

С. С. Гаврилов<sup>a,b\*</sup>, Н. А. Гиппиус<sup>b,c</sup>, С. Г. Тиходеев<sup>b</sup>, В. Д. Кулаковский<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Институт физики твердого тела Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

<sup>b</sup> *Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *LASMEA, CNRS, Université Blaise Pascal  
63177, Aubière, France*

Поступила в редакцию 2 сентября 2009 г.

Исследуются нелинейно-динамические свойства системы поляритонов в планарном полупроводниковом микрорезонаторе в условиях когерентного внешнего фотовозбуждения. Показано, что межчастичное взаимодействие поляритонов с одинаковыми значениями проекции полного момента ( $J_z$ ) может приводить к мультистабильности отклика возбуждаемого поляритонного состояния. В результате становятся возможными неравновесные переходы между различными ветвями устойчивости, происходящие за счет флуктуаций или сколь угодно плавного изменения параметров возбуждения и сопровождающиеся резкими изменениями интенсивности и оптической поляризации поля в микрорезонаторе. Показано, что сравнительно слабое притяжение между поляритонами с противоположными  $J_z$  приводит к возможности спонтанного нарушения симметрии циркулярно поляризованных компонент поля в микрорезонаторе в условиях строго линейной (симметричной) поляризации внешнего возбуждения.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Квазидвумерные экситонные поляритоны — элементарные возбуждения, возникающие в активном слое планарного полупроводникового микрорезонатора за счет сильной связи экситона (электрон-дырочной пары) и резонаторной фотонной моды [1]. Оптически возбуждаемая система экситонов обнаруживает свойства слабонеидеального газа бозе-частиц [2] с отталкивательным взаимодействием, вызванным обменным взаимодействием электронов. Пространственная локализация в плоскости активного слоя приводит к малой эффективной массе поляритонов (порядка  $10^{-5}$  массы электрона в вакууме), а дебройлевская длина волны на два порядка превышает длину волны экситона в области гелиевых температур. В связи с этим оказывается возможным создавать макрозаполненные поляритонные состояния с помощью резонансной

накачки сравнительно небольшой интенсивности, такой что приближение слабонеидеального бозе-газа сохраняет силу [3, 4]. Такая возможность, подтвердившаяся в экспериментах по стимулированному рассеянию света в планарных микрорезонаторах (см. [4–7] и более поздние работы [8–10]), вызвала большой интерес к коллективным эффектам в системе квазидвумерных поляритонов. В последние годы сообщалось о наблюдении в такой системе крупномасштабной пространственной и временной когерентности, возникающей пороговым образом [11, 12], и бозе-эйнштейновской конденсации [13]. В настоящей работе исследуется эффект мультистабильности отклика резонансно возбуждаемых состояний, приводящий к возможности управляемых неравновесных переходов в системе планарных поляритонов.

Если в условиях когерентной накачки в системе поляритонов возникают когерентные состояния, их эволюция может быть описана на квазиклассическом языке. В простейшем случае рассматривается

\*E-mail: gavr\_ss@issp.ac.ru

набор классических осцилляторов — волновых гармоник с различными квазиимпульсами, — связанных за счет экситон-экситонного взаимодействия; при этом учитываются только квазидвумерные состояния с конечным временем жизни. Такая (строго говоря, полуфеноменологическая) модель, называемая иногда моделью оптического параметрического осциллятора, позволила объяснить пороговый характер стимулированного поляритон-поляритонного рассеяния [14, 15] и, в целом, оказалась очень полезной для анализа коллективных свойств поляритонов в условиях резонансного возбуждения [16–20]. Такой же подход будет предпринят и в данной работе.

В том случае, когда частота когерентной накачки превышает частоту поляритона, отклик возбуждаемой моды становится бистабильным в конечной области значений мощности возбуждения. Точнее, для этого необходимо, чтобы расстройка частоты накачки была больше, чем  $\sqrt{3}\gamma$ , где  $\gamma$  — декремент затухания, определяющий ширину резонанса [21]. Эффект бистабильности характерен для нелинейного осциллятора и связан с зависимостью резонансной энергии от амплитуды; отметим, что для экситонного конденсата этот эффект был предсказан в рамках существенно квантового подхода [22].

Бистабильность отклика приводит к резкому усилению поля в активном слое резонатора (и, соответственно, увеличению коэффициента пропускания) по достижении определенной (критической) плотности внешнего возбуждения, для которой исчезает «нижнее» устойчивое решение и осуществляется быстрый переход на «верхнюю» ветвь устойчивости. Этот эффект был обнаружен экспериментально в работе [23], где сообщается также о наблюдении гистерезиса отраженного сигнала в зависимости от плотности возбуждения. Указанные эксперименты проводились в условиях нормального падения возбуждающего импульса ( $\theta_p = 0$ ), причем использовалась методика непрерывной накачки, позволяющая проследить оптический отклик системы лишь с усреднением по макроскопически большим временам. Существенно, однако, что с помощью данной методики нельзя обнаружить скачок пропускания резонатора в случае  $\theta_p = 10^\circ\text{--}20^\circ$  (т. е. тогда, когда возбуждаемая мода лежит в окрестности точки перегиба нижней поляритонной ветви, см. [10]) вследствие сравнительно быстрого параметрического рассеяния энергии в другие поляритонные состояния [16, 18]. Тем не менее, скачок амплитуды возбуждаемой моды удалось обнаружить и в этом случае: эксперименты, выполненные с малым вре-

менным разрешением, позволили в деталях проследить процесс развития параметрической неустойчивости [24, 25]. В частности, было установлено, что в случае  $\theta_p = 10^\circ\text{--}20^\circ$  бистабильность одномодового решения приводит к критической трансформации состояния существенно многомодовой системы и появлению макроскопического сигнала стимулированного рассеяния в направлении нормали к поверхности.

Подход, предпринятый в работах [14–20] для теоретического анализа пороговых эффектов в системе планарных поляритонов, ограничен скалярным приближением, пренебрегающим различием  $\sigma^+$ - и  $\sigma^-$ -поляризованных компонент экситонной плотности. Такое упрощение оправдано в случае циркулярно поляризованной накачки с малым планарным квазиимпульсом, когда можно считать, что падающая волна возбуждает экситоны с одинаковым значением проекции полного момента  $J_z = 1$  или  $J_z = -1$  в плоскости  $xy$  однородной двумерной квантовой ямы (экситоны с  $|J_z| \neq 1$  оптически не возбуждаются). Однако в общем случае оптическая поляризация поля на квантовой яме весьма сложно зависит от интенсивности и поляризации накачки, даже если полностью пренебречь эффектом взаимодействия экситонов с различающимися  $J_z$ . В частности, появляются новые устойчивые решения, отвечающие случаям, когда одна из  $\sigma^\pm$ -компонент экситонной плотности находится на нижней ветви устойчивости, а другая — на верхней, и потому переходы между ветвями устойчивости сопровождаются скачками поляризации [26]. Еще более сложная картина возникнет с учетом парного взаимодействия между экситонами с  $J_z = 1$  и  $J_z = -1$ .

Общий вклад экситон-экситонного взаимодействия в гамильтониан системы имеет вид [27]

$$H_{XX}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1} \int_{\mathbb{R}^2} V_{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{r}) b_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{r}, t) \times \\ \times b_{\sigma_2}^\dagger(\mathbf{r}, t) b_{\sigma_2}(\mathbf{r}, t) b_{\sigma_1}(\mathbf{r}, t) d^2 \mathbf{r}, \quad (1)$$

где  $\sigma_{1,2}$  — «поляризационные» индексы, отвечающие состояниям с разными  $J_z = \pm 1$ ,  $b_\sigma^\dagger$  — экситонные операторы рождения,  $V_{\sigma_1 \sigma_2}$  — константы «контактного» экситон-экситонного взаимодействия; в случае пространственно-однородной системы можно считать, что  $V_{\sigma_1 \sigma_2}$  не зависят от  $\mathbf{r}$ . Константы  $V_{\sigma_1 \sigma_2}$  могут быть вычислены в пространстве фермионных состояний электронов и дырок с учетом спиновых степеней свободы. Как показано в прошлых работах, в приближении Хартри–Фока для системы экситонов в основном ( $1s$ ) состоянии  $V_{++} > 0$  и

$V_{+-} = 0$  [28]; однако же учет высших экситонных возбуждений приводит к появлению сравнительно слабого притяжения между экситонами с разными  $J_z$ :  $V_{+-} < 0$ , при том что  $|V_{+-}| < |V_{++}|$  [29–31]. Соотношение  $|V_{+-}|/|V_{++}|$  сильно зависит от свойств конкретной структуры [27]; в последующих численных расчетах будем полагать  $|V_{+-}|/|V_{++}| = 10^{-1}$ . Как отмечалось ранее, в данной работе будет использовано квазиклассическое приближение, предполагающее факторизацию среднего значения полевых операторов (приближение среднего поля) и макрзаполненность возбуждаемой экситонной моды, что позволяет считать средние значения операторов  $b_\sigma$   $C$ -числами, пропорциональными соответствующим компонентам экситонной поляризации на квантовой яме (когерентное приближение). Таким образом, мы не рассматриваем вопрос об исходном возникновении когерентности в накачиваемой системе. Экситон-экситонное взаимодействие (1) приводит к появлению кубичной нелинейности в уравнениях Гейзенберга для  $b_\sigma$ ; в согласии с этим, получающиеся квазиклассические уравнения аналогичны уравнениям Гросса–Питаевского для макрзаполненного (конденсатного) состояния системы слабо взаимодействующих бозонов.

Возможность появления нескольких стационарных решений, отвечающих заданной внешней накачке, была продемонстрирована ранее в работе [26]. В настоящей работе представлена классификация ветвей стационарного отклика для разных значений поляризации возбуждения. Специальное внимание уделяется эффектам, возникающим за счет взаимодействия экситонов с различающимися  $J_z$ . В частности, установлено, что в случае линейно поляризованной накачки, когда амплитуды  $\sigma^\pm$ -компонент падающей волны строго равны друг другу, даже сколь угодно малая величина  $|V_{+-}|$  может вызвать спонтанный переход к состоянию с высокой циркулярной поляризацией (по достижении «критической» плотности возбуждения). Кроме того, исследуется асимптотическая устойчивость одномодовых стационарных решений и рассматривается вопрос о динамике неравновесных переходов в тех случаях, когда формально существует сразу несколько устойчивых состояний, в которых может оказаться система после перехода. Наконец, представлены примеры численного решения уравнений Гросса–Питаевского, позволяющие проследить явную временную динамику возбуждаемой моды.

В разд. 2 сформулирована модель, позволяющая описать динамику макрзаполненной моды поля на квантовой яме в условиях когерентной на-

качки, отыскать стационарные решения и исследовать их устойчивость относительно малых флуктуаций. Результаты расчетов и их качественный анализ представлены в разд. 3. Раздел 4 содержит основные выводы, обсуждение нерешенных проблем и заключение.

## 2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКСИТОН-ФОТОННОЙ СИСТЕМЫ В МИКРОРЕЗОНАТОРЕ

Теоретическая модель, позволяющая описать динамику когерентных поляритонных мод в активном слое планарного резонатора, была предложена в связи с задачей о параметрическом рассеянии света в условиях сильной экситон-фотонной связи [16, 18, 19]. В рамках квазиклассического подхода исследуется динамика электрического поля  $\mathcal{E}$  и экситонной поляризации  $\mathcal{P}$  в плоскости квантовой ямы  $xy$ ; магнитное поле в активном слое имеет нулевую амплитуду. Поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{P}$ , а также внешняя накачка  $\mathcal{F}$  рассматриваются как планарные векторы (например,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \mathbf{e}_x + \mathcal{E}_y \mathbf{e}_y$ ), считая что можно полностью пренебречь значением поперечной компоненты  $\mathcal{E}_z$  в исследуемой области малых квазиволновых чисел  $|\mathbf{k}| \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . Переход к спинору  $(\mathcal{E}_\pm^+)$  циркулярно поляризованных компонент электрического поля осуществляется по формуле

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_+ \\ \mathcal{E}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

то же относится к полям  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{F}$ .

Уравнения Максвелла (для  $\mathcal{E}$ ) и уравнения Гросса–Питаевского (для  $\mathcal{P}$ ) запишем в базисе циркулярно поляризованных компонент с целью придать наиболее простой вид вкладу экситон-экситонного взаимодействия. Удобнее всего эти уравнения записать в матричном виде:

$$i \frac{d}{dt} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) - \hat{E}_C(\mathbf{k}, t) \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \hat{\alpha}(\mathbf{k}) \mathcal{F}(\mathbf{k}, t) + \hat{\beta}(\mathbf{k}) \mathcal{P}(\mathbf{k}, t), \quad (3)$$

$$i \frac{d}{dt} \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) - \hat{E}_X \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) = \hat{A} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) + \eta(\mathbf{k}, t) + \xi(\mathbf{k}, t), \quad (4)$$

где

$$\eta_\sigma(\mathbf{k}, t) = \sum_{\sigma'=-1,1} V_{\sigma\sigma'} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \mathcal{P}_{\sigma'}^*(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}, t) \times \mathcal{P}_{\sigma'}(\mathbf{q}_1, t) \mathcal{P}_\sigma(\mathbf{q}_2, t), \quad \sigma = \pm 1, \quad (5)$$

и  $\xi(\mathbf{k}, t)$  — двухкомпонентные столбцы, учитывающие соответственно экситон-экситонное взаимодействие (см. (1)) и ланжевенский источник (белый шум), который позволяет смоделировать флуктуации поля. Коэффициенты уравнений — матрицы  $2 \times 2$ , обозначающие энергии фотонной ( $\hat{E}_C$ ) и экситонной ( $\hat{E}_X$ ) мод, поляризуемость экситона в свободной квантовой яме ( $\hat{A}$ ), а также константы отклика электрического поля на внешнее возбуждение ( $\hat{\alpha}$ ) и экситонную поляризацию ( $\hat{\beta}$ ). Для расчета значений  $E_C(\mathbf{k})$ ,  $\beta(\mathbf{k})$  и  $\alpha$  использовался метод матриц переноса; значения этих величин были рассчитаны в базисе линейно поляризованных ТЕ- и ТМ-состояний, являющихся собственными модами электромагнитного поля в пустом резонаторе, после чего был осуществлен переход к базису состояний с левой и правой циркулярными поляризациями. Значения элементов  $\hat{E}_C$ ,  $\hat{E}_X$  и  $\hat{\alpha}$  являются комплексными (мнимые части энергий определяют времена жизни «свободных» фотона и экситона в активном слое); таким образом, рассматриваемая система является открытой и диссипативной.

Собственная энергия экситона от поляризации не зависит (в однородной квантовой яме состояния с  $J_z = \pm 1$  вырождены), поэтому

$$\hat{E}_X = \begin{pmatrix} E_X & 0 \\ 0 & E_X \end{pmatrix}.$$

В согласии с недавней экспериментальной оценкой соотношения констант  $V_{++}$  и  $V_{+-}$  [31], полагаем

$$V_{+-} = V_{-+} = -0.1V_{++}, \quad (6)$$

тогда как  $V_{++} = V_{--} = 1$  по определению (выбор значения  $V_{++}$  фиксирует систему относительных единиц для полей  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{P}$ ).

Рассмотрим задачу о стационарном отклике возбуждаемой моды ( $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$ ) поля в активном слое в предположении, что  $\mathcal{P}_{\pm}(\mathbf{k}, t) \equiv 0$  для всех  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$ . Полагая в уравнениях (3), (4)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\pm}(\mathbf{k}_p, t) &= \bar{\mathcal{F}}_{\pm} e^{-iE_p t/\hbar}, \\ \mathcal{P}_{\pm}(\mathbf{k}_p, t) &= \bar{\mathcal{P}}_{\pm} e^{-iE_p t/\hbar}, \\ \mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{k}_p, t) &= \bar{\mathcal{E}}_{\pm} e^{-iE_p t/\hbar}, \end{aligned} \quad (7)$$

имеем систему алгебраических уравнений для стационарных амплитуд  $\bar{\mathcal{E}}_{\pm}$  и  $\bar{\mathcal{P}}_{\pm}$ . Исключив  $\bar{\mathcal{E}}_{\pm}$  и пренебрегая  $\xi_{\pm}$ , получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\left[ \hat{E}_p - \hat{E}_X - \hat{A} \left( \hat{E}_p - \hat{E}_C \right)^{-1} \hat{\beta} \right] \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}_+ \\ \bar{\mathcal{P}}_- \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} V_{++} \bar{\mathcal{P}}_+^* \bar{\mathcal{P}}_+ \bar{\mathcal{P}}_+ + V_{+-} \bar{\mathcal{P}}_-^* \bar{\mathcal{P}}_- \bar{\mathcal{P}}_+ \\ V_{-+} \bar{\mathcal{P}}_+^* \bar{\mathcal{P}}_+ \bar{\mathcal{P}}_- + V_{--} \bar{\mathcal{P}}_-^* \bar{\mathcal{P}}_- \bar{\mathcal{P}}_- \end{pmatrix} = \\ &= \hat{A} \left( \hat{E}_p - \hat{E}_C \right)^{-1} \hat{\alpha} \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{F}}_+ \\ \bar{\mathcal{F}}_- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

позволяющие рассчитать  $\bar{\mathcal{P}}_{\pm}$  в зависимости от внешней накачки  $\bar{\mathcal{F}}_{\pm}$ . Здесь использовано обозначение

$$\hat{E}_p = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix};$$

аргумент  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$  опущен для всех переменных. Амплитуды  $\bar{\mathcal{F}}_{\pm}$  и  $\bar{\mathcal{P}}_{\pm}$  принимают комплексные значения и могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_{\pm} &= \sqrt{\frac{I_{ext}}{2}} (1 \pm \rho_{ext}) \exp(i\phi_{ext}^{\pm}), \\ \bar{\mathcal{P}}_{\pm} &= \sqrt{\frac{I_{int}}{2}} (1 \pm \rho_{int}) \exp(i\phi_{int}^{\pm}), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $I_{ext}$  и  $I_{int}$  — интенсивности, а  $\rho_{ext}$  и  $\rho_{int}$  — степени циркулярной поляризации соответственно накачки  $\mathcal{F}$  и поля  $\mathcal{P}$ , так что

$$\begin{aligned} I_{ext} &= |\bar{\mathcal{F}}_+|^2 + |\bar{\mathcal{F}}_-|^2, \quad \rho_{ext} = \frac{|\bar{\mathcal{F}}_+|^2 - |\bar{\mathcal{F}}_-|^2}{|\bar{\mathcal{F}}_+|^2 + |\bar{\mathcal{F}}_-|^2}, \\ I_{int} &= |\bar{\mathcal{P}}_+|^2 + |\bar{\mathcal{P}}_-|^2, \quad \rho_{int} = \frac{|\bar{\mathcal{P}}_+|^2 - |\bar{\mathcal{P}}_-|^2}{|\bar{\mathcal{P}}_+|^2 + |\bar{\mathcal{P}}_-|^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Индексы «*ext*» и «*int*» обозначают «внешние» (external) и «внутренние» (internal) компоненты, относящиеся соответственно к накачке  $\mathcal{F}$  и полю  $\mathcal{P}$ .

Фазы  $\{\phi_{ext}^+, \phi_{ext}^-\}$   $\sigma$ -компонент падающей волны определены с точностью до аддитивной постоянной (физический смысл имеет лишь величина разности  $\Delta\phi_{ext} \equiv \phi_{ext}^- - \phi_{ext}^+$ ). С другой стороны, система (8) линейна по фазовым множителям  $\exp(i\phi_{int}^{\pm})$  поля в активном слое в зависимости от  $\exp(i\phi_{ext}^{\pm})$ ; следовательно, сдвиг  $\phi_{int}^{\pm} \rightarrow \phi_{int}^{\pm} + \text{const}$  (одинаковый для обеих фаз) не меняет значений  $(I_{int}, \rho_{int})$ , удовлетворяющих уравнениям (8) при заданных  $\bar{\mathcal{F}}_{\pm}$ . Данные обстоятельства позволяют представить систему (8) в виде трех вещественных уравнений, определяющих стационарный отклик возбуждаемой моды поля на квантовой яме.

Обратимся к задаче анализа устойчивости одномодового ( $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$ ) стационарного состояния, определяемого решением уравнений (8). Для этого нужно линеаризовать систему (3), (4) по малым возмущениям  $\{\tilde{\mathcal{E}}_{\pm}, \tilde{\mathcal{P}}_{\pm}\}$  амплитуд «сигнала» ( $\mathbf{k}, \omega$ ) и «холостого

сигнала» ( $\mathbf{k}' = 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}$ ,  $\omega' = 2\omega_p - \omega$ ), удовлетворяющих правилам сохранения энергии и планарного квазиимпульса, в предположении, что для всех  $\mathbf{k}$

$$\mathcal{E}_{\pm}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathcal{E}}_{\pm}(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{E}}_{\pm} e^{-i\omega_p t}, \quad (11)$$

$$\mathcal{P}_{\pm}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathcal{P}}_{\pm}(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{P}}_{\pm} e^{-i\omega_p t}, \quad (12)$$

$$|\tilde{\mathcal{E}}_{\pm}(\mathbf{k})| \ll |\bar{\mathcal{E}}_{\pm}|, \quad (13)$$

$$|\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}(\mathbf{k})| \ll |\bar{\mathcal{P}}_{\pm}|, \quad (14)$$

$$\omega(\mathbf{k}) + \omega(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) = 2\omega_p \quad (15)$$

(см. также работы [16, 19]). Если рассматривать стационарные амплитуды  $\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}$  возбуждаемой моды в качестве управляющих параметров, то имеем замкнутую линейную систему

$$\hbar\omega X(\mathbf{k}) = \hat{L}(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm}) X(\mathbf{k}) \quad (16)$$

для

$$X(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_+(\mathbf{k}), \tilde{\mathcal{E}}_-(\mathbf{k}), \tilde{\mathcal{P}}_+(\mathbf{k}), \tilde{\mathcal{P}}_-(\mathbf{k}), \\ \tilde{\mathcal{E}}'_+(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}), \tilde{\mathcal{E}}'_-(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}), \\ \tilde{\mathcal{P}}'_+(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}), \tilde{\mathcal{P}}'_-(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \end{pmatrix}^T, \quad (17)$$

где  $T$  — символ транспонирования (так что  $X(\mathbf{k})$  является вектор-столбцом), а

$$\left[ \hat{L}(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm}) \right]_{ab} = \frac{\partial^2 H[(X(\mathbf{k}), X^*(\mathbf{k}); \bar{\mathcal{P}}_{\pm})]}{\partial (X_a)^* \partial X_b} \quad (18)$$

— матрица  $8 \times 8$ , соответствующая билинейной форме

$$H[(X(\mathbf{k}), X^*(\mathbf{k}); \bar{\mathcal{P}}_{\pm})] = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \left\{ [\hat{E}_C(\mathbf{k})]_{\sigma_1 \sigma_2} \times \right. \\ \times \tilde{\mathcal{E}}_{\sigma_1}^*(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{E}}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) + [\hat{E}_X]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_1}^*(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) + \\ + [\hat{\beta}(\mathbf{k})]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{E}}_{\sigma_1}^*(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) + \hat{A}_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_1}^*(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{E}}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) + \\ + [2\hat{E}_p - \hat{E}_C^*(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{E}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{E}}'_{\sigma_2}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) + \\ + [2\hat{E}_p - \hat{E}_X^*]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_2}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) - \\ - [\hat{\beta}^*(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{E}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_2}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) - \\ - \hat{A}_{\sigma_1 \sigma_2}^* \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{E}}'_{\sigma_2}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) + \\ + \hat{V}_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_1}^* \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}^* [\tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}^*(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_1}(\mathbf{k}) + \\ + \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_2}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})] + \\ \left. + \hat{V}_{\sigma_1 \sigma_2} [\tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_1}^* \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}^* \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) + \text{с. с.}] \right\}. \quad (19)$$

Собственные значения  $\Omega(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm})$  линейной задачи (16)–(19) отвечают комплексным энергиям двухкомпонентных (с учетом поляризации) состояний на нижней и верхней поляритонных ветвях, при том

что каждой из этих четырех компонент соответствуют моды «сигнала» и «холостого сигнала». Инкремент нарастания (показатель Ляпунова) волновой моды  $\mathbf{k}$  в зависимости от  $\bar{\mathcal{P}}_{\pm}$  определяется значением наибольшей мнимой части  $\Omega(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm})$ :

$$\Gamma(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm}) = \max\{\text{Im} \Omega_l(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm}) | l = 1, 2, \dots, 8\}. \quad (20)$$

Вычисление  $\Gamma$  позволяет проанализировать устойчивость одномодового решения с заданными значениями  $\bar{\mathcal{P}}_{\pm}(\bar{\mathcal{F}}_{\pm})$ . С увеличением  $|\mathcal{F}|$  неустойчивость [ $\Gamma(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm}) > 0$ ] может возникнуть как вследствие параметрического распада в другие моды [ $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$ ], так и в самой возбуждаемой моде [ $\mathbf{k} = \mathbf{k}' = \mathbf{k}_p$ , но  $\omega \neq \omega'$ ] в условиях положительной отстройки частоты внешнего возбуждения от частоты поляритонного резонанса.

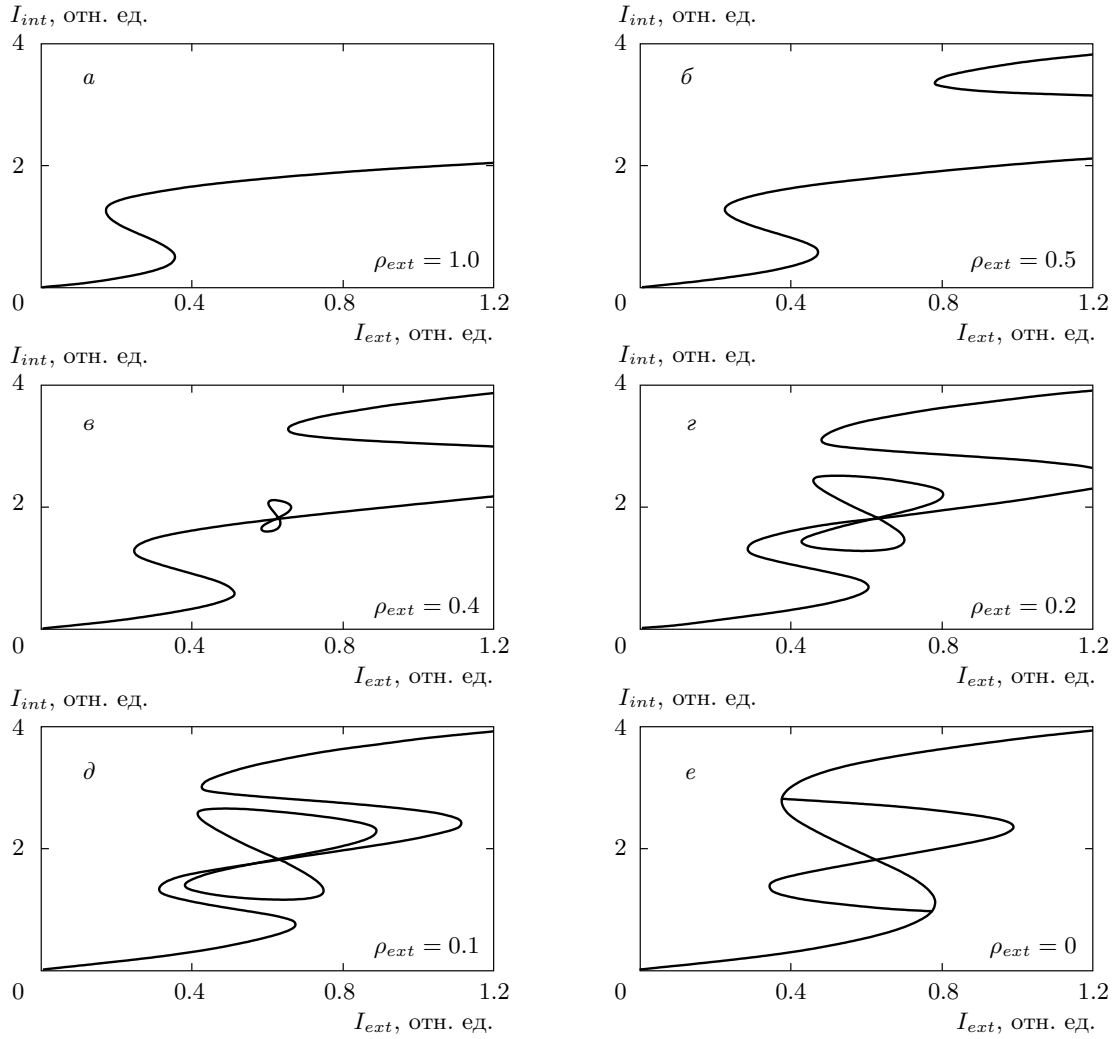
В следующем разделе рассматривается вопрос об устойчивости строго одномодовых [ $\mathcal{P}_{\pm}(\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p, t) \equiv 0$ ] стационарных состояний системы.

### 3. МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ ОТКЛИКА ВОЗБУЖДАЕМОЙ МОДЫ ПОЛЯ В АКТИВНОМ СЛОЕ

В предшествующих работах [16, 18, 19, 22] показано, что в случае положительной расстройки частоты накачки,

$$D = E_p - \text{Re} E_{LP}(\mathbf{k}_p) > \sqrt{3} |\text{Im} E_{LP}(\mathbf{k}_p)|,$$

функция стационарного отклика возбуждаемой моды  $I_{int}(I_{ext})$  принимает вид S-образной кривой, что приводит к бистабильности отклика и возможности резкого усиления поля в активном слое по достижении критической интенсивности возбуждения  $|\mathcal{F}^{(crit)}|^2$  (точки, в которой функция  $I_{int}(I_{ext})$  характеризуется вертикальной касательной). Фактически исследовался случай циркулярной поляризации накачки  $|\rho_{ext}| = 1$  (см. рис. 1a), когда в пренебрежении эффектом ТЕ–ТМ-расщепления предполагалось, что падающая волна возбуждает экситоны с одинаковыми значениями проекции полного момента  $J_z$ . В данной работе рассматривается случай произвольного  $\rho_{ext}$  в рамках одномодового (по  $\mathbf{k}$ ) приближения. Сначала будут описаны общие свойства функции стационарного отклика  $I_{int}(I_{ext})$  для разных  $\rho_{ext}$  от нуля до единицы (разд. 3.1). В области  $\rho_{ext} \neq 0$  взаимодействие  $V_{+-} < 0$  достаточно слабо влияет на свойства системы, если  $|V_{+-}| \ll |V_{++}|$ , однако если накачка поляризована линейно ( $\rho_{ext} = 0$ ), даже сколь угодно малая величина  $|V_{+-}|$  может



**Рис. 1.** Функции стационарного отклика возбуждаемой моды поля на квантовой яме: зависимости  $I_{int}(I_{ext})$ , рассчитанные для разных значений  $\rho_{ext} = (|\mathcal{F}_+|^2 - |\mathcal{F}_-|^2) / (|\mathcal{F}_+|^2 + |\mathcal{F}_-|^2)$  при фиксированном  $\Delta\phi_{ext} \equiv \arg(\mathcal{F}_+^* \mathcal{F}_-) = 0$ . Расстройка накачки  $D = E_p - \text{Re} E_{LP}(\mathbf{k}_p)$  составляет 0.5 мэВ для  $\mathbf{k}_p = 0$ . Значение  $V_{+-}/V_{++}$  равно  $-0.1$ . Добротность микрорезонатора  $Q \approx 4.2 \cdot 10^3$ , коэффициент затухания экситона  $|\text{Im}(E_X)| = 0.04$  мэВ

приводить к существенно новым нелинейным эффектам; их анализу посвящен разд. 3.2. Наконец, в разд. 3.3 проанализирована динамика неравновесных переходов между различными ветвями устойчивости в наиболее интересных случаях.

### 3.1. Стационарные решения для возбуждаемой поляритонной моды в зависимости от поляризации накачки

На рис. 1 представлена серия графиков  $I_{int}(I_{ext})$ , рассчитанных для разных значений степени циркулярной поляризации внешнего поля  $\rho_{ext}$  от еди-

ницы до нуля и  $V_{+-}/V_{++} = -0.1$ . Качественный характер трансформации зависимости  $I_{int}(I_{ext})$  с изменением  $\rho_{ext}$  можно пояснить без учета взаимодействия экситонов с разными  $J_z$  (т.е. полагая  $V_{+-} = 0$ ). Другими словами, можно принять, что  $\sigma^+$ - и  $\sigma^-$ -компоненты стационарного поля в активном слое не связаны между собой и потому характеризуются одинаковыми S-конттурами отклика на соответствующие  $\sigma^\pm$ -компоненты накачки,  $|\mathcal{P}_+^2|(|\mathcal{F}_+^2|)$  и  $|\mathcal{P}_-^2|(|\mathcal{F}_-^2|)$ . В таком случае критические значения  $\sigma$ -компонент внешнего поля ( $|\mathcal{F}_+^{(crit)}|^2$  и  $|\mathcal{F}_-^{(crit)}|^2$ ) совпадают, но если  $\rho_{ext} \neq 0$ , то по мере «включения» накачки эти значения достигаются одновременно.

Иначе говоря, совпадающим  $|\mathcal{F}_+^{(crit)}|^2$  и  $|\mathcal{F}_-^{(crit)}|^2$  отвечают разные значения полной интенсивности возбуждения

$$I_{\pm}^{(crit)} = \frac{2|\mathcal{F}^{(crit)}|^2}{1 \pm \rho_{ext}} \quad (21)$$

(см. (10)). Если  $\rho_{ext} = 1$ , то существует лишь одна критическая точка  $I_+^{(crit)}$ , отвечающая скачку  $\sigma^+$ -компоненты поля в активном слое. Сколь угодно малое отклонение  $\rho_{ext}$  от единицы приводит к появлению второй критической точки  $I_-^{(crit)} > I_+^{(crit)}$ , отвечающей скачку  $\sigma^-$ -компоненты в ходе дальнейшего увеличения  $I_{ext}$ , при этом второй скачок полной интенсивности  $I_{int}$  сопровождается уменьшением степени циркулярной поляризации  $\rho_{int}$ . Для  $\rho_{ext} = 0$  значения  $I_+^{(crit)}$  и  $I_-^{(crit)}$  совпадают, если  $V_{+-} = 0$ , но в общем случае такого совпадения нет; характер влияния  $\sigma^{\pm}$ -взаимодействия будет рассмотрен отдельно.

Рисунок 1 позволяет проследить плавную трансформацию функции  $I_{int}(I_{ext})$  в целом с уменьшением  $\rho_{ext}$  от единицы до нуля. Отметим, что начиная с определенного конечного значения разности  $1 - \rho_{ext}$  возникает дополнительная ветвь отображения  $I_{ext} \mapsto I_{int}$ , имеющая форму восьмерки и не связанная с «дважды S-образной» ветвью при  $\rho_{ext} > 0$  (см. рис. 1б). Обозначим, для определенности, замкнутую 8-образную ветвь буквой  $\Upsilon$ , а дважды S-образную ветвь — буквой  $\Sigma$ . С увеличением  $I_{ext}$  ветвь  $\Upsilon$  возникает тогда, когда величина  $|\mathcal{F}_-|^2 \equiv I_{ext}(1 - \rho_{ext})/2$  достигает области, в которой отображение  $|\mathcal{F}_-|^2 \mapsto |\mathcal{P}_-|^2$  неоднозначно, и исчезает тогда, когда  $|\mathcal{F}_+|^2 \equiv I_{ext}(1 + \rho_{ext})/2$  выходит из области неоднозначности отображения  $|\mathcal{F}_+|^2 \mapsto |\mathcal{P}_+|^2$  по достижении  $I_{ext} = I_+^{(crit)}$ . Отсюда следует, что в случае  $V_{+-} = 0$  состояния ветви  $\Upsilon$  недостижимы как по мере увеличения  $I_{ext}$  от нуля до бесконечности, так и в процессе обратного уменьшения  $I_{ext}$  при  $\rho_{ext} = \text{const}$  (см. рис. 2).

Таким образом, максимальное значение числа возможных  $I_{int}$ , соответствующих определенной накачке  $(I_{ext}, \rho_{ext}, \Delta\phi_{ext})$ , составляет  $3 \times 3 = 9$ , поскольку максимальное число состояний для каждой из двух  $\sigma^{\pm}$ -компонент поля в активном слое равно трем. При этом одно из трех состояний (как для  $\mathcal{P}_+$ , так и для  $\mathcal{P}_-$ ) неустойчиво. Следовательно, в общем случае существует не более четырех устойчивых значений  $I_{int}$  для заданной внешней накачки.

Приведенные соображения позволяют проанализировать зависимость оптической поляризации стационарного поля в активном слое  $\rho_{int}$  от интенсив-

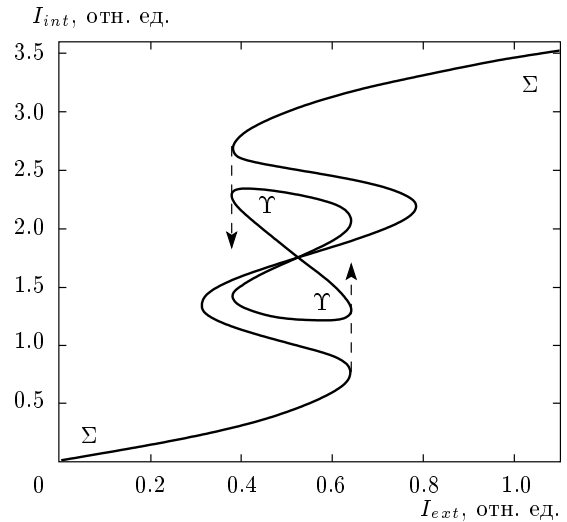


Рис. 2. Функция  $I_{int}(I_{ext})$  для  $\rho_{ext} = 0.2$  в приближении  $V_{+-} = 0$ . Если  $\sigma^{\pm}$ -компоненты поля не взаимодействуют, состояния ветви  $\Upsilon$  недостижимы по мере плавного изменения  $I_{ext}$  от нуля до бесконечности и обратно при  $\rho_{ext} = \text{const}$

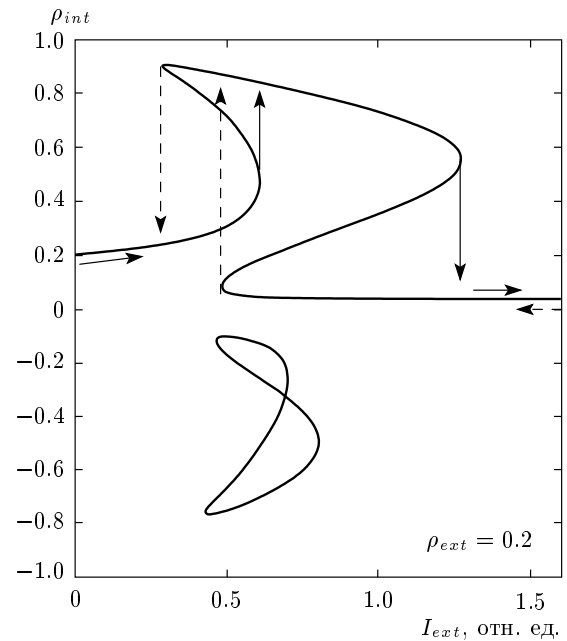
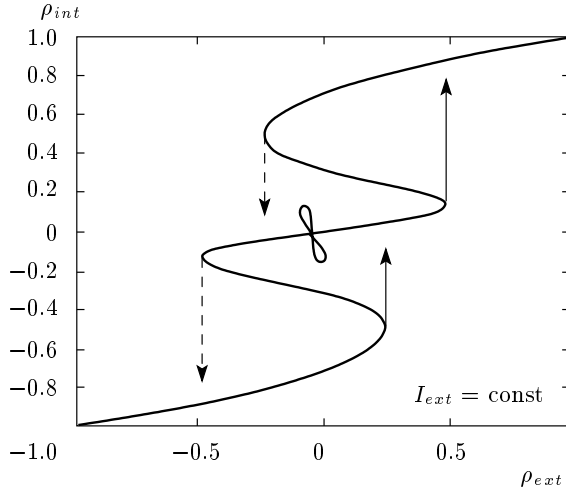


Рис. 3. Зависимость степени циркулярной поляризации  $\rho_{int}$  поля  $\mathcal{P}$  от интенсивности  $|\mathcal{F}|^2$  внешней накачки при  $\rho_{ext} = 0.2$  в стационарном одномодовом приближении. Стрелками указаны скачки  $\rho_{int}$ , ожидаемые в предположении об устойчивости решения при плавном изменении  $|\mathcal{F}|^2$  от нуля до бесконечности (сплошные стрелки) и от бесконечности до нуля (штриховые стрелки)



**Рис. 4.** Зависимость  $\rho_{int}(\rho_{ext})$ , рассчитанная при фиксированной интенсивности внешнего поля  $I_{ext} \approx I_0$  в стационарном одномодовом приближении. Значение  $I_0$  отмечено на рис. 5. Стрелками указаны скачки  $\rho_{int}$ , ожидаемые в предположении устойчивости решения при плавном изменении  $\rho_{ext}$  от  $-1$  до  $1$  (сплошные стрелки) и от  $1$  до  $-1$  (штриховые стрелки)

ности и поляризации накачки (соответственно рис. 3 и 4).

Для примера рассмотрим функцию  $\rho_{int}(I_{ext})|_{\rho_{ext}=\text{const}}$  при  $\rho_{ext} = 0.2$  (рис. 3). Очевидно, что в области малых  $I_{ext}$  должно быть  $\rho_{int} \approx \rho_{ext}$ , однако с ростом  $I_{ext}$  «преимущество»  $\sigma^+$ -компоненты усиливается за счет нелинейности отклика и потому величина  $\rho_{int}$  нарастает. Достижение критической интенсивности  $I_{ext} = I_+^{(crit)}$  приводит к скачку  $|\mathcal{P}_+|$  и, следовательно, скачку  $\rho_{int}(I_{ext})$ , поскольку «отстающая» компонента  $|\mathcal{P}_-|$  меняется относительно слабо. Наконец, последующее увеличение накачки до  $I_{ext} = I_-^{(crit)} > I_+^{(crit)}$  приводит к скачку  $\sigma^-$ -компоненты, в результате чего поле в активном слое становится поляризованным почти строго линейно ( $\rho_{int} \approx 0$ ) при больших  $I_{ext}$ . Обратное изменение  $\mathcal{P}_\pm(I_{ext})$  в процессе уменьшения  $I_{ext}$  от бесконечности до нуля происходит вдоль верхних ветвей устойчивости  $|\mathcal{P}_\pm^2|(|\mathcal{F}_\pm^2|)$ , и потому поле в активном слое сравнительно долго остается линейно поляризованным (соответствующая траектория  $\rho_{int}(I_{ext})$  указана штриховыми стрелками). Поскольку же  $|\mathcal{P}_-(I_{ext})| < |\mathcal{P}_+(I_{ext})|$ , компонента  $\sigma^-$  раньше, чем  $\sigma^+$ , достигает точки обратного перехода, чем и вызван скачок  $\rho_{int}$  в области малых плотностей возбуждения.

Рассмотрим теперь зависимость  $\rho_{int}$  от  $\rho_{ext}$  при  $I_{ext} = \text{const}$  (рис. 4). Если, как в данном примере,  $I_{ext} > |\mathcal{F}^{(crit)}|^2$ , то в окрестности  $\rho_{ext} = -1$  амплитуда  $\mathcal{P}_-$  находится на верхней ветви устойчивости  $S$ -контура  $|\mathcal{P}_-^2|(|\mathcal{F}_-^2|)$ , тогда как  $\mathcal{P}_+ \sim 0$  находится на нижней ветви  $|\mathcal{P}_+^2|(|\mathcal{F}_+^2|)$ . С увеличением  $\rho_{ext}$  значение  $|\mathcal{P}_-^2|$  уменьшается, а  $|\mathcal{P}_+^2|$  увеличивается, и в ходе изменения  $\rho_{ext}$  от  $-1$  до  $1$  происходят два последовательных скачка:  $|\mathcal{P}_+^2|$  — на верхнюю ветвь, а затем  $|\mathcal{P}_-^2|$  — на нижнюю, причем  $\rho_{int}$  увеличивается в обоих случаях. В процессе обратного изменения  $\rho_{ext}$  от  $1$  к  $-1$  скачки  $\sigma^\pm$ -компонент происходят аналогично, что приводит к выраженному гистерезису в зависимости  $\rho_{int}(\rho_{ext})|_{I_{ext}=\text{const}}$ .

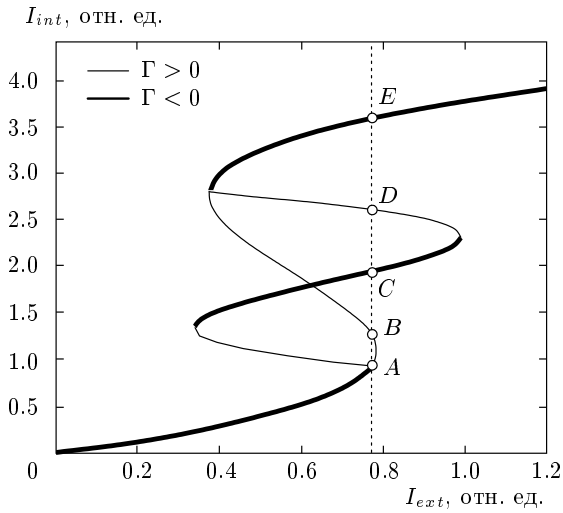
### 3.2. Спонтанное нарушение симметрии $\sigma^\pm$ -компонент поля на квантовой яме в случае $\rho_{ext} = 0$ и $V_{+-} < 0$

Обратимся теперь к анализу некоторых специальных эффектов, отсутствующих в приближении  $V_{+-} = 0$  и возникающих за счет ненулевого взаимодействия  $\sigma^+$ - и  $\sigma^-$ -компонент поля экситонной поляризации; вообще говоря, оказывается, что в определенном диапазоне параметров накачки сравнительно слабое  $\sigma^\pm$ -взаимодействие приводит к качественной трансформации свойств отклика системы по сравнению со случаем  $V_{+-} = 0$ .

Ранее отмечалось, что если  $V_{+-} = 0$ , то состояния  $\Upsilon$ -ветви функции стационарного отклика  $I_{int}(I_{ext})|_{\rho_{ext}=\text{const}}$  недостижимы по мере плавного изменения  $I_{ext}$  от нуля до бесконечности и обратно (рис. 2). Здесь мы, по сути, предполагали, что скачки  $\sigma^+$ - и  $\sigma^-$ -компонент поля в активном слое могут происходить независимо. Но коль скоро  $V_{+-} \neq 0$ , всякое изменение одной из компонент  $\mathcal{P}_\pm$  приведет к изменению второй компоненты, зависящему от полной интенсивности поля  $\mathcal{P}$  в силу нелинейности отклика. Отсюда следует, что разность критических значений интенсивности внешнего поля  $I_\pm^{(crit)}$  остается конечной даже при  $\rho_{ext} \rightarrow 0$ , поскольку соответствующие значения  $|\mathcal{P}(I_\pm^{(crit)})|^2$  отличаются достаточно сильно и потому первый и следующий за ним переходы в этом смысле неравноценны. Знак разности  $I_+^{(crit)} - I_-^{(crit)}$  (указывающий на то, скачок какой из двух компонент произойдет вначале) определяется знаком  $\rho_{ext}$ , так что формально

$$\lim_{\rho_{ext} \rightarrow +0} (I_+^{(crit)} - I_-^{(crit)}) = - \lim_{\rho_{ext} \rightarrow -0} (I_+^{(crit)} - I_-^{(crit)}) \neq 0. \quad (22)$$

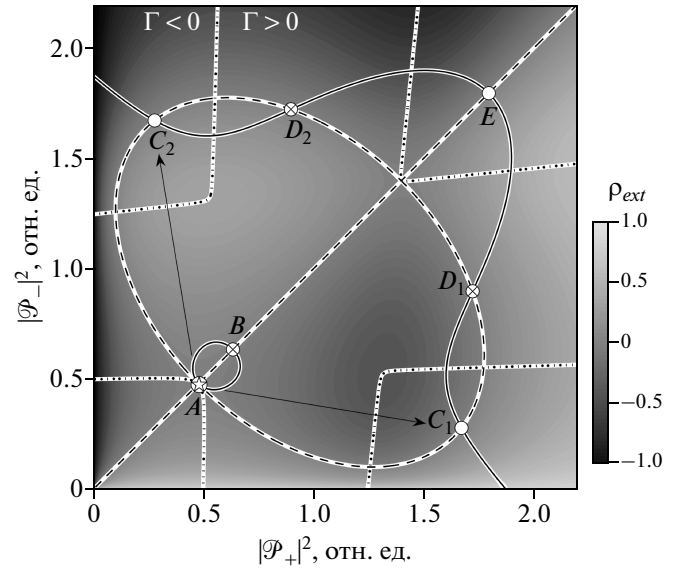




**Рис. 5.** Функция  $I_{int}(I_{ext})$  в случае строго линейной поляризации внешнего поля ( $\rho_{ext} = 0$ ). Участки, являющиеся устойчивыми в одномодовом приближении, выделены жирной линией. Пунктирная прямая  $I_{ext} = I_0$  соответствует точке  $A$ , в которой система теряет устойчивость по мере плавного «включения» накачки. Кружками и буквами  $A, B, \dots, E$  отмечены все решения системы (8) для заданной накачки ( $I_{ext} = I_0, \rho_{ext} = 0, \Delta\phi_{ext} = 0$ )

Случай, когда  $\rho_{ext}$  строго равно нулю, является особым. Как будет показано далее, в случае строго линейной поляризации внешнего поля может произойти спонтанное нарушение симметрии  $\sigma^\pm$ -компонент поля на квантовой яме, т.е. появление значительной циркулярной поляризации поля в микрорезонаторе. Возможность таких переходов открывается начиная с некоторого определенного значения расстройки  $D \equiv E_p - \text{Re} E_{LP}(\mathbf{k}_p)$ , зависящего от величины  $V_{+-}$  (поскольку, вообще говоря, рост частотной расстройки накачки усиливает нелинейность отклика). С этим тесно связан вопрос об устойчивости состояния возбуждаемой моды в фазовом пространстве  $(\text{Re } \mathcal{P}_+, \text{Im } \mathcal{P}_+, \text{Re } \mathcal{P}_-, \text{Im } \mathcal{P}_-)$ .

В скалярном приближении, отвечающем условию  $|\rho_{ext}| = 1$ , устойчивость стационарного состояния возбуждаемой моды определяется наклоном касательной к ветви  $|\mathcal{P}^2|(|\mathcal{F}^2|)$ : состояния, принадлежащие ветви с отрицательной производной  $dI_{ext}/dI_{int}$ , параметрически неустойчивы. Как хорошо известно, такое соотношение определяет поведение строго одномерного осциллятора с кубическим самодействием [21]; таким образом, фаза возбуждаемой моды  $[\arg(\mathcal{F}^*\mathcal{P})]$  никак не влияет на состояние устойчивости. Если  $|\rho_{ext}| \neq 1$ , но  $V_{+-} = 0$ , такие же



**Рис. 6.** Фазовая плоскость  $(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2)$ , на которой указаны положения решений  $A, B, \dots, E$  (см. рис. 5), отвечающих заданной накачке ( $I_{ext} = I_0, \rho_{ext} = 0, \Delta\phi_{ext} = 0$ ). Значения функции  $\rho_{ext}(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2)$  представлены оттенками серого цвета. Сплошная линия показывает решение уравнения  $I_{ext}(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2) = I_0$ , штриховая линия — решение  $\rho_{ext}(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2) = 0$ . Пунктирные линии  $\Gamma(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2) = 0$  соответствуют границам областей устойчивости в одномодовом приближении; неустойчивые решения  $B, D_1, D_2$  отмечены символами  $\otimes$ . По мере плавного увеличения интенсивности накачки  $I_{ext}$  при  $\rho_{ext} = 0$  система теряет устойчивость в точке  $A$ , после чего осуществляется быстрая трансформация состояния. Равновероятные переходы в состояния  $C_{1,2}$  указаны стрелками. Стационарное состояние  $E$  устойчиво, но динамически недостижимо при  $I_{ext} \rightarrow I_0$

соотношения выполняются для  $\sigma^\pm$ -компонент по отдельности и вне зависимости от величин  $\arg(\mathcal{F}_\pm^*\mathcal{P}_\pm)$  и  $\arg(\mathcal{P}_+^*\mathcal{P}_-)$ , в связи с тем что система (8) линейна по  $\exp(i\phi_{ext}^\pm)$  и  $\exp(i\phi_{int}^\pm)$ . Состояния, в которых одна из компонент  $\sigma^\pm$  устойчива, а другая нет, принадлежат ветви  $\Upsilon$  и потому не достигаются в процессе плавного увеличения  $I_{ext}$  при  $\rho_{ext} = \text{const}$ . Но если  $V_{+-} < 0$ , может оказаться, что  $\Upsilon$ -состояние возникает на нижней ветви стационарных решений  $I_{int}(I_{ext})|_{\rho_{ext}=0}$  с положительной производной  $dI_{ext}/dI_{int}$ , и с ростом  $I_{ext}$  возбуждаемая система теряет устойчивость вблизи нижней точки пересечения ветвей  $\Upsilon$  и  $\Sigma$  (точка  $A$  на рис. 5). Зададимся вопросом о том, как именно изменится состояние системы по достижении этой точки потери устойчивости.

Возможные значения интенсивности  $I_{int} \equiv \equiv |\mathcal{P}_+|^2 + |\mathcal{P}_-|^2$ , определяемые решением системы (8) для  $\rho_{ext} = 0$  и «пороговой» накачки  $I_{ext} = I_0$ , обозначены буквами  $A, B, \dots, E$  на рис. 5. На рис. 6 эти же решения указаны в координатах  $(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2)$  как точки пересечения кривых

$$\begin{aligned} I_{ext}(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2) &= I_0, \\ \rho_{ext}(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2) &= 0, \end{aligned}$$

рассчитанных с использованием дополнительного условия  $\Delta\phi_{ext}(\mathcal{P}_\pm) = 0$ . В условиях строго линейной накачки состояния  $C$  и  $D$ , в которых  $\rho_{int} \neq 0$ , двукратно вырождены по степени циркулярной поляризации. Состояния  $B$  и  $D_{1,2}$ , принадлежащие ветвям с отрицательным наклоном  $dI_{int}/dI_{ext}$ , параметрически неустойчивы. Таким образом, существует три абсолютно устойчивых ( $\Gamma < 0$ ) состояния поля в активном слое ( $C_1, C_2, E$ ), отвечающих заданной внешней накачке ( $I_{ext} = I_0, \rho_{ext} = 0, \Delta\phi_{ext} = 0$ ). Переходы из точки  $A$  в состояния  $C_1$  и  $C_2$  равновероятны в силу строгой симметрии, откуда следует, что в том или ином случае динамика перехода определяется случайными флуктуациями, которые, будучи сколь угодно малыми в пороговой точке, усиливаются со временем.

Допустим для определенности, что в точке  $A$  разность  $|\mathcal{P}_+| - |\mathcal{P}_-|$  положительна. Поскольку  $V_{++} > 0$ , эффективная энергия  $\sigma^+$ -компоненты ( $E_+$ ) несколько сдвинута в синюю область относительно  $E_-$  и потому характеризуется меньшей, чем  $E_-$ , расстройкой  $D$  с энергией внешнего поля; в результате  $|\mathcal{P}_+|$  входит в режим положительной обратной связи с  $E_+$  и продолжает увеличиваться. С другой стороны, в связи с тем что  $V_{+-} < 0$ , рост  $|\mathcal{P}_+|$  приводит к красному сдвигу компоненты  $\sigma^-$ , которая, таким образом, отдаляется от резонанса с накачкой и становится уже нечувствительной к флуктуациям (возникает отрицательная обратная связь между  $|\mathcal{P}_+|$  и  $|\mathcal{P}_-|$ ). Значение  $|\mathcal{P}_-|^2$  в точке  $C_1$  оказывается даже меньше, чем в точке  $A$ . Если же исходное (формально, сколь угодно малое) преимущество имеет компонента  $\mathcal{P}_-$ , ситуация оказывается ровно противоположной и в результате система переходит в состояние  $C_2$ .

### 3.3. Численное решение динамических уравнений для возбуждаемой моды

Рассмотрим динамику возбуждаемого состояния по достижении критической точки  $A$  в случае  $\rho_{ext} = 0$  и  $V_{+-}/V_{++} = -0.1$  (рис. 5). Результат расчета представлен на рис. 7.

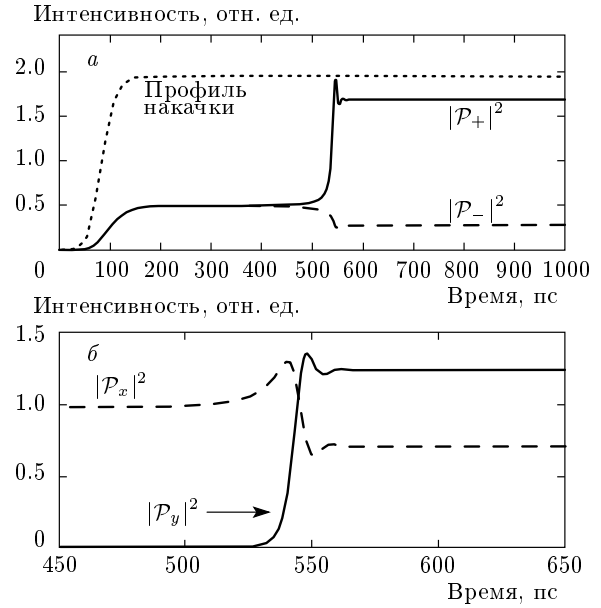


Рис. 7. Решение системы (3), (4) в предположении  $\mathcal{P}_\pm(\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p, t) \equiv 0$ : временные зависимости величин  $|\mathcal{P}_+|^2$  и  $|\mathcal{P}_-|^2$  (рис. а) и соответствующих линейных компонент  $|\mathcal{P}_{x,y}|^2$  вблизи точки перехода (рис. б). Поляризация накачки фиксирована ( $\rho_{ext} = 0, \Delta\phi_{ext} = 0$ ), а интенсивность  $I_{ext}(t)$  плавно увеличивается от 0 до  $1.005I_0$  (см. рис. 5) за время 200 пс, после чего остается постоянной; временной профиль  $I_{ext}(t)$  показан пунктирной кривой на рис. а. Стационарное состояние, устанавливающееся после критической трансформации решения, соответствует точке  $C_1$  на рис. б. Серия последовательных расчетов, проведенных с идентичными параметрами системы (3), (4), показывает, что переходы в состояния  $C_1$  и  $C_2$  являются равновероятными (в том или ином случае динамика системы определяется случайными флуктуациями поля в критической точке)

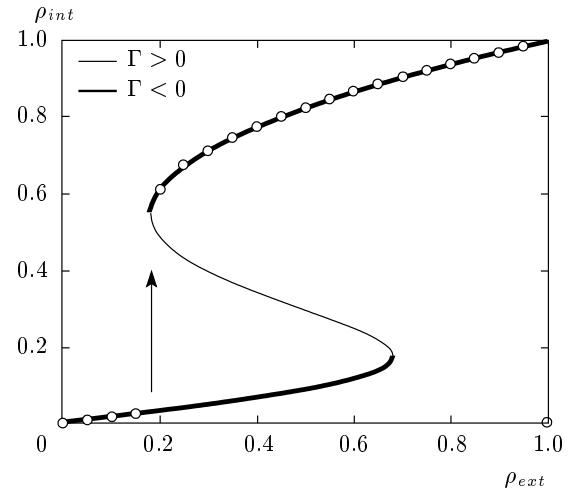
Форма возбуждающего импульса  $I_{ext}(t)$  (см. рис. 7а) была выбрана так, чтобы по мере «включения» накачки система не отклонялась от нижней ветви устойчивости  $I_{int}(I_{ext})$ . За время порядка 200 пс  $I_{ext}$  увеличивается от 0 до  $1.005I_0$ , после чего остается постоянным; небольшое превышение порога ( $I_0$ ) нужно затем, чтобы войти в область положительных  $\Gamma$ . В этой области малые отклонения системы от стационарного решения  $I_{int} = I_{int}(I_0)$ , вызванные флуктуациями, начинают экспоненциально возрастать [ $\dot{\mathcal{P}}(t) \propto e^{\Gamma t}$ ]. В рамках модели (3), (4) флуктуации определяются слагаемым  $\xi(\mathbf{k}, t)$ , задающим амплитуду случайной ланжевеновской силы, при этом  $\langle \xi_\pm(t) \rangle = 0$ ,

$\sqrt{\langle \xi_{\sigma'}^*(t') \xi_{\sigma''}(t'') \rangle} = K \delta_{\sigma', \sigma''} \delta_{t', t''}$  для  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$  и  $\xi_{\pm}(\mathbf{k}, t) \equiv 0$  для всех остальных мод  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$ , которые нами не учитываются. Мы рассматриваем случай, когда флуктуации пренебрежимо малы в сравнении с амплитудой поля на квантовой яме; в описанных ниже расчетах выбрано значение  $K \approx 10^{-3} |\text{Im}(E_X)| |\bar{\mathcal{P}}_{\pm}(I_0)|$ . Значения  $\xi_{\pm}(t)$  задавались в узлах дискретной сетки с шагом  $\tau \approx 7 \cdot 10^{-3}$  пс, что составляет порядка  $10^{-3}$  времени жизни возбуждаемого поляритонного состояния, тогда как абсолютная погрешность решения на отрезке  $[n\tau, (n+1)\tau]$  не превышала  $10^{-1} K\tau$  для всякого  $n$ . Следует заметить, что противоположный случай сравнительно больших флуктуаций ( $K \gtrsim |\text{Im}(E_X)| |\bar{\mathcal{P}}_{\pm}(I_0)|$ ) привел бы к качественно иному, чем рассмотренное в нашей работе, поведению системы.

Интересующий нас переход осуществляется при  $t \approx 550$  пс, спустя примерно 400 пс после «включения» внешнего поля: происходит резкое увеличение  $|\mathcal{P}_+|$ , тогда как величина  $|\mathcal{P}_-|$  отклоняется в сторону меньших значений. Установление решения имеет вид затухающих колебаний  $|\mathcal{P}_+(t)|^2$  и  $|\mathcal{P}_-(t)|^2$ . В результате система переходит в точку  $C$ , в строгом соответствии с оценкой, сделанной в стационарном приближении.

Нами была проведена серия расчетов с идентичными исходными параметрами системы (3), (4), в которых отличались только случайные реализации «шума»  $\xi_{\pm}(t)$ . Было найдено, что спонтанные переходы в состояния  $C_1$  и  $C_2$  являются равновероятными, тогда как строго симметричные переходы в состояние  $E$  динамически неосуществимы (для данных параметров возбуждения). Характерное время перехода (время, проходящее от включения накачки до установления решения) оставалось в этих расчетах практически неизменным, но, как и следовало ожидать, оказалось, что оно достаточно сильно зависит от амплитуды шума, возрастая с уменьшением  $K$ .

Таким образом, строго линейная накачка ( $\rho_{ext} = 0$ ) вызывает отклик, характеризующийся значительной циркулярной поляризацией поля в микрорезонаторе ( $|\rho_{int}| > 0$ ). Как следует из рис. 5, данный эффект должен иметь место на некотором конечном отрезке значений интенсивности возбуждения  $[I_0, I_1]$ . Разность  $I_1 - I_0$  определяется величиной частотной расстройки  $E_p - \text{Re} E_{LP}(\mathbf{k}_p)$ ; с другой стороны, «критическая» расстройка, начиная с которой спонтанное нарушение  $\sigma^{\pm}$ -симметрии при  $\rho_{ext} = 0$  вообще возможно, определяется величиной  $V_{+-}/V_{++}$ .



**Рис. 8.** Сплошная кривая: функция  $\rho_{int}(\rho_{ext})|_{I_{ext}=\text{const}}$  для  $I_{ext} = 1.6I_0$ . Участки, являющиеся устойчивыми в одномодовом приближении, выделены жирной линией;  $\circ$  — стационарные состояния, рассчитанные путем решения исходной системы (3), (4) с зависящей от времени интенсивностью накачки  $I_{ext}$ , которая для каждой расчетной точки плавно «включалась» от 0 до  $1.6I_0$

Если  $I_{ext}$  превышает предельное значение  $I_1$  (на рис. 5  $I_1 \approx 1.0$ ), поле в активном слое может быть лишь строго линейно поляризованным. Рассмотрим, для определенности, случай, когда  $I_{ext} = 1.6I_0 > I_1$ , а поляризация  $\rho_{ext}$  может меняться. При  $\rho_{ext} = 0$  есть лишь одно стационарное состояние поля в активном слое, и в нем  $\rho_{int} = 0$ . Если теперь увеличивать  $\rho_{ext}$  в сторону  $+1$ , то при некотором  $\rho_{ext} = \rho_{ext}^{(crit)}$  снова появится ветвь, отвечающая состояниям с большой циркулярной поляризацией. На рис. 8 представлена серия решений системы (3), (4) с разными  $\rho_{ext}$ ; для каждой из точек накачка плавно «включалась» от 0 до  $1.6I_0$ . Видно, что несмотря на существование двух абсолютно устойчивых ветвей стационарного отклика при  $\rho_{ext} > \rho_{ext}^{(crit)} \approx 0.2$ , происходящие скачки приводят к состояниям с возможно большей циркулярной поляризацией, и потому зависимость  $\rho_{int}(\rho_{ext})$  имеет разрыв в точке  $\rho_{ext}^{(crit)}$ . Эти расчеты отвечают серии экспериментов с непрерывной накачкой, в которых для каждого  $\rho_{ext}$  происходит независимое «включение» внешнего поля. Полученный нами результат обнаруживает хорошее соответствие с данными работы [8], где сообщается о резком скачке поляризации сигнала люминесценции при  $\rho_{ext} \approx 0.2$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовались свойства оптического отклика макрозаполненных поляритонных мод в условиях когерентной накачки. Был проведен качественный анализ устойчивости стационарных решений в широком диапазоне внешних параметров (интенсивности, частоты и оптической поляризации фотовозбуждения).

Показано, что поляритон-поляритонное взаимодействие приводит к неоднозначности отклика поля в активном слое микрорезонатора; число различных решений, определяющих устойчивые стационарные состояния возбуждаемой моды, зависит от поляризации накачки и в общем случае может достигать четырех. В точках бифуркации, где меняется количество и/или устойчивость стационарных решений, сколь угодно плавное изменение параметров накачки может привести к скачку амплитуды возбуждаемой моды. Были проанализированы неравновесные переходы, осуществляющиеся за счет изменения интенсивности и поляризации возбуждения. В частности, найдено, что даже малое отклонение поляризации накачки от строго линейной может привести к значительной циркулярной поляризации поля в микрорезонаторе.

Ради простоты в данной работе не учитывалась возможность параметрического распада возбуждаемой моды ( $\mathbf{k}_p$ ) в другие  $k$ -состояния. В соответствующих расчетах, связанных с анализом решений системы (8), положение  $\mathbf{k}_p$  не имеет специального значения и, следовательно, может быть выбрано в близкой окрестности  $\mathbf{k} = 0$ , где такого распада не происходит (см. [26]). Таким образом, мы ожидаем, что приведенные результаты — в частности, характер зависимости поля в активном слое от интенсивности и поляризации накачки — будут проверены экспериментально. С другой стороны, известно, что в случае возбуждения в области точки перегиба дисперсионной кривой ( $\mathbf{k}_p = 1\text{--}2 \text{ мкм}^{-1}$ ) характер трансформации возбуждаемой моды с ростом накачки имеет определяющее значение для перехода в режим стимулированного рассеяния — несмотря на то, что, вообще говоря, такая трансформация уже не может рассматриваться как строго одномерная [20, 24]. Возникающие здесь задачи анализа обратного влияния рассеянного сигнала на состояние возбуждаемой моды (см. [25]) представляют широкое поле дальнейших исследований. Мы ожидаем, в частности, что коллективные состояния системы взаимодействующих поляритонов обнаружат примечательные нелинейные свойства, связанные с опти-

ческой поляризацией.

Следующий результат обнаруживает качественную зависимость состояний поля в резонаторе от интенсивности взаимодействия право- и лево-циркулярно поляризованных компонент экситонной плотности. Мы нашли, что в случае  $V_{+-} < 0$  такое взаимодействие может приводить к спонтанному нарушению симметрии  $\sigma^\pm$ -компонент в условиях строго линейной (симметричной) поляризации когерентной накачки в определенном диапазоне частот.

Возможность такого эффекта установлена путем исследования стационарных решений (8), а также анализа их асимптотической устойчивости в приближении (11)–(15). Вслед за этим мы рассмотрели динамику трансформации возбуждаемой моды, решив уравнения (3), (4), и нашли, что спонтанное усиление  $\sigma^+$ - или  $\sigma^-$ -компоненты поля в активном слое происходит с равной вероятностью. Таким образом, в этом случае «выбор» конечного состояния определяется малыми флуктуациями поля в критической точке. Ясно, однако, что в определенных условиях такие переходы могут быть сделаны управляемыми, например, с помощью магнитного поля, снимающего вырождение  $\sigma^\pm$ -состояний экситона в квантовой яме. Более последовательный анализ роли флуктуаций, определяющих, в частности, характерные времена трансформации как в классическом, так и в существенно квантовом описаниях [32] является предметом отдельного рассмотрения.

Авторы выражают признательность Манфреду Байеру (Manfred Bayer), Дитмару Фрöhлиху (Dietmar Fröhlich), Гийому Малпешу (Guillaume Malpuech) и А. Деменеу за плодотворные дискуссии. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, а также в рамках программ РАН.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, and Y. Arakawa, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3314 (1992).
2. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, *ЖЭТФ* **54**, 978 (1968).
3. S. Pau, H. Cao, J. Jacobson, G. Björk, Y. Yamamoto, and A. Imamoglu, *Phys. Rev. A* **54**, R1789 (1996).
4. V. D. Kulakovskii, A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, N. A. Gippius, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, *Nanotechnology* **12**, 475 (2001).

5. P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1547 (2000).
6. A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, and V. D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **62**, R13298 (2000).
7. R. M. Stevenson, V. N. Astartov, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, M. Emam-Ismael, A. I. Tartakovskii, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3680 (2000).
8. A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, D. A. Kurysh, V. D. Kulakovskii, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **65**, 081308(R) (2002).
9. R. Butté, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, D. Bajoni, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **68**, 115325 (2003).
10. В. Д. Кулаковский, Д. Н. Крижановский, М. Н. Махонин, А. А. Деменев, Н. А. Гиппиус, С. Г. Тиходеев, *УФН* **175**, 334 (2005).
11. D. N. Krizhanovskii, D. Sanvitto, A. P. D. Love, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 097402 (2006).
12. A. Amo, D. Sanvitto, F. P. Laussy, D. Ballarini, E. del Valle, M. D. Martin, A. Lemaitre, J. Bloch, D. N. Krizhanovskii, M. S. Skolnick, C. Tejedor, and L. Viña, *Nature Lett.* **457**, 291 (2009).
13. J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang, *Nature* **443**, 409 (2006).
14. C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud, and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **62**, R4825 (2000).
15. D. M. Whittaker, *Phys. Rev. B* **63**, 193305 (2001).
16. N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, V. D. Kulakovskii, D. N. Krizhanovskii, and A. I. Tartakovskii, *Europhys. Lett.* **67**, 997 (2004); N. A. Gippius and S. G. Tikhodeev, *J. Phys.: Condens. Matter* **16**, S3653 (2004).
17. D. M. Whittaker, *Phys. Rev. B* **71**, 115301 (2005).
18. Н. А. Гиппиус, С. Г. Тиходеев, Л. В. Келдыш, В. Д. Кулаковский, *УФН* **175**, 334 (2005).
19. С. С. Гаврилов, Н. А. Гиппиус, В. Д. Кулаковский, С. Г. Тиходеев, *ЖЭТФ* **131**, 819 (2007).
20. D. N. Krizhanovskii, S. S. Gavrilov, A. P. D. Love, D. Sanvitto, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, V. D. Kulakovskii, D. M. Whittaker, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. B* **77**, 115336 (2008).
21. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1974).
22. В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, *ЖЭТФ* **63**, 1447 (1972).
23. A. Baas, J. P. Karr, H. Eleuch, and E. Giacobino, *Phys. Rev. A* **69**, 023809 (2004).
24. A. A. Demenev, A. A. Shchekin, A. V. Larionov, S. S. Gavrilov, V. D. Kulakovskii, N. A. Gippius, and S. G. Tikhodeev, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 136401 (2008).
25. A. A. Demenev, A. A. Shchekin, A. V. Larionov, S. S. Gavrilov, and V. D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **79**, 165308 (2009).
26. N. A. Gippius, I. A. Shelykh, D. D. Solnyshkov, S. S. Gavrilov, Yu. G. Rubo, A. V. Kavokin, S. G. Tikhodeev, and G. Malpuech, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 236401 (2007).
27. Y. Yamamoto, F. Tassone, and H. Cao, *Semiconductor Cavity Quantum Electrodynamics*, Springer, Berlin (2000).
28. C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **58**, 7926 (1998).
29. J. Inoue, T. Brandes, and A. Shimizu, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 3384 (1998).
30. J. Inoue, T. Brandes, and A. Shimizu, *Phys. Rev. B* **61**, 2863 (2000).
31. P. Renucci, T. Amand, X. Marie, P. Senellart, J. Bloch, B. Sermage, and K. V. Kavokin, *Phys. Rev. B* **72**, 075317 (2005).
32. N. S. Maslova, R. Johne, and N. A. Gippius, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 135 (2007).