ЖЭТФ, 2010, том 138, вып. 6 (12), стр. 1088–1092

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ВЫРОЖДЕННОГО НЕЙТРОННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. В. Скобелев*

Московский государственный индустриальный университет
115280, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 марта 2010 г.

С использованием численных методов найдены энергия Ферми, парциальные концентрации поляризованных нейтронов, давление, объемная плотность энергии вырожденного нерелятивистского нейтронного газа в магнитном поле с учетом аномального магнитного момента нейтрона. Полученные результаты являются обобщением на случай наличия магнитного поля соотношений, на которых основана модель нейтронной звезды Оппенгеймера – Волкова. Сверхсильное (до 10^{17} Гс) магнитное поле изменяет давление и внутреннюю энергию звезды, оказывая влияние на ее статическую конфигурацию и эволюцию. Показано, что в сверхсильных магнитных полях, как и в слабых, вырожденный нейтронный газ является парамагнетиком, причем соответствующие значения магнитной восприимчивости различаются множителем, имеющим порядок единицы. Обсуждается возможность экспериментальной проверки результатов при анализе излучения пульсаров.

Сверхсильные магнитные поля (до 10^{17} Гс [1, 2]) при взаимодействии с аномальным магнитным моментом (АММ) нейтронов могут существенным образом изменить структуру заполнения квантовых состояний в вырожденном нейтронном газе, изменяя, например, энергию Ферми, а также, по терминологии книги [3], другие термодинамические функции: парциальные спиновые концентрации нейтронного газа $n_\pm$ (см. ниже), давление P, объемную плотность энергии U, приводя также к намагничению нейтронного газа.

В известных нам работах (см. [4] и приведенные там ссылки) в реальной модели нейтронной звезды, состоящей преимущественно из нейтронов с примесью протонов и электронов (последние необходимы для паулиевского запрета β-распада нейтронов и являются также носителями токов, создающих магнитное поле звезды), учитывалось влияние магнитного поля на заряженные частицы (p и e), а зависимость химического потенциала $\mu_{ch}^{(n)} \equiv \mu_{ch}$ и энергии Ферми нейтронов от поля вытекала просто из соответствующей зависимости от поля $\mu_{ch}^{(p)}$ и $\mu_{ch}^{(e)}$ и условия химического равновесия $\mu_{ch} = \mu_{ch}^{(p)} + \mu_{ch}^{(e)}$.

Однако этот подход нельзя считать удовлетворительным, поскольку, например, энергия нерелятивистского нейтрона равна

$$E_n = m + \frac{p^2}{2m} \pm |\lambda|, \tag{1}$$

где $\lambda = \mu B$, $\mu = \sigma\mu_n$ — АММ нейтрона ($\sigma \approx -1.9$, $\mu_n = e/2m_p$ — ядерный магнетон), B — индукция магнитного поля, знаки «$\pm$» соответствуют ориентации спина по полю или против поля, а АММ — наоборот. Энергия же нерелятивистского протона равна

$$E_p = m_p + \frac{p_3^2}{2m_p} + \frac{\gamma n}{m_p}, \tag{2}$$

где $\gamma = |eB|$, n — номер уровня Ландау (далее обозначение «n» используется для концентрации нейтронов), p_3 — импульс вдоль поля. Видно, что зависящие от поля поправки к энергии нейтрона (1) и протона (2) имеют один порядок, так что взаимодействие АММ нейтрона с магнитным полем тоже необходимо учитывать.

В простейшей модели нейтронной звезды типа Оппенгеймера – Волкова [5] будем считать нейтронную звезду состоящей только из нейтронов, а нашей целью будет обобщение соответствующих уравнений

*E-mail: v.skobelev@inbox.ru

на случай наличия магнитного поля. Такой подход оправдан и тем, что основной вклад в давление P и плотность энергии U дают именно нейтроны.

Исходим из основных соотношений статистики Ферми–Дирака (см., например, книгу [6]):

$$n = \sum \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty f p^2 dp, \tag{3а}$$

$$P = \sum \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{3} \int\limits_0^\infty f p \left(\frac{p}{m}\right) p^2\, dp, \tag{3б}$$

$$U = \sum \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty f \varepsilon\, p^2 dp. \tag{3в}$$

Здесь сумма берется по спиновым состояниям, $p \equiv |\mathbf{p}|$,

$$f = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_{ch}}{T}\right) + 1\right]^{-1} \tag{4}$$

— функция распределения, ε — энергия нейтрона, которая в отсутствие магнитного поля в рассматриваемом нерелятивистском случае равна $\varepsilon = p^2/2m$. При $T \to 0$ из формул (3), (4) получаются обычные соотношения:

$$n = \frac{p_F^{(0)3}}{3\pi^2}, \tag{5а}$$

$$P_0 = \frac{2(2m)^{3/2}}{15\pi^2} E_F^{(0)5/2}, \tag{5б}$$

$$U_0 = \frac{(2m)^{3/2}}{5\pi^2} E_F^{(0)5/2}, \tag{5в}$$

где $p_F^{(0)} = (3\pi^2 n)^{1/3}$ — импульс Ферми,

$$E_F^{(0)} \equiv \mu_{ch|T=0} = \frac{(3\pi^2 n)^{2/3}}{2m} \tag{6}$$

— энергия Ферми в отсутствие магнитного поля. Формулы (5), (6) являются основными в модели нейтронной звезды Оппенгеймера–Волкова, поскольку в достаточно старой нейтронной звезде нейтронный газ является нерелятивистским и практически вырожденным [2, 7], давление же обусловлено в основном вкладом нейтронов (5б).

Для обобщения этих соотношений на случай наличия сверхсильного ($B \lesssim 10^{17}$ Гс) магнитного поля следует взять энергию нейтрона в виде

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \pm |\lambda|. \tag{7}$$

Суммирование по спиновым состояниям в формулах (3) теперь не сводится к тривиальному умножению на 2, а с учетом формулы (7) приводит к появлению в правых частях двух слагаемых, соответствующих двум ориентациям спина. В случае вырожденного ($T \to 0$) газа получаем

$$\begin{gathered} n = n_+ + n_-, \\ n_\pm = \frac{1}{6\pi^2} p_F^{(\pm)3}, \end{gathered} \tag{8а}$$

$$\begin{gathered} P = P_+ + P_-, \\ P_\pm = \frac{1}{30\pi^2 m} p_F^{(\pm)5}, \end{gathered} \tag{8б}$$

$$\begin{gathered} U = U_+ + U_-, \\ U_\pm = \frac{1}{20\pi^2 m} p_F^{(\pm)5} \pm \frac{|\lambda|}{6\pi^2} p_F^{(\pm)3}, \end{gathered} \tag{8в}$$

где

$$\begin{gathered} p_F^{(\pm)} = \sqrt{2m(E_F \mp |\lambda|)}\,, \\ E_F = \mu_{ch}\big|_{T=0} \end{gathered} \tag{9}$$

— импульсы и энергия Ферми в магнитном поле (мы предполагаем, что $E_F > |\lambda|$, это будет очевидно из дальнейшего).

Формулы (8) удобней переписать в другом виде, вводя безразмерные переменные (это ключевой момент наших вычислений)

$$x = |\lambda|/E_F^{(0)}, \quad y = E_F/E_F^{(0)}, \tag{10}$$

где $E_F^{(0)}$ задается формулой (6). Тогда они принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}(y+x)^{3/2} + \frac{1}{2}(y-x)^{3/2} = 1, \\ \varepsilon_- + \varepsilon_+ = 1, \\ \varepsilon_\pm \equiv \frac{n_\pm}{n} = \frac{1}{2}(y \mp x)^{3/2}, \end{gathered} \tag{11а}$$

$$P = \frac{(2m)^{3/2} E_F^{(0)5/2}}{15\pi^2} \left[(y+x)^{5/2} + (y-x)^{5/2}\right], \tag{11б}$$

$$\begin{aligned} U = \frac{(2m)^{3/2} E_F^{(0)5/2}}{2\pi^2} &\times \\ \times \Bigg\{ \frac{1}{5} &\left[(y+x)^{5/2} + (y-x)^{5/2}\right] + \\ &+ \frac{x}{3}\left[(y-x)^{3/2} - (y+x)^{3/2}\right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{11в}$$

Добавим к этим формулам и выражение для намагниченности J вырожденного нейтронного газа:

$$J = |\mu|(n_- - n_+) = \frac{|\sigma|\alpha}{2} \frac{m_e}{m_p} B_0 n \lambda_C^3 (\varepsilon_- - \varepsilon_+), \tag{12}$$

где m_e и λ_C — масса и комптоновская длина волны электрона, $\alpha = e^2 = 1/137$, $B_0 = m_e^2/e = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс — швингеровское поле. В формуле (12) мы учли, что $\varepsilon_- > \varepsilon_+$ (см. рис. 2), так что собственное поле вырожденного нейтронного газа направлено по внешнему полю, причем зависимость J от величины поля приблизительно является линейной ((12), рис. 2), т. е. он ведет себя подобно парамагнетику. Отметим в связи с этим, что

$$\varepsilon_- - \varepsilon_+ \approx \frac{x}{2^{1/3}} \tag{13а}$$

и

$$J \approx \chi B,$$

где магнитная восприимчивость

$$\chi \approx \frac{\sigma^2\alpha}{2^{7/3}}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 \frac{m_e}{E_F^{(0)}}\, n\lambda_C^3 \tag{13б}$$

имеет порядок 10^{-4}.

Отметим также, что в достаточно слабых полях, когда $x \ll 1$, $y \approx 1$ ($|\lambda| \ll E_F^{(0)}$, $E_F \approx E_F^{(0)}$), из (11а) легко получить соотношение

$$\varepsilon_- - \varepsilon_+ \approx \frac{3}{2}\, x$$

и в соответствии с формулой (12) можно найти, что в используемых обозначениях

$$\chi = \frac{3}{8}\,\sigma^2\alpha\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2 \frac{m_e}{E_F^{(0)}}\, n\lambda_C^3.$$

С учетом определений $\mu = \sigma\mu_n$ и (6) это совпадает с классическим результатом, приведенным в книге [6]. Таким образом, в достаточно слабых полях $|\lambda| \ll E_F^{(0)}$ ($B \ll B_{max}$, см. ниже) имеет место спиновый парамагнетизм Паули [6] вырожденного нейтронного газа, а в сверхсильном поле $|\lambda| \approx E_F^{(0)}$ ($B \approx B_{max}$) вырожденный нейтронный газ также является парамагнетиком с несколько иным значением магнитной восприимчивости χ:

$$\frac{\chi_{weak}}{\chi_{strong}} = \frac{3}{2^{2/3}} \approx 2.$$

Первое из уравнений (11а) в неявном виде определяет y как функцию от x, а с учетом (10) — зависимость E_F от величины внешнего поля и концентрации. Можно убедиться, что это уравнение имеет корни относительно y при значениях x в диапазоне

$$0 \le x \le x_{max}, \tag{14}$$

где

$$x_{max} \approx 1/2^{1/3} \approx 0.8, \tag{14а}$$

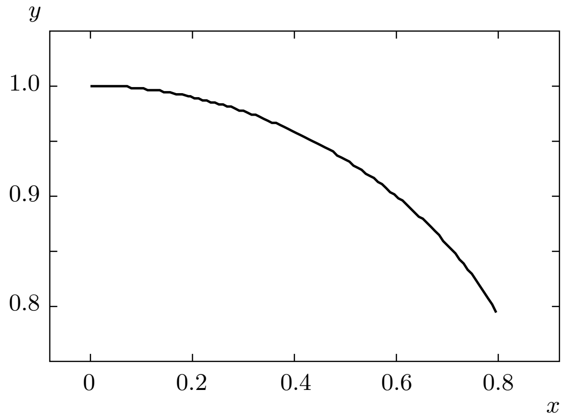

Рис. 1. Зависимость «безразмерной энергии Ферми» y (10) от безразмерного полевого параметра x (10)

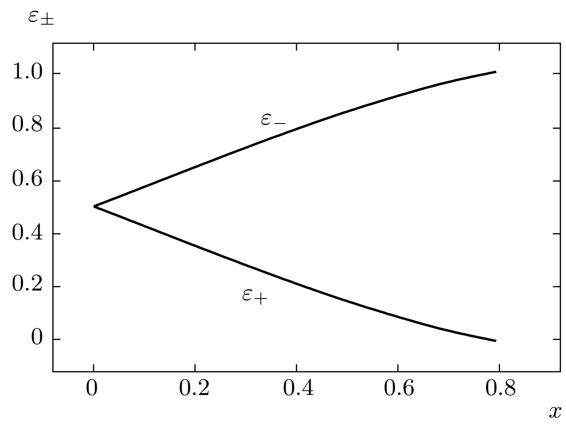

Рис. 2. Зависимость относительных парциальных концентраций $\varepsilon_\pm$ (11а) от полевого параметра x (10)

что соответствует значению $|\lambda| = E_F$. График функции $y(x)$ представлен на рис. 1, а график относительных парциальных концентраций $\varepsilon_\pm(x)$ — на рис. 2. С учетом формул (10) и (14а) получаем

$$B_{max} = \frac{2^{2/3}}{|\sigma|}\,\frac{m_p}{m_e}\,\frac{E_F^{(0)}}{m_e}\,B_0. \tag{15}$$

Поскольку при плотности порядка ядерной в ядре нейтронной звезды $n \sim 10^{38}$ см$^{-3}$, из (6) находим $E_F^{(0)} \sim 10$ МэВ и $B_{max} \sim 10^{18}$ Гс, так что при «реалистических» значениях поля $\lesssim 10^{17}$ Гс наше допущение $|\lambda| < E_F$ вполне оправдано.

Как видно на рис. 1, E_F монотонно уменьшается с ростом поля, достигая минимального значения $0.8E_F^{(0)}$ при $B \sim B_{max}$.

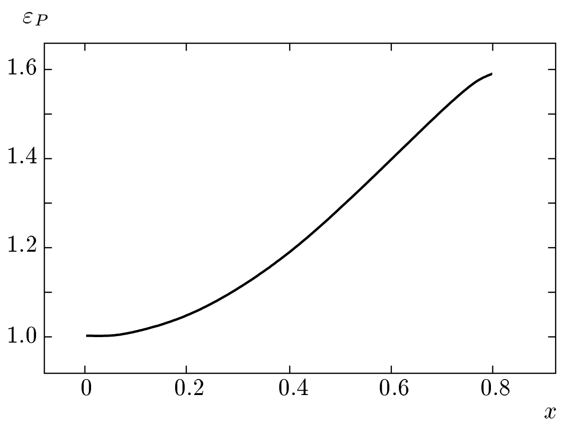

Рис. 3. Зависимость «относительного давления» нейтронной компоненты $\varepsilon_P = P/P_0$ от полевого параметра x (10)

Зависимость давления от поля и концентрации удобней охарактеризовать относительной величиной

$$\varepsilon_P = P/P_0,$$

где P и P_0 задаются формулами (5б) и (11б):

$$\varepsilon_P = \frac{1}{2}\left[(y+x)^{5/2} + (y-x)^{5/2}\right]. \tag{16а}$$

Это же относится и к объемной плотности энергии

$$\varepsilon_U = U/U_0.$$

Используя формулы (5в) и (11в), находим

$$\varepsilon_U = \varepsilon_P + \frac{5x}{6}\left[(y-x)^{3/2} - (y+x)^{3/2}\right], \tag{16б}$$

где величина ε_P задана формулой (16а).

Зависимости $\varepsilon_P(x)$ и $\varepsilon_U(x)$ представлены соответственно на рис. 3, 4.

Помимо уже сформулированных, на основании проведенных вычислений можно сделать следующие выводы.

1. Из рис. 3 видно, что давление вырожденного нейтронного газа растет с ростом поля, достигая значения $1.6P_0$ при $B \sim B_{max}$. Тогда из уравнений равновесия

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho M(r)}{r^2} \tag{17а}$$

и неразрывности [3]

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2 \tag{17б}$$

в приближении слабой (ньютоновской) гравитации следует, что соответственно возрастает равновесный радиус R нейтронной звезды. В самом деле, из уравнения (17б) получаем ($\rho \approx \mathrm{const}$) соотношение

$$M(r) \approx \frac{4\pi}{3}\rho r^3.$$

При подстановке его в уравнение (17а) и после интегрирования находим

$$P \approx \frac{2\pi}{3} G\rho^2 R^2. \tag{18}$$

Таким образом, при заданной концентрации и плотности $\rho = mn$, $R \sim \sqrt{P}$ и в общем случае $R \approx \approx (\varepsilon_P + \varepsilon_B)^{1/2} R_0 > R_0$, где R_0 — радиус звезды в отсутствие магнитного поля при той же концентрации (см. также [8]). В выражении для R мы учли вклад собственно магнитного поля в давление, определяемое соотношениями $\varepsilon_B = P_B/P_0$, $P_B = U_B/3$, $U_B = B^2/8\pi$. Как можно оценить, начиная со значений поля порядка 10^{17} Гс давление P_B сравнивается с «нейтронным» (5б), (11б) и его учет также необходим. Таким образом, наличие сверхсильных магнитных полей ($\gtrsim 10^{17}$ Гс) в «старых» нейтронных звездах — пульсарах с вырожденной нейтронной компонентой — приводит к макроскопическому увеличению их радиуса, т. е. к соответствующему увеличению момента инерции и уменьшению угловой скорости вращения по сравнению со случаем отсутствия магнитного поля. Частота следования импульсов от таких пульсаров будет меньше, чем в случае отсутствия магнитного поля.

С другой стороны, по мере уменьшения магнитного поля вследствие затухания токов, его создающих, частота импульсов будет увеличиваться вследствие уменьшения радиуса и момента инерции. Если такой процесс удастся зарегистрировать за время наблюдений, это будет означать наличие сверхсильного убывающего со временем магнитного поля ($\gtrsim 10^{17}$ Гс) в астрофизическом объекте, поскольку другие механизмы уменьшения момента инерции в «старых» нейтронных звездах, по-видимому, отсутствуют (уменьшением массы вследствие излучения можно пренебречь, так как оно мало в «старой» нейтронной звезде, в отсутствие магнитного поля гравитационное сжатие также невозможно, поскольку вещество уже сжато до максимальной ядерной плотности).

2. Внутренняя энергия нейтронной компоненты нейтронной звезды уменьшается с ростом поля (рис. 4) с минимальным значением приблизительно $0.26U_0$. На самом деле, однако, начиная со значений поля порядка 10^{17} Гс следует учитывать полевой вклад U_B во внутреннюю энергию и при $B \sim 10^{17}$ Гс

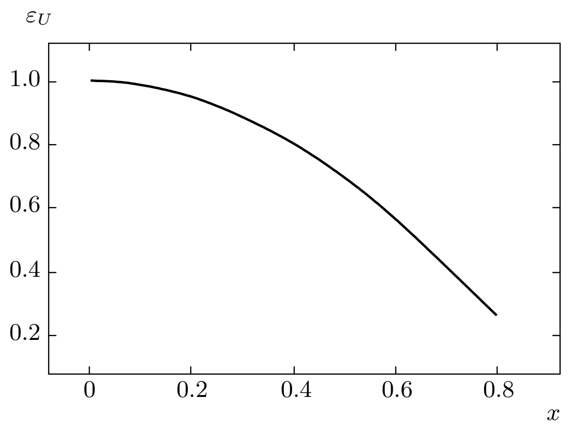

Рис. 4. Зависимость «относительной плотности энергии» нейтронной компоненты $\varepsilon_U = U/U_0$ от полевого параметра x (10)

полная внутренняя энергия $(U + U_B)$ имеет порядок U_0.

3. Максимальное значение намагниченности можно найти из формулы (12), полагая $\varepsilon_- - \varepsilon_+ \approx 1$, $n \sim 10^{38}$ см$^{-3}$. Это дает $J_{max} \sim B_0$, что на несколько порядков меньше величины поля, вызвавшего эту намагниченность. Магнитный момент ядра нейтронной звезды по порядку величины равен

$$M_{max} \approx \frac{4}{3}\pi R^3 J_{max};$$

при типичном радиусе порядка нескольких километров это составляет $M_{max} \approx 10^{30}$ Гс·см^3, что близко к оценкам, сделанным в работе [9].

При исчезновении магнитного поля вследствие затухания вызвавших его токов, как и в обычном парамагнетике, намагниченность исчезает (формула (13а)), так что магнитный момент звезды без магнитного поля токов в любом случае равен нулю, независимо от ее предыстории.

Заметим в заключение, что использованная модель вырожденного ферми-газа, как и оригинальная модель [5], является приближением к реальной ситуации [7], так как в условиях сверхплотного вещества нейтронной звезды следовало бы использовать модель ферми-жидкости, учитывая также эффекты сверхтекучести [7]. Таким образом, возможно дальнейшее развитие используемой методики вычислений.

Автор благодарит Н. В. Зверева за выполнение графических построений, а также О. А. Жданович, Н. О. Галактионова, И. О. Витер за техническую помощь в оформлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Duncan and C. Tompson, Astrophys. J. **392**, L9 (1992); M. Boquet et al., Astron. Astrophys. **301**, 757 (1995).

2. D. Bandyopadhyay, S. Chaktabarty, P. Dey, and S. Pal, Phys. Rev. D **58**, 121301 (1988); D. Bandyopadhyay et al., arXiv:astro-ph/9864145.

3. Г. С. Бисноватый-Коган, *Физические вопросы теории звездной эволюции*, Наука, Москва (1989).

4. Chun-Ming Chiang, Choon-Lin Ho, and Wen-Tsann Lin, Chinese J. Phys. **39**, 619 (2001).

5. J. Oppenheimer and G. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).

6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Физматлит, Москва (2001).

7. Д. Г. Яковлев, К. П. Левенфиш, Ю. А. Шибанов, УФН **169**, 825 (1999).

8. A. Reisenegger, RevMexAA, Serie de Conferencias **35**, 139 (2009).

9. Д. Н. Седракян, К. М. Шахбазян, А. Г. Мовсисян, Астрофизика **21**, 547 (1984).