

## УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФРАГМЕНТАЦИИ

*В. В. Яновский<sup>a\*</sup>, А. В. Тур<sup>b</sup>, О. В. Кужлина<sup>a</sup>*

<sup>a</sup> *Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины  
61001, Харьков, Украина*

<sup>b</sup> *Center d'Etude Spatiale Des Rayonnements, CNRS-UPS  
31028, Toulouse Cedex 4, France*

Поступила в редакцию 8 ноября 2009 г.

Предложена теория фрагментации, основанная на простых физических принципах, позволяющая объяснить универсальные асимптотики функции распределения фрагментов по размерам в крупномасштабной области. Общие принципы такой теории — это закон сохранения массы фрагментов в процессе разрушения и баланс энергии, затраченной на увеличение поверхности фрагментов при их разрушении. Используется потоковая идеология, которая позволяет дополнить общие принципы и развить минимальную теорию фрагментации. Таким дополнительным принципом является убывание потока объема фрагментов с увеличением энергии, затраченной на разрушение. Показано, что характер убывания потока непосредственно связан с видом степенного распределения фрагментов по размерам. Такая минимальная теория позволяет получить универсальные асимптотики функции распределения фрагментов по размерам и приводит к естественной физической классификации теорий фрагментации. Развита и более общая нелинейная теория сильной фрагментации. Показан выход на универсальную асимптотику решений нелинейного кинетического уравнения, удовлетворяющего обоим основным принципам. Обсуждается согласованность полученных асимптотик функции распределения фрагментов с экспериментальными наблюдениями.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Фрагментация является процессом широко распространенным в природе. В качестве различных примеров реализации этого процесса можно привести разрушения астероидов (или метеоритов) в результате их столкновений между собой [1–7], формирование реголита на поверхности Луны [8], дробление горной породы [1, 2, 9], дробление капель жидкости (бензина [10] и ртути [11]), получение мелкодисперсных порошков, распад тяжелых ядер при их столкновении между собой [12]. Таким образом, под фрагментацией понимаются такие процессы, в которых происходит дробление фрагментов на более мелкие фрагменты под внешними воздействиями. Для того чтобы понять трудности, возникающие при описании фрагментации, достаточно упомянуть, что в определенном смысле теорию сильной турбулентности можно рассматривать как фрагментацию вихрей. Фрагментация также играет важную роль в современных технологических процессах. По этим причинам интерес к экспериментальному и те-

оретическому исследованию этого процесса не угасает и по сей день.

Основными участниками фрагментации являются фрагменты. Фрагмент в простейшем случае определяется одним характерным параметром, роль которого может играть размер, масса или объем фрагмента. В процессе фрагментации фрагменты только разрушаются. Обычно для описания статистических свойств большого числа фрагментов используется функция распределения фрагментов по размерам. Согласно многочисленным экспериментальным исследованиям процессов фрагментации, в природе наиболее часто реализуются степенные распределения фрагментов по размерам (или по массам) [2–17].

Существует несколько теоретических подходов к описанию процессов фрагментации. Один из них, предложенный в работе Колмогорова [18], основан на весьма специальных предположениях о вероятностях распада фрагментов на  $n$  частей и доказательстве предельной теоремы о логарифмически-нормальном распределении фрагментов по размерам. Однако в этом подходе вероятности распада фрагментов не зависят от их размеров. Кроме того,

\*E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

подход базируется на ряде математических ограничений, практически не учитывающих коллективный характер дробления и физические условия, приводящие к разрушению фрагментов. Обобщение этой теории на случай вероятностей распада, зависящих от размеров фрагментов, отсутствует к настоящему времени, несмотря на попытки такого обобщения [19].

Другой подход возникает при взгляде на процесс дробления как на обратный процессу слипания, например, коалесценции. Тогда появляется возможность описания процесса дробления с помощью кинетического уравнения со «столкновительным» членом, описывающим распад фрагментов. В рамках этого подхода рассмотрены одномерные [20–23] и двумерные [24–26] случаи. Большой прогресс достигнут в интегрировании этих уравнений. Основная проблема таких подходов связана с необходимостью знания вероятностей распада фрагментов в коллективной среде. Однако неясны физические принципы задания этих вероятностей. Кроме того, прямая зависимость решений кинетического уравнения от вероятностей распада означает, по сути, эквивалентность задания вероятностей распада заданию вида функции распределения.

Еще одно направление основано на моделировании процессов разрушения. Основная идея одной из наиболее распространенных моделей [27–29] состоит в предположении о случайном первоначальном распределении трещин (и дефектов) в разрушаемом объекте. Эти трещины, при воздействии на них внешних факторов, приводят к разрушению объекта. Первоначальное распределение трещин в работах [27–29] обычно задается законом Пуассона. Другой подход [20–33] заключается в моделировании случайного разрыва связей в двумерной решетке (или объекте), состоящей из атомов (или полигонов), т. е. неделимых и неразрушаемых единиц. Отметим, что поведение этих моделей крайне чувствительно к заданным начальным условиям. К тому же, как правило, не учитываются взаимодействие и движение трещин и дефектов в разрушаемом образце. Следует отметить, что сейчас серьезную проблему составляет удовлетворительное описание движения даже одной трещины, не говоря об их взаимодействии.

Таким образом, при построении теории фрагментации возникает ряд проблем. С одной стороны, фрагментация является сильнонеравновесным процессом, к которому неприменимы термодинамические принципы. С другой стороны, отсутствует теория, описывающая сильное взаимодействие фраг-

ментов между собой. Дополнительно построение кинетической теории фрагментации осложнено отсутствием динамических уравнений, описывающих эволюцию фрагментов в процессе дробления.

В работе используем подход, основанный на общих законах сохранения, заведомо выполняющихся при дроблении объектов самой общей природы. Это закон сохранения суммарной массы фрагментов и условие баланса энергии [34]. Детально рассмотрена квазилинейная теория фрагментации. Этот общий подход расширен переходом к идеологии потоков в пространстве размеров, что позволило дополнить общие принципы и развить минимальную теорию фрагментации. В качестве дополнительного принципа используется убывание потока объема фрагментов с энергией, затраченной на разрушение. Показано, что характер убывания потока непосредственно связан с видом степенного распределения фрагментов по размерам. Такая минимальная теория позволила получить универсальные асимптотики функции распределения фрагментов по размерам и привела к естественной физической классификации теорий фрагментации. Развита и более общая нелинейная теория сильной фрагментации. Показан выход на универсальную асимптотику решения нелинейного кинетического уравнения, удовлетворяющего обоим основным принципам. В заключение обсуждается согласованность полученных асимптотик функции распределения фрагментов с экспериментальными наблюдениями.

## 2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ФРАГМЕНТАЦИИ

Прежде чем перейти к обсуждению фрагментации, задержимся на важном элементе теории — определении понятия фрагмента. Существуют два геометрических свойства, позволяющих говорить о некотором физическом или математическом объекте как о фрагменте. Во-первых, этот объект должен иметь конечную внутреннюю меру. В качестве таковой удобно представлять массу или объем. Во-вторых, он должен обладать границей, мера которой также должна быть конечна. В качестве меры границы можно понимать площадь поверхности фрагмента. Присутствие обоих этих свойств одинаково важно. Действительно, легко представить себе фрагменты одинакового объема и с разными площадями поверхностей, как и наоборот.

Таким образом, определение фрагмента выделяет две исключительно важные геометрические ме-

ры, на которых должны основываться все теории фрагментации. Эти меры фактически навязывают физические принципы, необходимые для построения теории фрагментации.

С физической точки зрения, возможно существование и других, уже не геометрических, мер, характеризующих внутреннее состояние фрагмента. В процессе разрушения отдельного фрагмента на некоторое число более мелких фрагментов возможны два типа физического поведения: 1) когда внутренние состояния фрагментов не меняются; 2) когда претерпевают изменения и внутренние состояния фрагментов. Все существующие теории фрагментации ограничиваются естественным и наиболее простым предположением об отсутствии изменения внутренних состояний фрагментов в процессе дробления. Такое предположение обосновано как простой, так и реализуемостью этого случая в большом числе физических систем. Далее ограничимся также этим приближением. Две геометрические меры фрагментов при наличии не слишком больших отклонений в формах фрагментов не являются абсолютно произвольными и связаны, по крайней мере статистически, определенным соотношением. При этом существует выбор, какой параметр, характеризующий фрагмент, выбрать в качестве независимого. Это может быть одна из мер, например масса фрагмента или характерный размер фрагмента. Интуитивно ясно, что размер фрагмента определяет как его объем, так и его площадь поверхности. Именно последний выбор, возможно, не самый удобный, но более традиционный и будет использован в работе.

Следующее замечание касается роли времени в теории фрагментации. Хотя процессы фрагментации развиваются со временем, с физической точки зрения более естественно рассматривать в качестве такого параметра энергию, затраченную на разрушение. Действительно, процесс фрагментации развивается под внешним воздействием, при прекращении которого прекращается и разрушение фрагментов, хотя течение времени не прекращается. В определенном смысле связать фрагментацию со временем можно благодаря пересчету энергии, затраченной на разрушение, на соответствующий временной интервал. Однако более естественно использовать именно энергию в качестве физического «времени», в котором развивается процесс фрагментации.

В работе изучается фрагментация  $D$ -мерных фрагментов ( $2 \leq D \leq 3$ ), и в этом смысле ее можно отнести к многомерной теории фрагментации. Основное предположение сводится к гипотезе о сла-

бом различии форм фрагментов. Это означает, что возникающие при фрагментации фрагменты имеют близкие характерные масштабы по всем направлениям или, более точно, статистически подобны. Другими словами, при фрагментации в реализациях одновременно не присутствуют фрагменты, близкие к кубическим или сферическим формам, и «иглоподобные» фрагменты, имеющие сильную анизотропию размеров в различных направлениях. Разумеется, случай анизотропных фрагментов при подобии их форм можно изучить аналогично, выбирая в качестве характерного масштаба, например, максимальный.

Рассмотрим эволюцию фрагментов при дроблении в среде, состоящей из большого числа сильно-взаимодействующих фрагментов. Конкретный механизм разрушения на данном этапе несуществен. Важно только, что дробление происходит в результате подвода энергии извне (например, за счет внешней нагрузки, удара и т. п.). Введем огрубленное описание свойств такой среды, используя функцию распределения  $f(R, E)$  в пространстве размеров фрагментов. Функция распределения  $f(R, E)$  определяет число фрагментов в среде  $dN = f(R, E) dR$  с характерными размерами в интервале  $(R, R + dR)$  после «вложения» в среду энергии  $E$ , затраченной на разрушение фрагментов. Условие нормировки:

$$N(E) = \int_0^{\infty} f(R, E) dR, \quad (1)$$

где  $N(E)$  — число фрагментов в среде при затраченной на их разрушение энергии  $E$ . Понятно, что величина  $E$  в силу монотонности играет роль времени в рассматриваемой задаче, т. е. эволюция фрагментов происходит с увеличением величины работы (идущей на дробление фрагментов), совершаемой внешними воздействиями.

Основной физический принцип, заведомо выполняемый в рассматриваемом случае, — это закон сохранения вещества (или массы). В силу используемого описания в терминах  $f(R, E)$  нам необходима связь между массами фрагментов и их объемами. При наличии такой связи можно трансформировать закон сохранения массы в закон сохранения объема. Это означает, что необходимо ограничиться рассмотрением таких сред, фрагменты которых не меняют свою плотность под внешними нагрузками. С физической точки зрения, большинство сред хорошо удовлетворяют этому свойству. В принципе, можно избежать этого предположения, используя описание процесса дробления в терминах функции распреде-

ления  $f(m, E)$  по массам фрагментов  $m$ . Другими словами, это предположение не является существенным, и его можно исключить, переформулировав теорию в других терминах.

Прежде чем перейти к формулировке необходимых законов сохранения в терминах введенной функции распределения  $f(R, E)$ , обсудим более детально общие свойства фрагментов. Рассмотрим наиболее общий случай, когда возникающие в процессе разрушения фрагменты обладают фрактальной поверхностью. В качестве основной характеристики фрактальной поверхности фрагментов будем использовать ее фрактальную размерность  $D_F$ . В частности, случай гладких поверхностей  $D$ -мерных фрагментов соответствует  $D_F = D - 1$ . Установим теперь связь между радиусом  $R$  фрагмента, его объемом и поверхностью. Начнем с зависимости поверхности отдельного фрагмента от его радиуса  $R$ . Для этого поверхность фрагмента покрывается окрестностями малого радиуса  $\Delta R \ll R$  и подсчитывается количество этих окрестностей  $N(\Delta R/R)$ . Тогда площадь поверхности определяется как

$$S \sim N\left(\frac{\Delta R}{R}\right) \Delta R^{D-1}. \quad (2)$$

По определению, число таких окрестностей для фрактальной поверхности равно

$$N\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{-D_F}. \quad (3)$$

Откуда легко получить, что поверхность фрагмента зависит от его радиуса согласно соотношению

$$S \propto R^{D_F}. \quad (4)$$

Таким образом, площадь поверхности фрагментов с изменением их размеров меняется по закону (4) с более высоким показателем степени, чем в случае гладких фрагментов. Значение фрактальной размерности  $D - 1 \leq D_F < D$ , и гладким поверхностям соответствует  $D_F = D - 1$ .

Аналогично находится выражение для зависимости объема от радиуса фрагмента. Поверхности фрагмента покрываются сферическими окрестностями радиуса  $\Delta R$ , и подсчитывается их число, при этом объем каждой сферы порядка  $\Delta R^D$ :

$$V = V_0 \left[ 1 - \beta \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^{D-D_F} \right], \quad (5)$$

где  $V_0 \propto R^D$  — объем фрагмента с гладкой поверхностью, а  $\beta$  — некая константа. Второй член в скобках

является малой величиной, и им можно пренебречь, поскольку, фактически, он представляет собой поправку к объему вследствие изрезанности границ фрагментов, которая мала из-за малой толщины поверхностного слоя. Поэтому

$$V \propto R^D. \quad (6)$$

Далее будем предполагать, что масса таких фрагментов пропорциональна объему  $R^D$ , и закон сохранения вещества трансформируется в закон сохранения суммарного объема:

$$dm = 0 \rightarrow dV = 0.$$

Этот закон сохранения в интегральной форме в терминах функции распределения принимает вид

$$\int_0^\infty R^D f(R, E) dR = \int_0^\infty R^D f_0(R) dR, \quad (7)$$

где  $f_0(R)$  — начальная функция распределения фрагментов по размерам. Закон сохранения суммарного объема (7) (или массы) и является общепринятым принципом фрагментации.

Теперь ограничимся процессами фрагментации, в которых внутренние состояния фрагментов не меняются при фрагментации. Поэтому без потери общности можно утверждать, что основная часть энергии, вложенной в систему, идет на разрушение фрагментов, т.е. на образование новых поверхностей. Этот закон сохранения можно записать в дифференциальной форме:

$$E_S dS = dE.$$

Здесь  $dE$  изменение энергии, затраченной на разрушение фрагментов,  $E_S$  — энергия единицы поверхности фрагментов,  $dS$  — увеличение поверхности фрагментов при разрушении под воздействием затраченной энергии  $dE$ . Интегральная форма этого закона сохранения,

$$E_S (S - S_0) = E, \quad (8)$$

очевидна. Здесь  $E$  — полученная извне энергия, затраченная на разрушение фрагментов,  $S$  — суммарная площадь поверхности фрагментов после разрушения под воздействием энергии  $E$ ,  $S_0$  — начальная площадь поверхности фрагментов. Поверхность фрагмента в зависимости от размера меняется по закону (4). Тогда уравнение баланса (8) запишем в терминах функции распределения:

$$A \int_0^\infty R^{D_F} f(R, E) dR = \frac{E}{E_S} + S_0, \quad (9)$$

где  $A$  — постоянный параметр, характеризующий форму фрагментов. Условие баланса энергии (9) и служит дополнительным принципом теории фрагментации.

Таким образом, общая теория фрагментации должна основываться на этих двух простых физических принципах. Для частного случая  $D = 3$  и  $D_F = 2$  использование таких принципов было предложено в работе [34]. Теперь выясним, какие физические следствия можно установить исходя из этих принципов.

### 3. КВАЗИЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ФРАГМЕНТАЦИИ

Наличие закона сохранения суммарного объема (7) означает, что функция распределения, в случае общего положения удовлетворяет уравнению непрерывности потока

$$\frac{\partial R^D f}{\partial E} = \frac{\partial P}{\partial R}, \quad (10)$$

где  $P$  — поток объема фрагментов в пространстве размеров. Начнем с простейшего линейного кинетического уравнения. Тогда поток линеен по функции распределения. Это означает, что  $P = v(R, E)f(R, E)$ . Физический смысл  $v(R, E)$  очевиден — это неизвестная пока скорость переноса объема в пространстве размеров. Удобно использовать обозначение

$$v(R, E) \equiv \gamma(R, E)R^{D+1}/D,$$

а функцию  $\gamma(R, E)$  далее будем называть скоростью дробления. Теперь, используя вид потока, запишем кинетическое уравнение в явном виде:

$$\frac{\partial f}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\gamma}{D} R f \right) = f \gamma. \quad (11)$$

В частности, уравнение (11) правильно описывает функцию распределения фрагментов при их распаде, например, на две части в единицу «времени»  $E$ . Этот случай более детально обсуждается в работе [35]. Однако в нашем случае коллективный характер дробления требует самосогласованным образом определить неизвестную функцию  $\gamma(R, E)$ . В принципе, прямой путь ее определения сводится к решению задачи о разрушении выбранного фрагмента в определенном окружении других фрагментов под внешними нагрузками. Даже при довольно сильных упрощениях эта задача математически безнадежна,

поэтому рассмотрим другую возможность. Попытаемся доопределить ее, используя второй принцип теории фрагментации (9). Тогда система уравнений, определяющая эволюцию функции распределения по размерам, состоит из уравнений (11) и (9).

Перейдем к анализу этой системы уравнений. Такой тип уравнений довольно редко встречается в физических задачах. Причина этого заключается в том, что дифференциальное уравнение (11) содержит неизвестную функцию  $\gamma = \gamma(R, E)$ , которая определяется интегральным уравнением (9), не содержащим  $\gamma$  в явном виде. Для анализа системы уравнений (11), (9) удобно перейти к лагранжевым переменным  $R_0, E$ . В этих переменных уравнение (11) имеет точное решение вида

$$f(R, E) = f_0(R_0) \left( \frac{R_0}{R(R_0, E)} \right)^D \frac{dR_0}{dR}, \quad (12)$$

где  $f_0(R_0)$  — начальная функция распределения фрагментов по размерам, а  $R = R(R_0, E)$  — формальное решение уравнения

$$\frac{dR^D}{dE} = -\gamma(R, E)R^D \quad (13)$$

(пока неизвестное), определяющее эволюцию фрагментов, имеющих размер  $R_0$  при  $E = 0$ , с увеличением вкладываемой энергии  $E$ .

Рассмотрим теперь, к каким ограничениям на  $R = R(R_0, E)$  или на вид функции  $\gamma(R(R_0, E), E)$  приводит уравнение (9). Переходя в уравнении (9) к лагранжевым переменным и используя решение (12), получим

$$\int_0^\infty A f_0(R_0) \left( \frac{R_0^D}{R^{D-D_F}} - R_0^{D_F} \right) dR_0 = \frac{E}{E_S}. \quad (14)$$

Это уравнение должно выполняться для любых начальных функций распределения  $f_0(R_0)$ . Естественно, возможные начальные функции распределения  $f_0(R_0)$  — положительно определенные функции. Поэтому выражение в скобках в уравнении (14) должно быть линейной функцией вложенной энергии  $E$ :

$$\frac{R_0^D}{R^{D-D_F}} - R_0^{D_F} = C(R_0)E. \quad (15)$$

Здесь  $C(R_0)$  — произвольная функция только начальных размеров  $R_0$ . Полученное выражение (15) — исключительно важное. С одной стороны, оно позволяет найти закон эволюции размеров  $R = R(R_0, E)$  (с точностью до произвольной функции  $C(R_0)$ ), с другой стороны — установить

физический смысл функции  $C(R_0)$ . Решая уравнение (15) относительно  $R$ , получим зависимость  $R$  от  $E$  и  $R_0$  вида

$$R = \left( \frac{R_0^D}{C(R_0) E + R_0^{D_F}} \right)^{1/(D-D_F)}. \quad (16)$$

Дифференцируя (16) по  $E$  и сравнивая с уравнением эволюции размеров (13), получим выражение для  $\gamma(R_0, E)$ , из которого при  $E = 0$  следует, что функция  $C(R_0)$  определяется функцией  $\gamma_0(R_0) \equiv \gamma(R_0, E)|_{E=0}$  согласно следующему соотношению:

$$C(R_0) = \frac{\gamma_0(R_0) R_0^{D_F}}{D} (D - D_F). \quad (17)$$

Таким образом, интегральное условие баланса (9) определяет закон эволюции фрагментов по размерам с увеличением затраченной на их дробление энергии  $E$ ,

$$R = R_0 \left( 1 + \frac{\gamma_0(R_0) E}{D} (D - D_F) \right)^{-1/(D-D_F)}, \quad (18)$$

и доопределяет скорость дробления  $\gamma(R_0, E)$  с точностью до произвольной функции  $\gamma_0(R_0)$ . Входящая в него функция  $\gamma_0(R_0)$  определяет начальную скорость дробления фрагментов и не зависит от исходной системы уравнений (13), (9). Произвол в выборе  $\gamma_0(R_0)$  имеет глубокую физическую природу. Причина этого связана с существованием различных механизмов дробления или, точнее, типов материалов, которые могут разрушаться по различным сценариям. Эти сценарии определяются более частными различиями в структуре дробящихся материалов. На эти процессы влияет много различных факторов, например, различия в прочности материалов, в их дефектной структуре, кристаллической структуре, и много других. Поэтому общая теория должна содержать некоторый произвол в выборе функции  $\gamma_0(R_0)$ , позволяющий переходить к различным частным сценариям дробления, не нарушая общих принципов. Именно такая свобода в выборе частных сценариев становится допустимой благодаря вхождению функции  $\gamma_0(R_0)$  в квазилинейную теорию. Единственное интегральное условие для  $\gamma_0(R_0)$  получаем при подстановке соотношения (18) в уравнение (14):

$$\int_0^\infty f_0(R_0) \gamma_0(R_0) R_0^{D_F} dR_0 = \frac{D}{D - D_F} \frac{A^{-1}}{E_S}. \quad (19)$$

Это довольно слабое ограничение на амплитуду  $\gamma_0(R_0)$ . Однако важность этого условия определяется физическим следствием того, что характер дробления (т. е., фактически,  $\gamma_0(R_0)$ ) зависит не только

от физических свойств фрагментов, но и от их коллективных свойств — от начальной функции распределения.

Таким образом, знание двух начальных условий,  $f_0(R_0)$  и  $\gamma_0(R_0)$ , связанных слабым условием (19), полностью определяет эволюцию функции распределения фрагментов по размерам в зависимости от затраченной на разрушение энергии  $E$ . Используя решения (18) и (12), получим

$$f(R, E) = f_0(R_0) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{2D-D_F+1} \times \left\{ 1 + \frac{E}{D} \left[ \gamma_0(R_0)(D-D_F) - R_0 \frac{\partial \gamma_0(R_0)}{\partial R_0} \right] \right\}^{-1}, \quad (20)$$

где  $f(R, E)$  — функция распределения фрагментов в лагранжевых координатах.

Для перехода к исходным (эйлеровым) переменным необходимо явное выражение для функции  $\gamma_0(R_0)$ . Вопрос о виде этой функции не намного проще, чем о виде функции  $\gamma(R, E)$ . Тем не менее существуют некоторые общие естественные ограничения на  $\gamma_0(R_0)$ , позволяющие сделать качественные выводы о характере ее поведения. Прежде всего, естественное требование  $\gamma_0(0) = 0$  (невозможность разрушения фрагментов нулевого размера). В силу положительной определенности функции  $\gamma_0(R_0)$  (отсутствие слипания), она монотонно возрастает в области малых масштабов  $R_0$ .

Кроме того, в области малых масштабов возникает и дополнительное ограничение на скорость убывания  $\gamma_0(R_0)$ . Это условие связано с положительной определенностью функции распределения  $f(R, E)$ . В общем случае требование положительности  $f(R, E)$  приводит к следующему условию:

$$1 + \frac{E}{D} \left[ \gamma_0(R_0)(D - D_F) - R_0 \frac{\partial \gamma_0(R_0)}{\partial R_0} \right] \geq 0. \quad (21)$$

Перейдем теперь к обсуждению поведения функции  $\gamma_0(R_0)$  в области крупномасштабной компоненты. В этой области  $\gamma_0(R_0)$  — монотонно убывающая функция. К этому выводу можно прийти, исходя, например, из энергетических соображений. Действительно, разрушение крупных фрагментов требует больших затрат энергии в силу больших поверхностей разломов, образующихся при их разрушении.

В крупномасштабной области  $R_0 > R_{0\text{ext}}$ , где  $\gamma'_0(R_{0\text{ext}}) = 0$ , вследствие того, что  $\gamma'_0(R_0) < 0$ , неравенство (21) всегда выполнено. Поэтому нетривиальное ограничение на  $\gamma_0(R_0)$  возникает только в области  $0 < R_0 < R_{0\text{ext}}$ . Легко доказать, что выполнение

неравенства (21) приводит к следующему ограничению на  $\gamma_0(R_0)$  в этой области:

$$\gamma_0(R_0) \leq CR_0^{D-D_F} - \frac{D}{E(D-D_F)},$$

где  $C$  — константа. Так как это условие должно быть выполнено при любых значениях  $E$ , необходимое ограничение на  $\gamma_0(R_0)$  сводится к неравенству

$$\gamma_0(R_0) \leq CR_0^{D-D_F}. \quad (22)$$

При выполнении этого условия функция распределения по размерам положительно определена при любых значениях энергии  $E$ , затраченной на разрушение. Таким образом, для согласованности теории необходимо, чтобы «скорость» дробления в мелкомасштабной области была ниже некоторой пороговой «скорости», зависящей от фрактальной размерности  $D_F$ .

#### 4. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Детальный анализ функции распределения по размерам требует знания функции  $\gamma_0(R_0)$ . В принципе, это означает необходимость построения более детальной теории, основанной уже на конкретных механизмах разрушения с учетом структурных свойств разрушаемых материалов, или проведение экспериментальных исследований этой функции. Однако описанный выше качественный характер поведения функции  $\gamma_0(R_0)$  позволяет сделать важные выводы об асимптотических свойствах функции распределения по размерам в крупномасштабной области. Рассмотрим более близкие к реальным, распределения фрагментов по размерам. В частности, в таких системах обычно существует размер  $R_{0\max}$ , больше которого в среде фрагментов нет. В силу описанного выше поведения функции  $\gamma_0(R_0)$ , окрестность  $R_{0\max}$  является наиболее медленно эволюционирующей в крупномасштабной области.

Возвращаясь к точному решению (20), проанализируем два качественно различных режима эволюции. Условия, определяющие их, соответствуют неравенствам

$$\gamma_0(R_0) \gg R_0 \frac{\partial \gamma_0(R_0)}{\partial R_0}, \quad R_0 \approx R_{0\max}, \quad (23)$$

$$\gamma_0(R_0) \ll R_0 \frac{\partial \gamma_0(R_0)}{\partial R_0}, \quad R_0 \approx R_{0\max}, \quad (24)$$

определяющим поведение функции  $\gamma_0(R_0)$  в крупномасштабной области.

При выполнении условия (23) в крупномасштабной области, предполагая  $R_0 \approx R_{0\max}$ , легко получить формальную асимптотику

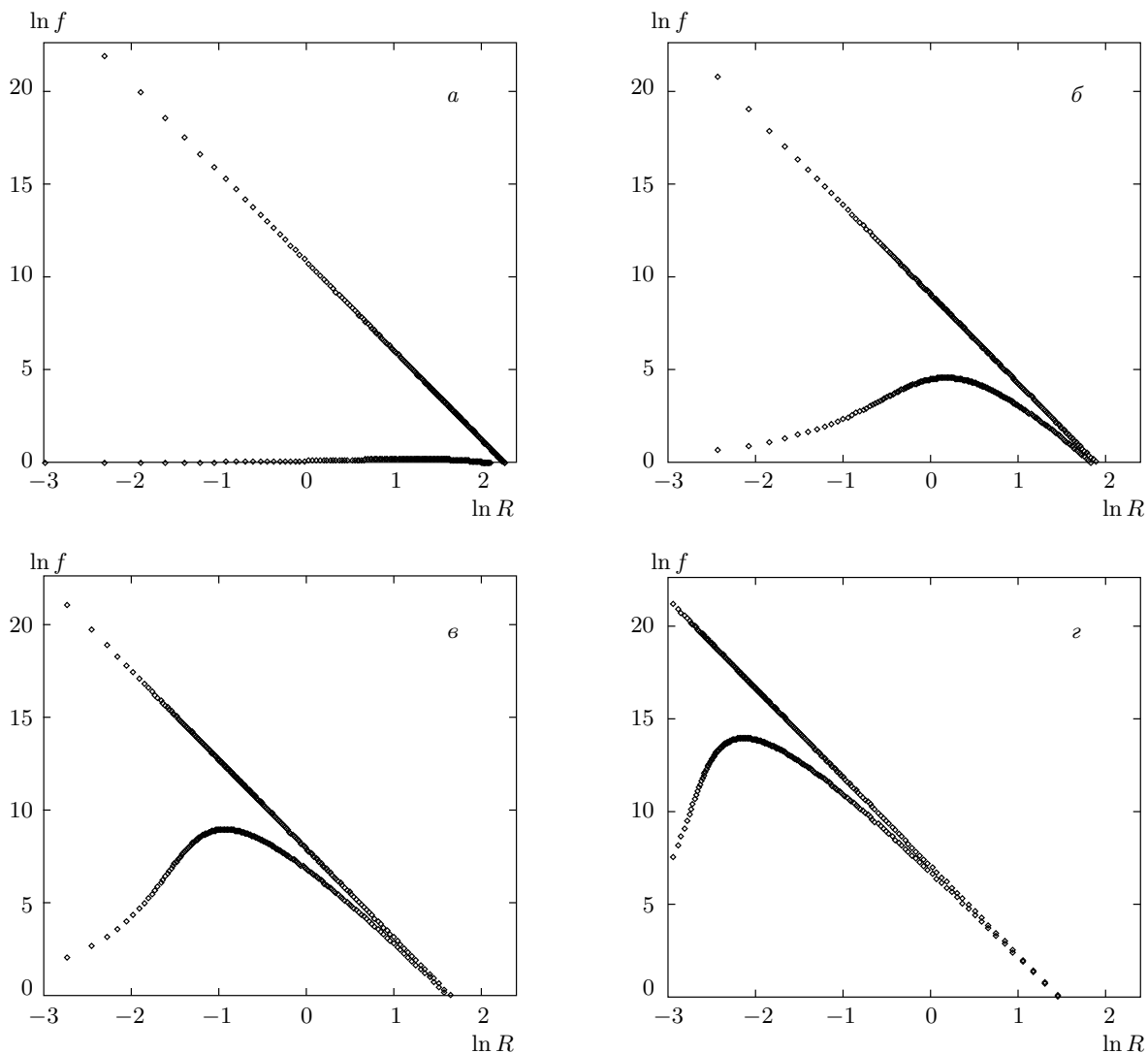
$$f(R, E) \approx f_0(R_{0\max}) \left( \frac{R_{0\max}}{R} \right)^{D+1} \times \left[ 1 - \frac{R_{0\max} \gamma'_0(R_{0\max})}{\frac{D}{E} + \gamma_0(R_{0\max})(D-D_F)} \right]^{-1} \propto R^{-(D+1)}. \quad (25)$$

При выполнении условия (24) асимптотика имеет вид

$$f(R, E) \approx f_0(R_{0\max}) \left( \frac{R_{0\max}}{R} \right)^{2D-D_F+1} \times \left[ 1 - \frac{E}{D} R_{0\max} \gamma'_0(R_{0\max}) \right]^{-1} \propto R^{-(2D-D_F+1)}. \quad (26)$$

Между полученными асимптотическими режимами существует принципиальное различие. Причина этого связана с характером релаксации функции распределения при выполнении неравенств (23) или (24). При выполнении неравенства (24) легко доказать, что лагранжевы частицы (или характеристики уравнения (11)) с начальными положениями в крупномасштабной области разбегаются. Другими словами, начальная область  $\Delta R_0$  с ростом энергии переходит в область  $\Delta R \gg \Delta R_0$ . Благодаря этому, в процессе эволюции память о деталях начального распределения теряется и происходит релаксация к асимптотике (26). Действительно,  $f_0(R_0) \approx f_0(R_{0\max})$  в малой области  $\Delta R_0$  в окрестности  $R_{0\max}$ , и только эта информация о начальной функции распределения сохраняется в крупномасштабной области  $\Delta R \gg \Delta R_0$ . Детали распределения  $f_0(R_0)$  не влияют на главный вклад асимптотического разложения  $f(R)$  в крупномасштабной области. Результаты численного анализа хорошо согласуются с этими представлениями. На рис. 1 показан пример эволюции функции распределения (20) в режиме (24). Хорошо виден выход в предсказанный асимптотический режим  $f(R, E) \propto R^{-(2D-D_F+1)}$ .

При выполнении неравенства (23) характеристики кинетического уравнения (11) сходятся, и широкий интервал  $\Delta R_0$  из крупномасштабной области сжимается с ростом энергии  $E$ , т. е.  $\Delta R \ll \Delta R_0$ .



**Рис. 1.** Точная функция распределения (20) (кривая) выходит на асимптотический режим (26) (прямая) при выбранном значении фрактальной размерности  $D_F = 2.2$  и возрастающих значениях энергии  $E = 0.01$  (а),  $0.3$  (б),  $1$  (в),  $3$  (г). Наклон прямой линии на графиках соответствует показателю степени в асимптотическом законе (26).  
 Параметры моделирования:  $D = 3, R_{0\max} = 10$

Это означает сохранение памяти о начальном распределении  $f_0(R_0)$  и, следовательно, отсутствие релаксации к формальной асимптотике (25). Таким образом, при выполнении условия (24) функция распределения релаксирует к универсальной асимптотике (26), а при обратном условии (23) релаксация к полученной асимптотике (25) отсутствует.

**5. ПОТОКИ В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРОВ**

Для более ясного представления о квазилинейной теории и о возможности ее обобщения пере-

формулируем результаты в более общих физических терминах. Это позволит лучше понять принципы, лежащие в основании формирования универсальных асимптотик. Начнем с основных принципов. Закон сохранения суммарного объема означает, что плотность объема фрагментов  $R^D f$  удовлетворяет уравнению непрерывности (10). Поток  $P$  в квазилинейной теории однозначно связан с ранее введенной скоростью фрагментации  $\gamma$ :

$$P = \frac{\gamma(R, E)R^{D+1}}{D} f.$$



Его вид или, точнее, вид  $\gamma$  доопределяется из второго принципа — баланса энергии. Выясним дифференциальный механизм выполнения баланса энергии. Для этого переформулируем условие баланса энергии в терминах потока поверхности в пространстве размеров или, другими словами, в дифференциальной форме. Дифференцируя по  $E$  условие баланса (9), получим некоторый закон сохранения

$$\int_0^\infty \frac{\partial R^{D_F} f}{\partial E} dR = \alpha', \quad (27)$$

где  $\alpha' = 1/AE_S$  — некоторая константа. Для выполнения этого условия дифференциальная форма уравнения непрерывности потока площади фрагментов должна обладать вполне определенными свойствами. В общем виде изменение плотности поверхности (подынтегрального выражения) с энергией должно определяться двумя вкладами:

$$\frac{\partial R^{D_F} f}{\partial E} = \frac{\partial P_S}{\partial R} + I_i. \quad (28)$$

Первое слагаемое — потоковое, оно и обеспечивает изменение суммарной поверхности фрагментов за счет потока  $P_S$  в пространстве размеров. Второе слагаемое не связано с потоком и характеризует производство поверхности фрагментов при дроблении. Ясно, что именно это слагаемое должно обеспечивать выполнение условия баланса (9) или соотношения (27). При этом априори существуют две возможности естественного выбора источника поверхности в пространстве размеров. Обе они связаны с инвариантными свойствами исходного кинетического уравнения (10). Согласно основным принципам (это — сохранение суммарного объема и линейный рост суммарной поверхности с энергией  $E$ ), источник поверхности может выражаться через объем или поверхность фрагментов. Первая возможность соответствует выбору источника  $I_i$ , пропорционального плотности объема фрагментов:

$$I_i^V = \frac{\alpha}{V_0} R^D f, \quad (29)$$

где  $V_0$  — суммарный объем фрагментов, вторая — пропорционального плотности поверхности фрагментов:

$$I_i^S = \frac{R^{D_F} f}{E}. \quad (30)$$

С физической точки зрения, выбор вида источников соответствует выбору механизма осуществления

баланса энергии (9). Легко проверить выполнение условия (27) при выборе  $I_i$  в виде как (29), так и (30). Разумеется, в рассматриваемой квазилинейной теории реализуется один из этих механизмов. Попытаемся выяснить, какой механизм реализуется в ней. Для этого проанализируем более детально следствия выбора механизма выполнения баланса энергии.

Умножая уравнение (28) на  $R^{D-D_F}$ , получим

$$\frac{\partial R^D f}{\partial E} = R^{D-D_F} \frac{\partial P_S}{\partial R} + R^{D-D_F} I_i. \quad (31)$$

Ясно, что это уравнение должно совпадать с исходным уравнением (11) или (10). Обсудим теперь связь между потоком объема и потоком поверхности. Объем элементарного фрагмента пропорционален  $R^D$ , а его поверхность —  $R^{D_F}$ . Перенос объема приводит и к переносу поверхности в пространстве размеров. Поэтому естественно предположить, что в соответствии с этим потоки связаны:

$$P = R^{D-D_F} P_S. \quad (32)$$

Разумеется, это можно установить и из требования совпадения уравнения (31) с исходным кинетическим уравнением, не обращаясь к физическому смыслу. Подставим связь (32) в уравнение (31) и после элементарных преобразований получим уравнение

$$\frac{\partial R^D f}{\partial E} = \frac{\partial P}{\partial R} - (D - D_F) R^{-1} P + R^{D-D_F} I_i.$$

Сравним это уравнение с исходным кинетическим уравнением (10) и получим выражение для общего вида источника поверхности в пространстве размеров:

$$I_i = (D - D_F) \frac{P}{R^{D-D_F+1}}. \quad (33)$$

Выразим это соотношение в квазилинейном приближении, используя приведенную зависимость потока  $P = (\gamma(R, E) R^{D+1}/D) f$ :

$$I_i = \frac{D - D_F}{D} \gamma(R, E) R^{D_F} f. \quad (34)$$

Для того чтобы найти вид источника, используем теперь функцию  $\gamma$ , которая следует из соотношений (13) и (18):

$$\gamma(R, E) = \gamma_0(R_0) \left[ 1 + E \frac{D - D_F}{D} \gamma_0(R_0) \right]^{-1}. \quad (35)$$

Поэтому при больших энергиях  $[E(D - D_F)/D] \times \gamma_0(R_0) \gg 1$  асимптотически выполняется

$$\gamma \approx \frac{D}{E(D - D_F)}. \quad (36)$$

Это исключительно простое и важное свойство скорости дробления. Замечательно, что асимптотический вид  $\gamma$  не зависит от начальной скорости дробления и даже от размеров фрагментов, а зависит только от фундаментальных характеристик — размерности фрагментов  $D$  и фрактальной размерности  $D_F$ . В этом проявляется универсальность скорости дробления. Такой вид  $\gamma$  приводит к асимптотическому виду источника:

$$I_i \approx \frac{R^{D_F}}{E} f.$$

Сравнивая полученное выражение с видом источника (30), легко установить, что механизмом поддержания баланса энергии является источник плотности поверхности (30). В этом можно убедиться и без использования асимптотического вида  $\gamma$ . Теперь, основываясь на универсальном асимптотическом виде скорости дробления (36), можно проанализировать асимптотики функции распределения более простым образом.

## 6. МИНИМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ФРАГМЕНТАЦИИ

Действительно, используя асимптотический вид (36), можно получить асимптотическое кинетическое уравнение для функции распределения при больших энергиях:

$$\frac{\partial R^D f}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{R^{D+1} f}{(D - D_F) E} \right). \quad (37)$$

В определенном смысле, это универсальный предел для теории фрагментации, не зависящий от механизмов дробления, т. е. от  $\gamma_0(R_0)$ . Обратим внимание, что в таком варианте явно становится видна линейность асимптотической теории. Нелинейность, если и проявляется, то только на стадии релаксации к асимптотическому режиму. В этом смысле, это асимптотически свободная теория. Решения уравнения (37) легко получить. Однако, поскольку это уравнение асимптотическое, задача Коши для него не вполне естественна. Причина этого в том, что пропущен некоторый начальный этап эволюции или этап релаксации в асимптотический режим. Поэтому нас скорее должны интересовать все типы решений этого уравнения. Соответственно, также нужно установить физически разумный способ их

классификации. Рассмотрим общее решение уравнения (37):

$$f(R, E) = \frac{D - D_F}{R^{D+1}} \varphi(ER^{D-D_F}), \quad (38)$$

где  $\varphi$  — произвольная функция. На этих решениях сохраняется объем фрагментов, а суммарная площадь фрагментов растет линейно с энергией разрушения  $E$ , независимо от вида  $\varphi$ . Физический смысл  $\varphi$  легко установить, заметив что функция  $\varphi$  связана с потоком объема равенством

$$\varphi(ER^{D-D_F}) = EP, \quad (39)$$

что позволяет сформулировать простые физические ограничения на эту функцию. Действительно, так как источники объема фрагментов отсутствуют, значение потока при произвольном фиксированном размере фрагмента в крупномасштабной области должно убывать с энергией, по крайней мере асимптотически. Физически это связано с невозможностью процессов, увеличивающих размер фрагментов в теории фрагментации. Фрагменты только разрушаются. Кроме того, соотношение (39) указывает на связь зависимости потока от энергии с зависимостью функции распределения  $f(R, E)$  от размеров фрагментов.

Естественный принцип убывания потока объема фрагментов в крупномасштабной области и является необходимым дополнительным принципом в такой минимальной теории фрагментации. Предположим, что поток  $P$  в крупномасштабной области разлагается в ряд по обратным степеням энергии:

$$P = P_0 + P_1 \frac{1}{E} + P_2 \left( \frac{1}{E} \right)^2 + \dots$$

Тогда при  $P_0 = 0$  в главном порядке

$$P \propto \frac{1}{E} \quad (40)$$

при  $E \rightarrow \infty$ . В этом случае из соотношения (39) следует, что  $\varphi$  при больших  $R$  стремится к постоянному значению  $\varphi = \text{const}$ . Такое асимптотическое ограничение приводит после учета его в соотношении (38) к универсальной асимптотике функции распределения по размерам в крупномасштабной области:

$$f(R, E) \approx \text{const} \cdot \frac{D - D_F}{R^{D+1}}. \quad (41)$$

Показатель степени зависит только от размерности фрагмента. Обратим внимание на то, что асимптотика в этой области не зависит от энергии. Таким образом, эта асимптотика соответствует первому убывающему слагаемому в разложении потока объема.

При обращении в нуль этого вклада, что соответствует вырожденному случаю, скорость убывания потока возрастает. При обращении в нуль  $P_1$  и, соответственно, при более быстром убывании потока,

$$P \propto \frac{1}{E^2},$$

асимптотический вид функции  $\varphi$  в крупномасштабной области будет другим. Используя снова соотношение (39) и согласуя его с убыванием потока, получим

$$\varphi \propto \frac{1}{ER^{(D-D_F)}}.$$

Это приводит к следующей асимптотике функции распределения:

$$f(R, E) \approx \text{const} \cdot \frac{D - D_F}{ER^{2D-D_F+1}}. \quad (42)$$

В этом случае асимптотика в крупномасштабной области уже зависит от энергии. Это означает, что с ростом энергии асимптотики ведут себя по-разному. Этот факт может быть проверен в экспериментах. Таким образом, в крупномасштабной области формируются универсальные степенные асимптотики в зависимости от характера убывания потока. Интервалы, в которых они реализуются, с ростом энергии смещаются в область малых масштабов. Последнее легко обнаружить непосредственно из решения (38). Обращение в нуль последующих членов разложения потока объема означает высокую степень вырождения потока и поэтому в случаях общего положения, по-видимому, не реализуется.

В заключение обсудим случай  $P_0 \neq 0$ . Для теории сильной фрагментации, в которой фрагменты многократно разрушаются, взаимодействуя друг с другом, под воздействием возрастающих внешних воздействий, реализацию постоянного потока  $P = \text{const}$  трудно объяснить. Единственная возможность, в которой этот случай выглядит допустимым, это наличие слабой фрагментации, когда разрушение фрагмента осуществляется в результате единичного или импульсного внешнего воздействия, например удара. В этом случае асимптотика функции распределения фрагментов в крупномасштабной области имеет вид

$$f(R, E) \propto \frac{E}{R^{D_F+1}}. \quad (43)$$

Легко видеть зависимость ее от энергии. Показатель степени асимптотики зависит только от фрактальной размерности поверхности фрагментов.

Таким образом, уравнение (37) совместно с принципом убывания потока можно рассматривать как универсальную минимальную теорию фрагментации. Закон сохранения объема, условие баланса энергии и принцип убывания потока объема приводят в минимальной теории фрагментации к формированию универсальных степенных асимптотик функции распределения фрагментов по размерам в крупномасштабной области. Другими словами, в минимальной теории индекс  $\nu$  убывания потока объема с энергией,  $P \propto E^{-\nu}$ , и показатель  $\alpha$  зависимости функции распределения фрагментов от размеров,  $f \propto R^{-\alpha}$ , связаны соотношением

$$\alpha = 1 + \nu D - (\nu - 1) D_F.$$

Это соотношение аналогично связи между критическими индексами в теории фазовых переходов. Разумеется, в более полной и последовательной теории характер убывания потока объема должен следовать из нее автоматически. В полной теории поток должен сам релаксировать к одному из описанных выше состояний. В качестве дополнительного принципа он нужен только для замены или, точнее, учета нелинейной стадии релаксации в асимптотически свободной теории. Поэтому далее следует проанализировать более детально стадию релаксации в универсальный режим.

Вернемся к анализу асимптотик функции распределения по размерам из точного решения (20) в квазилинейной модели. Используем рассмотренный выше дополнительный физический принцип, позволяющий установить характер асимптотик функции распределения в крупномасштабной области. Для того чтобы понять физическую причину отсутствия релаксации с возрастанием энергии  $E$  функции распределения (20) в асимптотический режим  $f \propto R^{-(D+1)}$ , изучим характер релаксации потока объема.

Используя общий вид потока объема,

$$P = \frac{\gamma(R, E) R^{D+1}}{D} f,$$

вид  $\gamma(R, E)$  (35) и точное решение (20), получим для потока выражение в лагранжевых переменных вида

$$P = \frac{f_0(R_0) R_0^{D+1} \gamma_0(R_0)}{1 + \frac{E}{D} \left[ (D - D_F) \gamma_0(R_0) - R_0 \frac{\partial \gamma_0(R_0)}{\partial R_0} \right]}.$$

Отсюда при больших энергиях

$$\frac{E}{D} \left[ (D - D_F) \gamma_0(R_0) - R_0 \frac{\partial \gamma_0(R_0)}{\partial R_0} \right] \gg 1$$

легко получить

$$P = \frac{1}{E} \frac{D f_0(R_0) R_0^{D+1} \gamma_0(R_0)}{(D - D_F) \gamma_0(R_0) - R_0 \frac{\partial \gamma_0(R_0)}{\partial R_0}} = \frac{K(R_0)}{E}.$$

Это выражение фактически обосновывает принцип убывания потока  $P$  с энергией  $E$ . Однако следует установить степень убывания его с энергией  $E$ . Основная трудность заключается в том, что лагранжевы переменные  $R_0$  являются функциями  $R$  и  $E$ , т. е.  $R_0 = R_0(R, E)$ . При произвольном виде функции  $\gamma_0(R_0)$  переход к эйлеровым переменным  $R, E$  сложен. Тем не менее можно сформулировать условия, при которых поток будет убывать с энергией, как  $1/E$ . Действительно, для этого достаточно знать, что с ростом энергии  $E$  при фиксированном  $R$  начальный размер фрагмента  $R_0$  увеличивается. Другими словами, для выполнения условия  $P \propto 1/E$  функция  $K(R_0)$  при  $R_0 \rightarrow \infty$  должна выходить на постоянное значение, т. е.  $K(R_0) \rightarrow \text{const}$  при  $R_0 \rightarrow \infty$ .

Теперь следует подчеркнуть два важных вывода. Во-первых, при выполнении неравенства (23) выражение для потока упрощается:

$$P = \frac{1}{E} \frac{D f_0(R_0) R_0^{D+1}}{D - D_F}.$$

Отсюда следует, что для убывания потока как  $1/E$ , начальная функция распределения должна иметь асимптотику в крупномасштабной области  $f_0(R_0) \propto R_0^{-(D+1)}$ . Фактически это объясняет отсутствие релаксации в этом предельном случае в терминах потока. Во-вторых, можно обнаружить основную причину вырождения. Выполнение необходимого условия  $K(R_0) \rightarrow \text{const}$  при  $R_0 \rightarrow \infty$  возможно только при наличии, по крайней мере в крупномасштабной области размеров, связи между  $f_0(R_0)$  и  $\gamma_0(R_0)$ . Общая причина этого заключается в том, что в выражение для  $K(R_0)$  входят эти функции. Это заставляет нас вернуться к исходному важному предположению квазилинейной теории, состоящему в том, что функция  $\gamma$  не зависит от функции распределения  $f$ . При всем, казалось бы, общем предположении о  $\gamma$  как о произвольной функции переменных  $R$  и  $E$  этого оказывается недостаточно. С другой стороны, с физической точки зрения, зависимость  $\gamma$  от  $f$  выглядит очень естественно, как и потеря памяти о структуре начальной функции распределения в теории сильной фрагментации.

Таким образом, в рассмотренной квазилинейной теории принцип убывания потока не является избыточным. В определенном смысле он выполняет

роль нелинейной релаксации в универсальный режим. Тем не менее в линейной теории релаксация происходит к вырожденному случаю, согласованному с характером поведения потока как  $1/E^2$ , для широкого класса функций  $\gamma_0(R_0)$ , для которых выполняется условие

$$\gamma_0(R_{0 \max}) \ll R_{0 \max} \left. \frac{\partial \gamma_0(R_0)}{\partial R_0} \right|_{R_{0 \max}}.$$

Механизм релаксации к этому вырожденному случаю обсуждался выше, при выводе асимптотики (26).

Естественно, следует выяснить устойчивость этого результата при отказе от независимости  $\gamma$  от функции  $f$  распределения фрагментов по размерам. Таким образом, для функций  $\gamma_0(R_0)$ , удовлетворяющих условию

$$\gamma_0(R_{0 \max}) \gg R_{0 \max} \left. \frac{\partial \gamma_0(R_0)}{\partial R_0} \right|_{R_{0 \max}},$$

принцип убывания потока избыточен. В противоположном случае этот принцип заменяет нелинейный механизм релаксации к формальной асимптотике

$$f(R) \propto \frac{1}{R^{D+1}},$$

отсутствующий в точном решении. Такая половинчатость квазилинейной теории является неудовлетворительной. Поэтому вернемся к определению  $\gamma$  и, сохраняя общие принципы, построим нелинейную теорию, в которой  $\gamma(R, E, f)$  зависит от функции распределения фрагментов по размерам.

### 7. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Перейдем теперь к обсуждению нелинейной теории фрагментации. Для этого вернемся к исходному кинетическому уравнению (10). Единственное предположение, используемое в квазилинейной теории, это независимость  $\gamma$  от функции  $f$  распределения фрагментов. Рассмотрим теперь более общий нелинейный случай, считая, что  $\gamma$  может зависеть и от  $f$ . Это очень естественно с физической точки зрения. Действительно, скорость дробления фрагментов должна быть отлична от нуля только в области масштабов, где фрагменты описываются функцией распределения  $f(R, E)$ . Для нелинейной теории метод, примененный ранее для решения проблемы, становится неэффективным. Поэтому используем другой подход.

В нелинейном случае обобщенное кинетическое уравнение вида

$$\frac{\partial f R^D}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{R^{D+1} \gamma(R, E, f)}{D} f \right) \equiv \frac{\partial P}{\partial R} \quad (44)$$

по-прежнему гарантирует сохранение суммарного объема фрагментов. Другими словами, существование уравнения непрерывности для плотности объема фрагментов означает, что вдоль характеристик или лагранжевых траекторий сохраняется величина  $f R^D dR$ . Основная проблема сводится к такому выбору  $\gamma$ , при котором выполняется правильный баланс энергии. Для того чтобы сформулировать связанные с этим ограничения на  $\gamma$ , запишем уравнение для плотности поверхности фрагментов из кинетического уравнения (44):

$$\frac{\partial R^{D_F} f}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial R} (R^{D_F - D} G f) + (D - D_F) \frac{R^{D_F} G f}{R^{D+1}}. \quad (45)$$

Здесь для удобства введено обозначение  $G(R, E, f) = R^{D+1} \gamma(R, E, f) / D$ . Интегрируя по  $R$ , получим уравнение баланса энергии в виде

$$\frac{\partial S}{\partial E} = (D - D_F) \int_0^\infty \frac{R^{D_F} G f}{R^{D+1}} dR. \quad (46)$$

Таким образом, для выполнения принципа баланса энергии правая часть этого уравнения не должна зависеть от энергии. Учтем, что  $f R^D dR$  — лагранжев инвариант. Тогда легко понять, что правильный баланс энергии будет выполняться, если величина  $R^{D_F} G / R^{2D+1}$  является лагранжевым инвариантом или сохраняется вдоль характеристик нелинейного кинетического уравнения (44). Другими словами,

$$\frac{d}{dE} \frac{R^{D_F} G}{R^{2D+1}} = 0, \quad (47)$$

где  $d/dE$  — полная производная вдоль неизвестных пока характеристик кинетического уравнения. Запишем это уравнение в эйлеровых переменных:

$$\frac{\partial G}{\partial E} + \frac{\partial G}{\partial f} \frac{df}{dE} + \left( \frac{\partial G}{\partial R} - \kappa \frac{G}{R} \right) \frac{dR}{dE} = 0.$$

Здесь  $\kappa \equiv 2D - D_F + 1$ . Теперь подставим в это уравнение полные производные, следующие из кинетического уравнения (44). Эти соотношения легко получить из уравнения (44):

$$\frac{df}{dE} = \frac{f}{R^D} \frac{\partial G}{\partial R},$$

$$\frac{dR}{dE} = -\frac{1}{R^D} \left( G + f \frac{\partial G}{\partial f} \right).$$

После подстановки получим условие, которому должна удовлетворять величина  $G$  или  $\gamma$ , чтобы выполнялся правильный баланс энергии:

$$R^D \frac{\partial G}{\partial E} + \kappa f \frac{G}{R} \frac{\partial G}{\partial f} + \kappa \frac{G^2}{R} - G \frac{\partial G}{\partial R} = 0. \quad (48)$$

Это важнейшее ограничение на скорость дробления. Решая это нелинейное уравнение, получим скорость дробления, разумеется, содержащую некоторый функциональный произвол. Общее решение уравнения (48) легко найти в неявном виде:

$$(D - D_F) H \left( \frac{\gamma}{R^{D-D_F}}, f R^{2D-D_F+1} \right) \gamma - E(D - D_F) \gamma + D = 0, \quad (49)$$

где  $H$  — произвольная функция двух аргументов. Уравнение баланса энергии будет выполнено независимо от ее выбора. Решение приведено для функции  $\gamma$  с использованием связи  $G(R, E, f) = R^{D+1} \gamma(R, E, f) / D$ . Полученное точное решение для  $\gamma$  обладает замечательными свойствами. При выборе функции  $H$ , не зависящей от второго аргумента, можно строго доказать, что полученная функция  $\gamma$  будет совпадать с использовавшейся ранее в квазилинейной теории. Ее функциональный произвол будет соответствовать произволу в выборе  $\gamma_0(R_0)$ . Также легко видеть, что при больших энергиях  $E$  величина  $\gamma$  по-прежнему асимптотически переходит в предельное значение  $\gamma$  в минимальной теории. Действительно, сохраняя главный порядок с учетом убывания  $\gamma$  с энергией, получим

$$-E(D - D_F) \gamma + D = 0,$$

откуда

$$\gamma = \frac{D}{E(D - D_F)},$$

что в точности совпадает с используемым в минимальной теории значением.

Таким образом, решение (49) позволяет получить нелинейное кинетическое уравнение, точно совместимое с двумя принципами теории фрагментации. Замечательно то, что это уравнение при больших энергиях, в принципе, переходит в построенную ранее минимальную теорию. Разумеется, для построения конкретных теорий фрагментации, произвольная функция  $H$  должна определяться из физических свойств соответствующих способов дробления и свойств материалов или систем, участвующих в фрагментации. Однако нас интересуют универсальные свойства процессов фрагментации. Для

получения такой информации вид функции  $H$  не является принципиальным. Более того, нас далее будет интересовать влияние нелинейных поправок на релаксацию функции распределения фрагментов к универсальным асимптотикам в крупномасштабной области размеров. Основная проблема при построении такой теории возмущения связана с сохранением правильного баланса энергии в любом порядке теории возмущений. Эта трудность легко решается благодаря наличию точного решения (49). Из физических соображений выражение (49) удобно переписать без потери общности в терминах потока объема  $P = \gamma f R^{D+1}/D$ :

$$(D - D_F)P [H(P, \rho R^{D-D_F}) + E] = \rho, \quad (50)$$

где введено обозначение  $\rho = f(R, E)R^{D+1}$ . Теперь можно понять, что все теории фрагментации можно разделить на принципиально различные типы. Естественной основой для такого деления служит поведение потока  $P$  при  $E \rightarrow \infty$ . Физически осмысленным кажется выделение двух грубых типов теории фрагментации, которые различаются поведением потока при  $E \rightarrow \infty$ : 1)  $P \rightarrow 0$  и 2)  $P \rightarrow \text{const}$ . Здесь не учтена только возможность  $P \rightarrow \infty$  при  $E \rightarrow \infty$  из физических соображений.

Однако, как видно из соотношения (50), такая классификация должна быть уточнена. Причина этого в неопределенности  $P \cdot E = 0 \cdot \infty$  для первого типа теорий. Поэтому теории первого типа делятся на три разных класса по поведению  $PE$  при  $E \rightarrow \infty$ . Таким образом, окончательно все теории фрагментации делятся на четыре принципиально различных типа по поведению при  $E \rightarrow \infty$ :

1.  $P \rightarrow 0$  и  $PE \rightarrow \text{const}$ ;
2.  $P \rightarrow 0$  и  $PE \rightarrow 0$ ;
3.  $P \rightarrow 0$  и  $PE \rightarrow \infty$ ;
4.  $P \rightarrow \text{const}$ .

Далее основное внимание уделим теориям фрагментации первого типа. Причина этого в том, что именно для теорий этого класса квазилинейной теории недостаточно для объяснения релаксации в универсальный режим. Поэтому важно показать, что нелинейная теория приводит к релаксации к уже установленной, согласно минимальной теории фрагментации, универсальной асимптотике  $f \propto R^{-(D+1)}$ . Фактически для этого достаточно привести хотя бы один пример такой релаксации в рамках нелинейной теории этого класса.

Для формулировки примера нелинейной теории нужно выбрать функцию  $H(P, \rho R^{D-D_F})$  или сценарий фрагментации. Такой выбор должен приводить к нелинейной зависимости потока от функции распределения и желательно к простым кинетическим уравнениям, допускающим детальный анализ поведения их решений. Фактически для проверки влияния нелинейности на релаксацию к универсальным асимптотикам в случае общего положения этого достаточно. Существует несколько простых вариантов такого выбора.

**Первый сценарий.** Выберем функцию  $H(P, \rho R^{D-D_F})$ , определяющую сценарий фрагментации, в простейшем виде:

$$H(P, \rho R^{D-D_F}) = -\frac{c \ln(\rho R^{D-D_F})}{(D - D_F)P}.$$

Здесь  $c$  — произвольная постоянная. Тогда из уравнения (50) легко выразить поток через  $\rho$ :

$$P = \frac{\rho + c \ln(\rho R^{D-D_F})}{(D - D_F)E}. \quad (51)$$

Важно отметить, что поток нелинеен по функции распределения. Следовательно, его можно использовать для получения нелинейного кинетического уравнения, удовлетворяющего двум основным принципам фрагментации. Подставляя поток (51) в кинетическое уравнение (44), получим нелинейное уравнение вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \left(1 + \frac{c}{\rho}\right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + c. \quad (52)$$

Здесь введены новые переменные  $x = \ln R^{D-D_F}$  и  $\tau = \ln E$ . Точные решения нелинейного кинетического уравнения (52) теперь можно использовать для проверки релаксации к универсальным асимптотикам с учетом нелинейности. Поведение решений этого уравнения легко изучить, переходя к лагранжевым переменным. Тогда оно сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = c,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -\left(1 + \frac{c}{\rho}\right).$$

Общее решение этой системы уравнений легко получить в лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned} \rho &= c\tau + \rho_0(x_0), \\ x &= x_0 - \tau - \ln \frac{c\tau + \rho_0(x_0)}{\rho_0(x_0)}. \end{aligned} \quad (53)$$

Из решения легко видеть, что если начальная функция  $\rho_0(x_0) \leq \text{const}$  ограничена сверху, то при больших энергиях  $ct \gg \text{const}$  асимптотика имеет простой вид:

$$\rho(x, \tau) \approx ct.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем асимптотику функции распределения в крупномасштабной области:

$$f(R, E) \approx \frac{c \ln E}{R^{D+1}}.$$

Таким образом, при учете нелинейности релаксация приводит к выходу в крупномасштабной области на универсальную асимптотику

$$f(R, E) \propto \frac{1}{R^{D+1}}.$$

Единственное различие заключается в присутствии логарифмических поправок, которые несущественны с точки зрения ведущего степенного характера асимптотик. Наличие таких поправок, в самых разнообразных теориях со степенными или скейлинговыми законами, скорее правило, чем исключение.

Таким образом, нелинейные добавки приводят к релаксации функции распределения к универсальной асимптотике, соответствующей убыванию потока обратно пропорционально энергии. Используя выражение для потока (51), после подстановки асимптотики  $f(R, E)$  легко получить, что поток асимптотически стремится к зависимости

$$P \approx \frac{c \ln E}{E} \propto \frac{1}{E}.$$

Другими словами, в нелинейной теории этого класса автоматически устанавливается соответствующее убывание потока. Это означает, что дополнительный принцип убывания потока становится избыточным в нелинейных теориях.

**Второй сценарий.** Приведем еще один пример простого нелинейного сценария нужного класса. Выберем функцию  $H(P, \rho R^{D-D_F}) = \ln(P)/P$ . При таком выборе легко выразить  $\rho$  через поток  $P$  из соотношения (50):

$$\rho = (D - D_F) [\ln(P) + PE]. \quad (54)$$

Подставляя  $\rho$  в кинетическое уравнение (44), получим нелинейное кинетическое уравнение в терминах потока  $P$ :

$$\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{P}{1+EP} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{P^2}{1+EP}. \quad (55)$$

Здесь, как и ранее, переменная  $x = \ln R^{D-D_F}$ . Это нелинейное кинетическое уравнение совместимо с

двумя основными принципами фрагментации. Другими словами, на его решениях суммарный объем точно сохраняется и суммарная площадь фрагментов увеличивается пропорционально вложенной в разрушение энергии. Общее решение кинетического уравнения (55), полученное методом характеристик, имеет вид

$$EPe^x + xe^x = PF \left( \frac{P}{e^x} \right), \quad (56)$$

где  $F$  — произвольная функция, определяемая начальным потоком. Из решения легко заметить, что для всех  $F$ , удовлетворяющих условию  $F(x/Pe^x) \ll e^x$  асимптотика решений легко устанавливается. В крупномасштабной области получаем

$$P \approx -\frac{x}{E}.$$

Другими словами, в этом нелинейном варианте поток асимптотически убывает обратно пропорционально энергии, и следует ожидать появления универсальной асимптотики в соответствии с ранее обсуждавшимся принципом убывания потока. Действительно, эту асимптотику легко перенести на функцию распределения, используя соотношение (54) и возвращаясь к исходным переменным:

$$f(R, E) \sim \frac{\ln E + (D - D_F) \ln R}{R^{D+1}}.$$

Таким образом, и в этом варианте нелинейной теории релаксация функции распределения приводит к выходу на универсальную асимптотику  $f \propto R^{-(D+1)}$ . Снова легко заметить появление логарифмических поправок, что, по-видимому, типично для нелинейных теорий. Основной вывод из анализа нелинейных теорий этого класса — это типичность реализации асимптотических режимов, приводящих к убыванию потока обратно пропорционально энергии и к наиболее распространенной универсальной асимптотике  $f \propto R^{-(D+1)}$ , определяемой только размерностью фрагментов. Соответственно, принцип убывания потока объема с увеличением энергии разрушения становится избыточным в нелинейной теории.

## 8. СТЕПЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРИРОДЕ

В этом разделе обсудим согласование результатов с известными экспериментальными наблюдениями. Существует большое количество экспериментальных исследований процесса фрагментации [1–17, 37–41]. Наиболее полный обзор результатов этих исследований был представлен в работе [2].

По способу разрушения фрагментацию можно условно разделить на два типа: слабую и сильную. Под слабой фрагментацией будем понимать такую фрагментацию, когда фрагмент претерпевает однократное разрушение, например в результате удара, а под сильной фрагментацией — когда фрагмент и его потомки претерпевают многократное разрушение.

Подавляющая часть экспериментальных исследований посвящена получению функций распределения в крупномасштабной области. Экспериментальные закономерности обычно устанавливаются для одной из характеристик, такой как интегральная функция распределения по массам,  $N(m) = \int_m^\infty f(m') dm'$ , или функция распределения по размерам,  $f(R)$ , или по массам,  $f(m)$ . В подавляющем числе экспериментов функции распределения имели степенной вид

$$f(m) \propto m^{-\beta}, \quad f(R) \propto R^{-\alpha}, \quad N(m) \propto m^{-\beta+1}.$$

В этом случае все степенные показатели связаны простым соотношением  $\alpha = 3\beta - 2$ . Поэтому можно свести экспериментальные данные к одному показателю. Учитывая предыдущее изложение, далее будем приводить ( $f(R) \propto R^{-\alpha}$ ) значение показателя  $\alpha$ .

**Слабая фрагментация.** К такому виду фрагментации можно отнести дробление в результате однократного падения, столкновения или удара объектов разных форм, состоящих из глины, гипса, стекла, угля, гранита и т. п., а также однократное дробление капель горючего и ртути, распад ядер.

Известные экспериментальные результаты по слабой фрагментации сведены в табл. 1. Видно, что значения  $\alpha$  концентрируются вблизи  $\alpha \approx 3$ , что качественно согласуется с выводом минимальной теории,  $f(R, E) \propto R^{-(D_F+1)}$  при  $D_F \approx 2$  (см. соотношение (43)). К сожалению, данные о состоянии поверхности фрагментов в ссылках, приведенных в табл. 1, отсутствуют, что не позволяет установить корреляцию с  $D_F$  показателя в соотношении (43). Другое важное наблюдение из этих экспериментальных результатов сводится к выводу о широком разбросе значений показателя  $\alpha$  для слабой фрагментации. Это может быть вызвано различными причинами, прежде всего разными значениями  $D_F$  для фрагментов в разных экспериментах. Однако это можно объяснить и реализацией промежуточной асимптотики, при которой еще не достигнуто асимптотическое распределение. В последнем случае следует ожидать увеличения показателя  $\alpha$  с ростом энергии удара. Разумеется, этот тип

фрагментации можно попытаться пояснить только в рамках минимальной теории фрагментации.

**Сильная фрагментация.** В качестве примеров сильной фрагментации можно привести следующие: дробление астероидов и метеоритов в результате многократных столкновений между собой, образование поверхностного слоя Луны — реголита, размельчение горной породы и других материалов в дробильных установках и под прессом. Далее обсудим результаты, полученные при исследовании сильной фрагментации. Гаудином [1] был получен закон размельчения горной породы в дробильной установке. Как следствие из этого закона, распределение частиц по размерам дало степенную зависимость

$$f(R) \propto R^{-\alpha}. \quad (57)$$

Было обнаружено, что на ранних стадиях процесса дробления показатель степени близок к  $\alpha \approx 3$ . При дальнейшем дроблении степень распределения росла и количество мелких частиц увеличивалось. После 600 ч измельчения степень становилась равной  $\alpha \approx 4$ . Эти и другие известные экспериментальные данные по сильной фрагментации сведены в табл. 2.

Из этих экспериментальных данных следует, что в типичных случаях показатели  $\alpha$  концентрируются в окрестности  $\alpha \approx 4$ . Это указывает, что наиболее часто реализуется режим, соответствующий  $f(R, E) \propto R^{-(D+1)}$ . Приведенные в табл. 2 результаты соответствуют случаю  $D = 3$ . Данные о сильной фрагментации двумерных объектов  $D = 2$  малочисленны. К такому случаю можно отнести результаты по распределению кратеров на поверхности Луны [40, 41]. Для этого случая показатель  $\alpha \approx 3$ . Это значение также хорошо согласуется с обсуждаемой асимптотикой функции распределения. В разделе, посвященном минимальной теории, отмечалось важное качественное различие между разными режимами. Так, режим, соответствующий убыванию потока,  $P \propto E^{-1}$ , кроме реализации асимптотики  $f(R, E) \propto R^{-(D+1)}$  характеризуется еще одним качественным отличием, которое можно проверить экспериментально. Это независимость асимптотики от энергии. Для проверки этого с использованием экспериментальных данных работы [17] было построено отношение функций распределения фрагментов для стекла при нагрузках, различающихся почти на порядок (рис. 2). Из рис. 2 хорошо видно, что в области, где установилась универсальная асимптотика, отношение функций распределения осколков стекла близко к единице. Фактически это может служить дополнительным аргументом в пользу предложенной теории фрагментации. Таким образом, предла-



Таблица 1. Слабая фрагментация трехмерных объектов

Материал	Способ разрушения или образования фрагментов	$\alpha$
Гипс, мыло, парафин [37]	падение на цементный пол	$2.65 \pm 0.30$
Глубинная горная порода (габбро) [13]	удар железного снаряда	2.44
Глубинная горная порода (габбро) [13]	удар свинцового снаряда	2.71
Пластина сухой глины [38]	падение с высоты 2 м	$2.74 \pm 0.24$
Стекланный стержень [15]	падение с высоты 4.8 м	$2.77 \pm 0.03$
Стекланная и гипсовая пластинки [39]	удар снаряда в центр	$2.8 \pm 0.3$
Кварц [13]	удар	2.89
Стекланные шарики [13, 14]	единичный удар	3
Капли ртути [11]	удар	3.131
Гранит [13]	в природе	3.22
Базальтовая порода [9]	удар поликарбонатного снаряда	3.56

Таблица 2. Сильная фрагментация трехмерных объектов

Материал	Способ разрушения или образования фрагментов	$\alpha$
Песочная глина [4]	в природе	3.61
Астероиды, метеориты [3, 4]	многократные столкновения и падение на Землю	$3.7 \pm 0.9$
Террасовый гравий [13]	измельчение в дробильной установке	3.82
Горная порода [1]	измельчение в дробильной установке	4
Космические тела (метеориты, метеоры и т. д.) [36]	многократные столкновения и падение на Землю	$4.0 \pm 0.5$
Железные метеориты [6, 7]	многократные столкновения и падение на Землю	4.054
Пепел [13]	в природе	4.54
Пемза [13]	измельчение	4.54
Стекло, гранит [17]	разрушение под давлением	4
Реголит на поверхности Луны (в межкратерном пространстве) [8]	многократное дробление посредством кратерообразования и падения космических тел	5

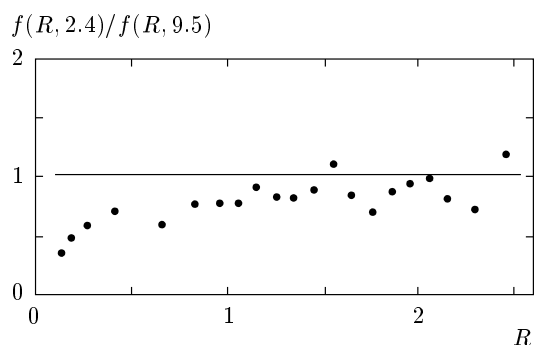


Рис. 2. Отношение значений функций распределения стеклянных фрагментов, полученных при нагрузке  $E = 2.4$  т, к значениям функций распределения фрагментов, полученных после разрушения под нагрузкой  $E = 9.5$  т, в зависимости от размера  $R$

гаемая теория качественно согласуется с наблюдаемыми закономерностями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Gaudin, *Principles of Mineral Dressing*, McGraw-Hill, New York (1944).
2. D. L. Turcotte, *J. Geophys. Res.* B **91**, 1921 (1986).
3. G. S. Hawkins, *Astronom. J.* **64**, 450 (1959).
4. G. S. Hawkins, *Astrophys. J.* **65**, 318 (1960).
5. G. P. Kuiper, Y. Fugita, T. Gehrels et al., *Astrophys. J.*, Supplement **32**, 289 (1958).
6. J. R. Donnison and R. A. Sugden, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **210**, 673 (1984).
7. H. Brown, *J. Geophys. Res.* **65**, 1679 (1960).
8. Р. Б. Зезин, П. А. Дубин, *Природа* вып. 11, 9 (1971).
9. A. Fujiwara, G. Kamimoto, and A. Tsukamoto, *Icarus* **31**, 277 (1977).
10. O. Sotolongo-Costa, E. Lopez-Pages, F. Barre-ras-Toledo, and J. Marin-Antuna, *Phys. Rev. E* **49**, 4027 (1994).
11. O. Sotolongo-Costa, Y. Moreno-Vega, J. J. Llove-ras-Gonzalez, and J. C. Antoranz, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 42 (1996).
12. J. E. Finn, S. Agarwal, and A. Bujak, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1321 (1982).
13. W. K. Hartmann, *Icarus* **10**, 201 (1969).
14. J. J. Gilvarry, *J. Appl. Phys.* **32**, 400 (1961).
15. T. Ishii and M. Matsushita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **61**, 3474 (1992).
16. E. S. C. Ching, S. L. Lui, and K. Q. Xia, *Physica A* **287**, 83 (2000).
17. O. V. Kuklina, V. V. Mozgin, A. V. Tur, and V. V. Yanovsky, *Functional Materials* **8**, 233 (2001).
18. А. Н. Колмогоров, *ДАН СССР* **31**, 99 (1941).
19. А. Ф. Филиппов, *Теор. вер. и ее применения* **4**, 299 (1961).
20. Z. Cheng and S. Redner, *J. Phys. A* **23**, 1233 (1990).
21. E. D. McGrady and R. M. Ziff, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 892 (1987).
22. G. J. Rodgers and M. K. Hassan, *Phys. Rev. E* **50**, 3458 (1994).
23. P. L. Krapivsky, I. Grosse, and E. Ben-Naim, *Phys. Rev. E* **61**, R993 (2000).
24. P. Singh and M. K. Hassan, *Phys. Rev. E* **53**, 3134 (1996).
25. M. K. Hassan and G. J. Rodgers, arXiv:cond-mat/9604089.
26. P. L. Krapivsky and E. Ben Naim, *Phys. Rev. E* **50**, 3502 (1994).
27. D. E. Grady and M. E. Kipp, *J. Appl. Phys.* **58**, 1210 (1985).
28. D. E. Grady, *J. Appl. Phys.* **68**, 6099 (1990).
29. J. J. Gilvarry, *J. Appl. Phys.* **32**, 391 (1961).
30. B. L. Holian and D. E. Grady, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1355 (1988).
31. Y. Hayakawa, *Phys. Rev. B* **53**, 14828 (1996).
32. F. Kun and H. J. Herrmann, *Phys. Rev. E* **59**, 2623 (1999).
33. T. Kadono and M. Arakawa, *Phys. Rev. E* **65**, 035107R (2002).
34. Р. З. Сагдеев, А. В. Тур, В. В. Яновский, *ДАН СССР* **294**, 1105 (1987).
35. Ю. В. Гончар, А. В. Тур, В. В. Яновский, в сб. *Проблемы твердого тела*, Наука, Киев (1991), с. 118.
36. Б. Ю. Левин, А. Н. Симоненко, *Природа* **4**, 7 (1973).
37. L. Oddershede, P. Dimon, and J. Bohr, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3107 (1993).
38. A. Meibom and I. Balslev, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2492 (1996).
39. T. Kadono, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1444 (1997).
40. G. Fielder, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **129**, 351 (1965).
41. A. Marcus, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **134**, 269 (1966).