

# ХАОТИЧЕСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ТРАНСПОРТ В ДВУМЕРНЫХ СТРУЙНЫХ ПОТОКАХ

*М. Ю. Улейский\**, *М. В. Будянский\**, *С. В. Пранц\*\**

*Тихоокеанский океанологический институт Дальневосточного отделения Российской академии наук  
690041, Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 16 апреля 2010 г.

На примере динамически согласованной модели геофизического струйного потока с волнами Россби исследовано возникновение хаотического транспорта пассивных частиц поперек струи (поперечный транспорт). Для случая нечетных значений волновых чисел Россби разработана методика нахождения центральной инвариантной кривой, являющейся индикатором поперечного транспорта. Исследованы амплитудный и резонансный механизмы разрушения этой кривой. Для четно-нечетных значений волновых чисел предложена альтернативная методика обнаружения хаотического поперечного транспорта, основанная на выявлении перекрытия северного и южного стохастических слоев. Обнаружено, что глобальный поперечный транспорт в этом случае возникает для больших значений амплитуд волн Россби, чем в случае нечетных значений волновых чисел. Полученные результаты предлагается проверить в лабораторных экспериментах, имитирующих геофизические потоки с волнами Россби.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Струйные течения в океане и атмосфере являются барьерами для поперечного (меридионального в геофизической терминологии) транспорта водных и воздушных масс. Вопрос проницаемости этих барьеров — один из основных в физической океанографии и физике атмосферы. Поскольку физико-химические и биологические характеристики по обе стороны струи сильно различаются, перенос водных (воздушных) масс с одной стороны струи на другую может вызвать серьезные последствия, например, истощение озонового слоя в атмосфере или распреснение и охлаждение вод в океане. Наблюдения за траекториями буев нейтральной плавучести, запущенных на различных глубинах в разных районах океана, выявили их крупномасштабные перемещения поперек струи [1]. Очевидная нерегулярность траекторий этих буев (см., например, диаграмму перемещений буев в Гольфстриме в работе [1]) явилась веским аргументом для предложения хаотической адвекции в качестве механизма крупномасштабного перемешивания и транспорта в струйных течениях в океане и атмосфере [1–5]. Хаотической адвекцией называется процесс перемешивания пассивной приме-

си в детерминированных потоках с экспоненциальной чувствительностью траекторий частиц к малым изменениям их начальных положений и/или управляющих параметров потока (см. недавние обзоры по хаотической адвекции в океане [6, 7]).

Отметим ряд лабораторных экспериментов по хаотической адвекции с вращающейся жидкостью [8–10], имитирующих струйные течения в океане и атмосфере. Сквозь отверстия конусообразного дна (имитация эффекта Кориолиса на Земле) вращающегося танка закачивалась вода с регулируемой величиной потока. В результате создавалась устойчивая азимутальная струя с несколькими волновыми возмущениями. Отмечалось хорошее хаотическое перемешивание в таком квазипериодическом потоке по обе стороны струи, но не транспорт поперек нее. По распространенному мнению, большой градиент потенциальной завихренности в центральной области струи является барьером, препятствующим поперечному транспорту [8–11].

Для моделирования транспорта и перемешивания водных (воздушных) масс удобен лагранжевый подход, в котором частица с координатами  $\mathbf{r}$  адвектируется эйлеровым полем скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

\*E-mail: www.dynalab.poi.dvo.ru

\*\*E-mail: prants@poi.dvo.ru

Несмотря на простой вид этого уравнения, эйлеровы свойства поля скорости и лагранжевы свойства траекторий пассивных частиц могут быть связаны очень сложным образом. Так, даже простое детерминированное эйлерово поле может порождать практически непредсказуемые лагранжевы траектории частиц. Это означает, что в некоторых областях фазового пространства расстояние между соседними частицами экспоненциально растет со временем. Следствием этого является практически важный вывод об ограниченности прогноза поведения даже простых нелинейных систем на время порядка

$$\tau_p \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\Delta a}{\Delta a(0)}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — положительный ляпуновский показатель,  $\Delta a$  — доверительный интервал прогноза некоторой динамической величины  $a$ ,  $\Delta a(0)$  — практически неизбежная неточность измерения начального значения этой величины. Время  $\tau_p$  иногда называют горизонтом прогноза. Обратим внимание, что зависимость горизонта прогноза от меры нашего незнания начальных условий гораздо более слабая, чем зависимость от меры динамической неустойчивости — максимального показателя Ляпунова.

Будучи мотивированы проблемой проникаемости геофизических струйных потоков в океане и атмосфере [11, 12] и их лабораторных аналогов [8–10], в этой работе мы исследуем горизонтальный поперечный транспорт в динамически согласованной модели струйного потока с волнами Россби, планетарными длиннопериодными волнами в океане и атмосфере. Яркими примерами таких струй являются Гольфстрим, Куроисио и Антарктическое циркумполярное течение в океане, а также зональные струи в атмосфере, разделяющие водные (воздушные) массы с различными свойствами. Эйлеровы поля скорости реальных течений не являются, конечно, строго регулярными, но в тех случаях, когда эйлерово время корреляции велико по сравнению с лагранжевым, проблему перемешивания и транспорта можно рассматривать в рамках концепции хаотической адвекции.

При моделировании обычно рассматривается двумерное поле скорости несжимаемой жидкости  $\mathbf{v} = (u, v)$  с функцией тока  $\Psi(x, y, t)$  и уравнениями адвекции

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (3)$$

составляющими гамильтонову систему с полутора степенями свободы, канонические переменные которой являются координатами частиц, т. е. фазовое

пространство уравнений адвекции является конфигурационным для адвектируемых частиц. Целями настоящей работы являются: 1) разработка методики выявления поперечного транспорта и определение его характеристик, 2) нахождение условий и механизмов разрушения транспортных барьеров для разных значений волновых чисел, 3) исследование поперечного транспорта при сравнительно малых амплитудах возмущения, которые реализуются как в геофизических потоках, так и в лабораторных экспериментах.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 из уравнения сохранения потенциальной завихренности выводится динамически согласованная функция тока сдвигового потока с двумя волнами Россби, вводится специальная нормировка, облегчающая исследование транспорта для любых пар волновых чисел, и анализируются бифуркации потока. Методы детектирования и изучения хаотического поперечного транспорта (ХПТ) существенно различаются для нечетно-нечетных и четно-нечетных значений волновых чисел (случай четно-четных значений сводится к одному из перечисленных выше). Для нечетных значений волновых чисел существует симметрия уравнений адвекции, позволяющая разработать регулярный и эффективный метод обнаружения так называемой центральной инвариантной кривой (ЦИК) [13], являющейся индикатором ХПТ. В разд. 3 вводятся основные используемые в работе понятия, излагается алгоритм построения ЦИК с помощью итераций индикаторных точек, анализируется геометрия ЦИК, обсуждаются амплитудный и резонансный механизмы ее разрушения и установления ХПТ, а также вычисляются в пространстве амплитуд волн Россби диаграммы ХПТ для нескольких пар нечетных волновых чисел. В разд. 4 ХПТ исследуется для четно-нечетных значений волновых чисел, когда отсутствует симметрия потока и неприменима методика разд. 3. Для этого случая разработан альтернативный алгоритм обнаружения ХПТ, основанный на выявлении перекрытия северного и южного стохастических слоев. Здесь же вычисляются в пространстве амплитуд волн Россби диаграммы ХПТ для нескольких пар четно-нечетных волновых чисел и обращается внимание на то, что в этом случае глобальный ХПТ наступает при значительно больших значениях амплитуд волн Россби, чем в случае нечетных волновых чисел. В разд. 5 подводятся итоги работы и обсуждается возможность проверки полученных результатов в лабораторных экспериментах с вращающейся жидкостью. В частности, объясняется, почему не был обнаружен попереч-

ный транспорт в экспериментальных работах [8–10] с реализованными там парами четно-нечетных волновых чисел, и предлагается создать струйный поток с нечетными волновыми числами Россби, когда глобальный ХПТ возникает при сравнительно малых значениях амплитуд волн Россби.

## 2. МОДЕЛЬНЫЙ СДВИГОВЫЙ ПОТОК С ВОЛНАМИ РОССБИ И ЕГО БИФУРКАЦИИ

### 2.1. Функция тока

Динамика двумерной несжимаемой жидкости во вращающейся системе координат описывается уравнением сохранения потенциальной завихренности  $(\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla)\Pi = 0$ . В квазигеострофическом приближении потенциальная завихренность имеет вид  $\Pi = \nabla^2 \Psi + \beta y$ , где параметр  $\beta$  пропорционален изменению силы Кориолиса с изменением широты [14]. Здесь  $x$  — координата в направлении зонального потока (запад–восток), а  $y$  — в направлении градиента (юг–север). Баротропные возмущения сдвиговых зональных потоков порождают планетарные длиннопериодные волны Россби, которые оказывают существенное влияние на транспорт и перемешивание в океане и атмосфере [14]. Ищем функцию тока в виде

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 + \Psi_{int} = \\ &= \Psi_0(y) + \sum_j \Phi_j(y) \exp\{ik_j(x - c_j t)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Psi_0$  описывает зональный поток, а  $\Psi_{int}$  — его возмущение, которое ищется в виде суперпозиции зональных бегущих волн Россби. В результате подстановки (4) в уравнение сохранения потенциальной завихренности и последующей его линеаризации получаем уравнение Рэлея–Куо для собственных значений [15]:

$$(u_0 - c_j) \left( \frac{d^2 \Phi_j}{dy^2} - k_j^2 \Phi_j \right) + \left( \beta - \frac{d^2 u_0}{dy^2} \right) \Phi_j = 0. \quad (5)$$

Если в качестве профиля скорости потока взять функцию

$$u_0(y) = U_0 \operatorname{sch}^2 \frac{y}{D} \quad (6)$$

(так называемая струя Бикли), то уравнение (5) допускает два симметричных и нейтрально устойчивых решения:

$$\Phi_j(y) = A_j U_0 D \operatorname{sch}^2 \frac{y}{D}, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

где  $U_0$  — максимальная скорость потока,  $D$  — мера его ширины,  $A_j$  — амплитуды волн. Легко проверить, что соотношения (6) и (7) согласуются с (5), если выполняются условия для фазовых скоростей:

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \frac{U_0}{3} (1 \pm \alpha), \quad \alpha \equiv \sqrt{1 - \beta^*}, \\ \beta^* &\equiv \frac{3D^2 \beta}{2U_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

которые связаны с волновыми числами дисперсионным соотношением  $c_{1,2} = U_0 D^2 k_{1,2}^2 / 6$ . Условие существования двух нейтрально устойчивых волн Россби имеет вид  $\beta D^2 / U_0 < 2/3$ .

Результирующая функция тока зонального сдвигового потока с двумя волнами Россби, удовлетворяющая линеаризованному уравнению сохранения потенциальной завихренности, имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t) &= -U_0 D \left( \operatorname{th} \frac{y}{D} - \operatorname{sch}^2 \frac{y}{D} \times \right. \\ &\times \left. [A_1 \cos(k_1(x - c_1 t)) + A_2 \cos(k_2(x - c_2 t))] \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Одной из задач данной работы является представление теоретических результатов в виде, допускающем сравнение с лабораторными экспериментами [8–10], где создавалась замкнутая в кольцо струя с двумя волнами, целое число длин которых,  $n_1$  и  $n_2$ , укладывается на окружность радиуса  $R$ , т. е.

$$k_{1,2} = \frac{n_{1,2}}{R}, \quad c_{1,2} = \frac{U_0 D^2}{6R^2} n_{1,2}^2. \quad (10)$$

Для определенности считаем, что  $n_1 > n_2$ , и волну с  $n_1$  называем первой, а с  $n_2$  — второй. Приведем дробь  $n_1/n_2$  к несократимому виду:  $n_1 = mN_1$ ,  $n_2 = mN_2$ , где  $m \neq 1$  — наибольший общий делитель  $n_1$  и  $n_2$ , а  $N_1/N_2$  — несократимая дробь. Введем новые координаты  $x'$ ,  $y'$ ,  $t'$ , такие что

$$x = \frac{(x' + C_2 t')R}{m}, \quad y = Dy', \quad t = \frac{R}{mU_0} t', \quad (11)$$

запишем безразмерную функцию тока в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью первой волны:

$$\begin{aligned} \Psi'(x', y', t') &= -\operatorname{th} y' + A_1 \operatorname{sch}^2 y' \cos(N_1 x') + \\ &+ A_2 \operatorname{sch}^2 y' \cos(N_2 x' + \omega_2 t') + C_2 y', \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\omega_2 \equiv \frac{2N_2(N_1^2 - N_2^2)}{3(N_1^2 + N_2^2)}, \quad C_2 \equiv \frac{2N_1^2}{3(N_1^2 + N_2^2)}. \quad (13)$$

В результате получена функция тока (12) с двумя управляющими параметрами (помимо амплитуд)  $N_1$  и  $N_2$ , которые определяются четырьмя экспериментальными параметрами:  $U_0, \beta, D, R$ . С этой функцией тока можно исследовать поперечный транспорт для любых пар чисел  $(n_1, n_2)$ , свобода реализации которых обеспечивается вариацией параметров эксперимента: радиуса  $R$ , ширины струи  $D$ , максимальной скорости  $U_0$  и  $\beta$ .

Уравнения адвекции (3) с функцией тока (12) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -C_2 + \operatorname{sch}^2 y [1 + 2A_1 \operatorname{th} y \cos(N_1 x) + \\ &\quad + 2A_2 \operatorname{th} y \cos(N_2 x + \omega_2 t)], \\ \frac{dy}{dt} &= -\operatorname{sch}^2 y [A_1 N_1 \sin(N_1 x) + \\ &\quad + A_2 N_2 \sin(N_2 x + \omega_2 t)], \end{aligned} \quad (14)$$

где опущены штрихи над  $x, y$  и  $t$ . Положим для определенности, что  $A_1 > A_2$ , тогда вторую волну можно считать возмущением. Если  $A_2 = 0$ , то функция тока (12) является стационарной, а система уравнений (14) — интегрируемой.

Для нечетных значений  $N_1$  и  $N_2$  уравнение (14) имеет две симметрии:

$$\hat{S} : \begin{cases} \tilde{x} = \pi + x, \\ \tilde{y} = -y, \\ \tilde{t} = t, \end{cases} \quad \hat{I}_0 : \begin{cases} \tilde{x} = -x, \\ \tilde{y} = y, \\ \tilde{t} = -t, \end{cases} \quad (15)$$

являющиеся инволюциями, т. е.  $\hat{S}^2 = 1$  и  $\hat{I}_0^2 = 1$ . Благодаря симметрии  $\hat{S}$ , движение адвектируемых частиц может быть рассмотрено на цилиндре с  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Часть фазового пространства с  $2\pi n \leq x \leq 2\pi(n+1)$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ , называется фреймом.

### 2.2. Анализ устойчивости стационарных точек и бифуркации потока

Для стационарной функции тока ( $A_2 = 0$ )

$$\Psi_{st} = -\operatorname{th} y + A_1 \operatorname{sch}^2 y \cos(N_1 x) + C_2 y \quad (16)$$

уравнения адвекции имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -C_2 + \operatorname{sch}^2 y (1 + 2A_1 \operatorname{th} y \cos(N_1 x)), \\ \frac{dy}{dt} &= -A_1 N_1 \operatorname{sch}^2 y \sin(N_1 x). \end{aligned} \quad (17)$$

Для нахождения стационарных точек приравняем нулю правые части системы (17). Из второго уравнения получаем, что стационарные точки находятся

при  $x = 2\pi n/N_1$  и  $x = (2\pi n + \pi)/N_1$ , где  $n$  — целое число. Подставляя найденные значения  $x$  в первое уравнение, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sch}^2 y (1 + 2A_1 \operatorname{th} y) - C_2 &= 0, \\ \operatorname{sch}^2 y (1 - 2A_1 \operatorname{th} y) - C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Вводя обозначение  $z \equiv \operatorname{th} y$ , получаем следующее алгебраическое уравнение:

$$2A_1 z^3 + z^2 - 2A_1 z + C_2 - 1 = F(z) = 0. \quad (19)$$

Функция  $F(z)$  имеет два экстремума при

$$\begin{aligned} z_{max} &= -\frac{\sqrt{1 + 12A_1^2} + 1}{6A_1} < 0, \\ z_{min} &= \frac{\sqrt{1 + 12A_1^2} - 1}{6A_1} > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В силу того, что  $0 < C_2 < 2/3$  и соответственно  $F(\pm 1) = C_2 > 0$ , а также  $F(0) = C_2 - 1 < 0$ , уравнение (19) имеет три корня:  $z_1 \in (0 : 1)$ ,  $z_2 \in (-1 : 0)$ ,  $z_3 < -1$ . У решения  $z_3$  отсутствует физический смысл, так как  $z = \operatorname{th} y$ .

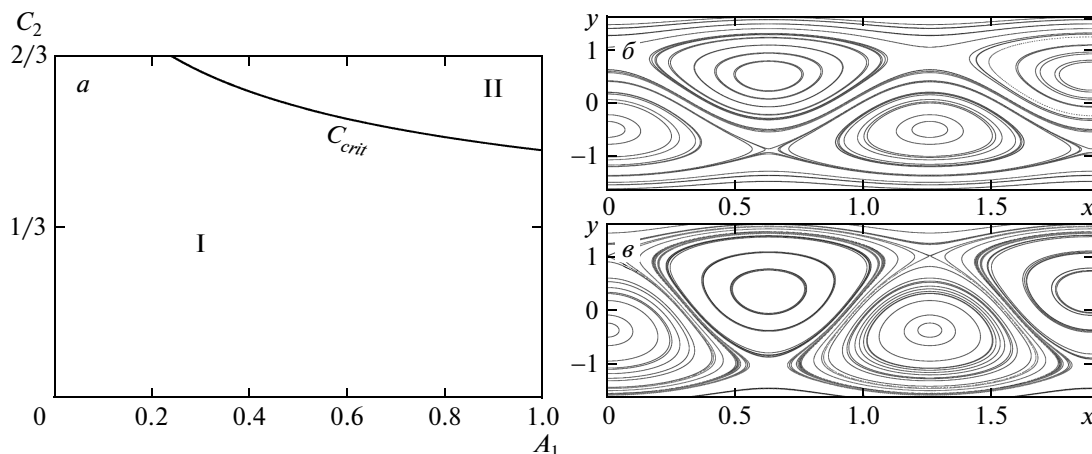
Таким образом, уравнения адвекции (17) имеют четыре стационарных точки. Анализ устойчивости показывает, что при  $x = 2\pi n/N_1$  (или  $(2\pi n + \pi)/N_1$ ) верхняя точка является седлом (центром), а нижняя — центром (седлом).

На рис. 1а приведена бифуркационная диаграмма состояний системы на плоскости управляющих параметров: амплитуды  $A_1$  и фазовой скорости  $C_2$ . Зона значений параметров I соответствует гетероклиническому режиму потока с центральной струей, текущей на восток, а зона II — гомоклиническому режиму с западной центральной струей.

При выполнении условия  $C_2 = C_{crit}$  в системе происходит бифуркация типа «пересоединение сепаратрис» (separatrix reconnection) [16]. Термин «пересоединение» означает слияние двух сепаратрис, т. е. топологическую перестройку линий тока, при которой не происходит смены типа устойчивости и количества стационарных точек. В результате пересоединения сепаратрис фазовый портрет меняет свой тип с гетероклинического на гомоклинический (см. рис. 1б, в). Нам не удалось получить аналитическое условие для пересоединения сепаратрис, но это легко сделать численно, воспользовавшись условием

$$\Psi_0^s(A_1, C_2) = \Psi_{\pi/N_1}^s(A_1, C_2) = 0,$$

где  $\Psi_0^s(A_1, C_2)$  и  $\Psi_{\pi/N_1}^s(A_1, C_2)$  — значения стационарной функции тока в седловых точках соответственно  $x = 0$  и  $x = \pi/N_1$ .



**Рис. 1.** а) Бифуркационная диаграмма состояний стационарного потока (16) на плоскости управляющих параметров  $A_1$ – $C_2$ . Зона значений I соответствует гетероклиническому режиму потока с восточной центральной струей, зона II — гомоклиническому режиму с западной центральной струей. б, в) Фрагменты фазовых портретов стационарного потока в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью первой волны: гетероклинический (б) и гомоклинический (в) режимы

### 3. ХАОТИЧЕСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ТРАНСПОРТ ДЛЯ НЕЧЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ

#### 3.1. Основные определения

Дадим определения основных структур, характеризующих ХПТ в зональном сдвиговом потоке. Отметим, что стационарный поток с функцией тока (16) является вырожденным, т. е.  $\partial f_{st}/\partial \Psi_{st} = 0$ , где  $f_{st}$  — частота движения адвектируемых частиц в невозмущенном потоке. В математической литературе отображения с таким свойством носят название незакручивающих отображений (nontwist maps) [11, 16–18].

Вместо вычисления траекторий адвектируемых частиц удобно строить соответствующие отображения Пуанкаре. Орбитой отображения Пуанкаре называется такая совокупность точек  $\{(x_i, y_i)\}_{i=-\infty}^{\infty}$  на фазовой плоскости, для которых выполняется соотношение  $\hat{G}_T(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$ , где  $\hat{G}_t$  — оператор эволюции на интервал времени  $t$ , а  $T \equiv 2\pi/\omega_2$  — период возмущения. Оператор  $\hat{G}_T$  можно представить в виде произведения двух инволюций:  $\hat{G}_T = \hat{I}_1 \hat{I}_0$ , где  $\hat{I}_1 = \hat{G}_T \hat{I}_0$  — инвариантный относительно обращения времени оператор.

Периодической орбитой периода  $nT$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) называют орбиту, для которой выполняется условие  $(x_{i+n}, y_{i+n}) = (x_i + 2\pi m, y_i)$ ,  $\forall i$ , где  $m$  — целое число. Число вращения  $w$  орбиты определяется выражением  $w = \lim_{i \rightarrow \infty} [(x_i - x_0)/2\pi i]$ .

Число вращения есть отношение собственной частоты движения в системе  $f$  к частоте возмущения  $\omega_2$ . Периодические орбиты имеют рациональные числа вращения  $w = m/n$ . Это выражение означает, что баллистическая пассивная частица проходит в потоке  $m$  фреймов и возвращается в свое первоначальное положение на цилиндре после  $n$  периодов возмущения. Числа вращения квазипериодических орбит являются иррациональными.

Для дальнейшего изложения важно понятие ЦИК — это кривая, инвариантная относительно операторов  $\hat{S}$  и  $\hat{G}_T$ . Нетрудно показать, что две кривые, инвариантные относительно оператора  $\hat{S}$ , имеют, как минимум, две общие точки. Кривые, инвариантные относительно  $\hat{G}_T$ , не могут пересекаться. Таким образом, из определения следует, что ЦИК является единственной. ЦИК соответствует локальному экстремуму на профиле числа вращения с иррациональным значением  $w(y)$ . Значимость ЦИК состоит в том, что она разделяет поток на северную и южную части и является барьером для поперечного транспорта. Когда ЦИК разрушена, частицы могут перемещаться из северной части в южную и наоборот. Такую ситуацию мы и называем поперечным транспортом (cross-jet transport). Как будет показано далее, при разрушении ЦИК на ее месте возникает стохастический слой, ширина которого может меняться в больших пределах. Будем называть локальным ХПТ такой режим, когда средняя ширина стохастического слоя  $h = S/2\pi \ll 1$ , где  $S$  — пло-

щадь стохастического слоя,  $2\pi$  — длина фрейма. Отметим, что полуширина струи в нормированных переменных (11) равна 1. Глобальным ХПТ будем называть ситуацию с  $h \gtrsim 1$ . В этом случае область хаотического перемешивания сравнима с поперечным размером струи.

Одним из следствий нарушения условия невырожденности является возможность существования более чем одной орбиты с заданным числом вращения. Такие орбиты возникают парами по обе стороны от ЦИК. Они могут сталкиваться и аннигилировать при вариации управляющих параметров. Столкновение периодических орбит является частью феномена «пересоединения» (reconnection) инвариантных множеств соответствующих гиперболических орбит [16]. Методика, изложенная в этом разделе, справедлива для любых пар нечетных значений волновых чисел Россби  $N_1$  и  $N_2$ . Напомним, что  $N_1/N_2$  — несократимая дробь. Фактические волновые числа  $n_1 = mN_1$  и  $n_2 = mN_2$  могут принимать и четные значения.

Для иллюстрации полученных результатов мы выбрали в этом разделе пару с  $N_1 = 5$  и  $N_2 = 1$ . На рис. 2а представлен фазовый портрет стационарного потока ( $A_2 = 0$ ) в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью первой волны. Благодаря выбранной нормировке во фрейме размером  $2\pi$  укладывается пять длин первой волны и одна длина второй. Между двумя цепочками из пяти вихрей находится струя, текущая на восток. Периферийные течения к югу и северу от струи в выбранной системе отсчета являются западными. В стационарном потоке все частицы следуют линиям тока. При  $A_2 > 0$  уравнение (14) допускает хаотические решения. Хаос возникает по типичному для нелинейных гамильтоновых систем сценарию: на месте разрушенных сепаратрис интегрируемой системы возникает стохастический слой. При некоторых критических значениях амплитуд волн ЦИК, находящаяся в центральной области струи, разрушается и на ее месте возникает стохастический слой. Этот слой заперт между инвариантными кривыми, а его ширина в среднем увеличивается с ростом амплитуд волн. На рис. 2б ЦИК показана жирной линией. К северу и югу от ЦИК находятся стохастические слои с хаотическим транспортом. Это сечение Пуанкаре построено для такого значения амплитуды второй волны  $A_2 = 0.09$ , при котором ЦИК вместе с окружающими ее инвариантными кривыми формирует узкий транспортный барьер, препятствующий поперечному транспорту. Увеличение  $A_2$  приводит к разрушению ЦИК, образованию центрального стохастического слоя на ее

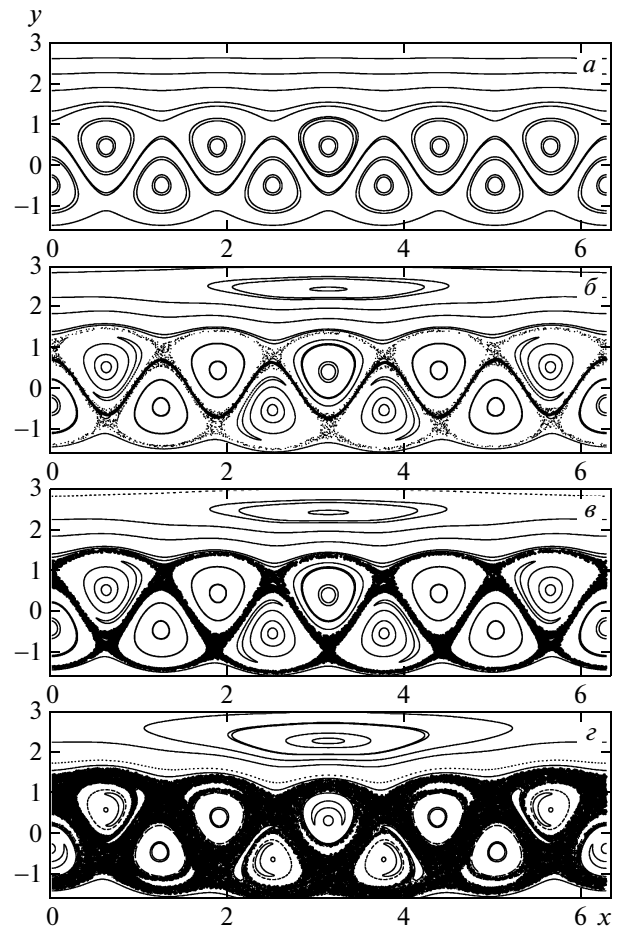


Рис. 2. Сечения Пуанкаре сдвигового потока с двумя волнами Россби (12) с  $N_1 = 5$  и  $N_2 = 1$  в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью первой волны для различных значений амплитуды второй волны ( $A_1 = 0.2416$ ). а) Контуры линий тока стационарного течения ( $A_2 = 0$ ). б) При  $A_2 = 0.09$  существует зональный хаотический транспорт, но ЦИК (жирная кривая) является барьером для поперечного транспорта. в) При  $A_2 = 0.095$  ЦИК разрушена и на ее месте возникает стохастический слой с локальным ХПТ. г) При  $A_2 = 0.2$  ХПТ является глобальным

месте и возникновению локального ХПТ (рис. 2в). Ширина этого слоя увеличивается при дальнейшем увеличении амплитуды второй волны и ХПТ становится глобальным (рис. 2г).

### 3.2. Центральная инвариантная кривая

Изложим алгоритм построения ЦИК. Решая уравнение  $\hat{I}_0(x^{(j)}, y^{(j)}) = \hat{S}(x^{(j)}, y^{(j)})$ ,  $j = 1, 2$ , находим индикаторные точки [17]:  $(x^{(1)} = \pi/2, y^{(1)} = 0)$

и  $(x^{(2)} = 3\pi/2, y^{(2)} = 0)$ . Далее исследуется поведение итераций отображения Пуанкаре первой индикаторной точки  $(x_i, y_i) = \hat{G}_T^i(x^{(1)}, y^{(1)})$ . Возможны три ситуации в зависимости от значения размерности покрытия  $d$  множества  $(x_i, y_i)$ .

1. Итерации лежат на кривой с размерностью  $d = 1$ , которая и является ЦИК.

2. Итерации образуют множество точек с  $d = 0$ . Это означает, что итерации составляют либо центральную периодическую орбиту, либо центральную почти периодическую орбиту, т. е. орбиту, которая не успевает образовать гладкую кривую на фазовой плоскости за ограниченный интервал времени интегрирования.

3. Итерации образуют стохастический слой с  $d = 2$ .

Размерность  $d$  множества итераций на фазовой плоскости рассчитывалась методом покрытия ячейками размером  $e_k = (1/2)^k$ :

$$d_k = \log_2 \frac{n_{k+1}}{n_k}, \quad (21)$$

где  $n_k$  — число ячеек размером  $e_k$ , содержащих точки множества. С уменьшением величины  $e_k$  значение размерности  $d$  стремится к нулю, поэтому для больших  $k$  мы теряем возможность различать ситуации с центральной почти периодической кривой и стохастическим слоем. Экспериментально было найдено значение  $k = 4$ , позволяющее различать все возможные ситуации расположения итераций на фазовой плоскости.

Таким образом, тип расположения итераций индикаторных точек является признаком отсутствия или наличия барьера для поперечного транспорта. Подчеркнем, что этот метод применим только к потокам с нечетными редуцированными волновыми числами  $N_1$  и  $N_2$ , когда поток обладает необходимой симметрией и можно записать уравнение для индикаторных точек.

Рисунок 3 иллюстрирует метаморфозы ЦИК с ростом амплитуды второй волны Россби  $A_2$ . При малых значениях этой амплитуды ЦИК является меандрирующей кривой (см. рис. 3а). При критическом значении  $A_2 = 0.0605$  инвариантные многообразия гиперболических орбит двух цепочек островов резонанса  $7 : 3$  соединяются, в результате чего ЦИК разрушается. Дальнейший рост амплитуды приводит к расщеплению инвариантных многообразий и возрождению ЦИК, которая становится кривой первого порядка меандрирования с семью меандрами (см. рис. 3б). Количество меандров (складок) на ЦИК определяется количеством резонансных островов в пересоединяющихся цепочках. Последующий

рост амплитуды приводит к появлению новых складок на ЦИК. На рис. 3в показана ЦИК второго порядка меандрирования с 33 меандрами. На рис. 3г показана ЦИК высокого порядка меандрирования. Количество складок на такой кривой трудно определить.

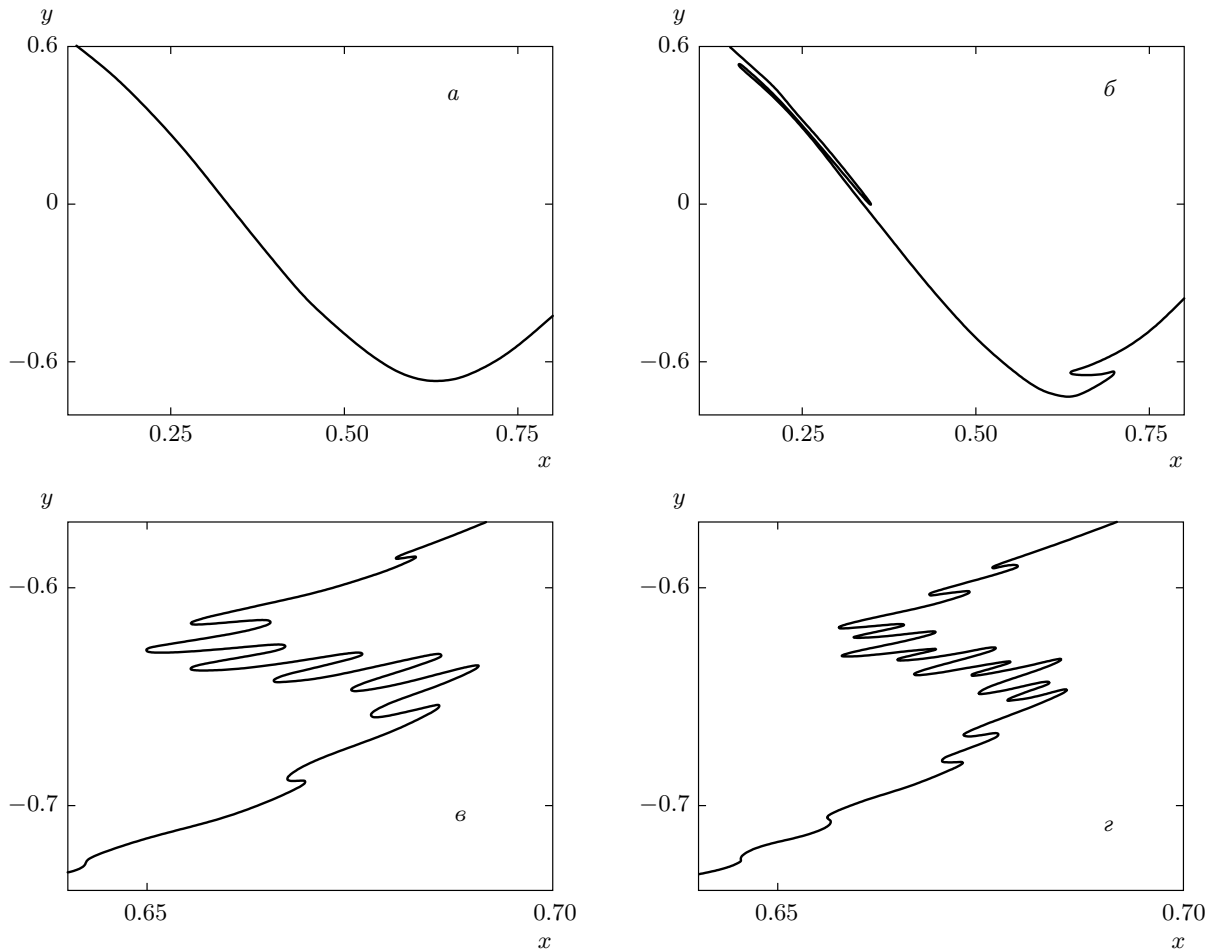
### 3.3. Механизмы возникновения хаотического поперечного транспорта

В результате численных экспериментов выявлены два механизма возникновения ХПТ. С увеличением амплитуд волн Россби растет ширина южного и северного стохастических слоев, разделенных ЦИК. При некоторых критических значениях амплитуд эти слои сливаются, разрушая ЦИК. Это амплитудный механизм разрушения ЦИК и установления ХПТ, который обычно является глобальным.

Рисунок 4 иллюстрирует амплитудный механизм разрушения ЦИК и установления ХПТ. При фиксированной амплитуде первой волны  $A_1 = 0.2418$  будем увеличивать амплитуду возмущения  $A_2$ . На рис. 4а показана ситуация, когда итерации индикаторной точки в окрестности резонанса  $7 : 3$  образуют ЦИК, разделяющую северный и южный стохастические слои. На рис. 4б показана другая типичная ситуация, когда итерации образуют на фазовой плоскости маленькие сегменты, сливающиеся при  $t \rightarrow \infty$  в непрерывную кривую, являющуюся центральной почти периодической орбитой, разделяющей северный и южный стохастические слои. На рис. 4в итерации не укладываются на какую-либо кривую, поскольку ЦИК разрушена вследствие слияния северного и южного стохастических слоев. Для данного значения амплитуды возмущения ( $A_2 = 0.088$ ) средняя ширина стохастического слоя мала,  $h \ll 1$ , что соответствует локальному ХПТ. Рисунок 4г иллюстрирует режим глобального ХПТ с  $h \approx 2$  ( $A_2 = 0.2$ ). Анимацию сечений Пуанкаре потока, иллюстрирующую амплитудный механизм разрушения ЦИК и установления глобального ХПТ для пары волновых чисел  $N_1 = 3$  и  $N_2 = 1$ , см. по ссылке [19].

Существует и другой механизм разрушения ЦИК — резонансный, который работает при сколь угодно малых значениях амплитуд волн Россби. Вариации амплитуд приводят к изменению значения числа вращения на ЦИК. При рациональных значениях числа вращения ЦИК разрушается и возникает, как правило, локальный ХПТ.

В струе частицы двигаются по баллистическим траекториям, поэтому разумно предположить, что



**Рис. 3.** Метаморфозы ЦИК в сдвиговом потоке с волновыми числами  $N_1 = 5$  и  $N_2 = 1$  при фиксированной амплитуде первой волны,  $A_1 = 0.243$ , и вариации амплитуды второй волны Россби. *а*) Немеандрирующая ЦИК ( $A_2 = 0.05$ ). *б*) ЦИК первого порядка меандрирования с 7 меандрами ( $A_2 = 0.082$ ). *в*) ЦИК второго порядка меандрирования с 33 меандрами ( $A_2 = 0.099$ ). *г*) ЦИК высокого порядка меандрирования ( $A_2 = 0.1047$ )

ЦИК разрушается благодаря баллистическому резонансу между максимальной частотой движения частиц в центре струи невозмущенной системы и частотой возмущения  $\omega_2$ . Первую частоту оценим из уравнения (14),  $f_1 \approx -C_2 + 1$ , а вторая задается выражением (13). Тогда оценка числа вращения ЦИК  $w$  при малых амплитудах волн имеет вид [13]

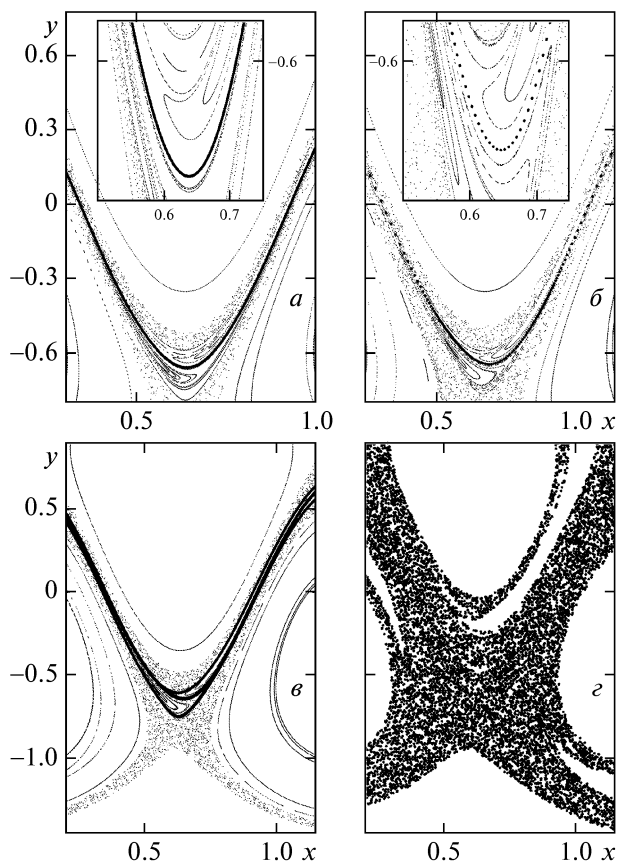
$$w \approx \frac{f_1}{\omega_2} \approx \frac{N_1^2 + 3N_2^2}{2N_2(N_1^2 - N_2^2)}. \quad (22)$$

Приравнивая правую часть выражения (22) к рациональному числу, мы можем найти такие пары значений  $N_1$  и  $N_2$ , при которых ЦИК подвергается влиянию соответствующего резонанса и, следовательно, возможно возникновение поперечного транспорта при сравнительно малых амплитудах волн.

С увеличением амплитуды возмущения некоторые гладкие инвариантные кривые в окрестности ЦИК разрушаются и на их месте возникают цепочки островов баллистических резонансов. Такие цепочки островов возникают парами по обе стороны от ЦИК, что является следствием наличия у потока симметрий (15). Геометрия ЦИК, размер и число резонансных островов, а также топология их инвариантных многообразий зависят сложным образом от значения управляющих параметров.

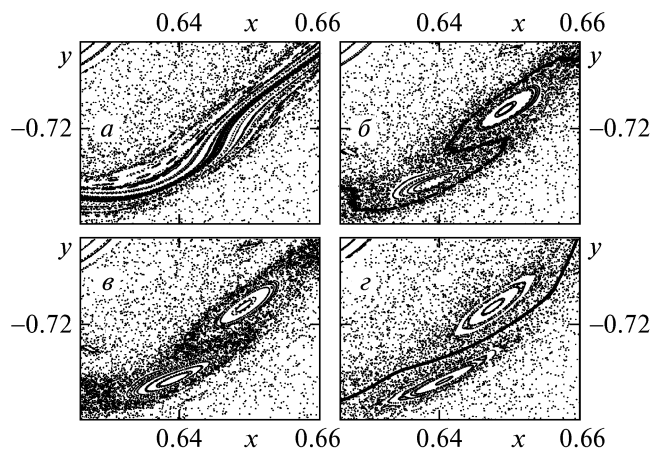
Рисунок 5 иллюстрирует резонансный механизм разрушения ЦИК и установление локального ХПТ. На рисунке приведены сечения Пуанкаре в интервале значений  $A_2 = [0.1016 : 0.1024]$  при фиксированной амплитуде первой волны  $A_1 = 0.243$ . В этом интервале значений происходят пересоедине-





**Рис. 4.** Разрушение ЦИК и процесс установления ХПТ при фиксированной амплитуде первой волны,  $A_1 = 0.2418$ , и вариации амплитуды второй волны Россби  $A_2$ . *а, б* — ситуации, когда итерации индикаторной точки (жирные точки) укладываются на: *а*) ЦИК ( $A_2 = 0.067$ ), *б*) центральную почти периодическую орбиту ( $A_2 = 0.08703$ ). *в, г* — случаи, когда ЦИК разрушена и итерации образуют стохастический слой с локальным (*в*) и глобальным (*г*) ХПТ, ( $A_2 = 0.088$  (*в*),  $0.2$  (*г*)). На вставках показаны увеличенные изображения фазового пространства вблизи островов резонанса  $7 : 3$

ния и разъединения инвариантных многообразий гиперболических орбит нечетного резонанса  $151 : 64$ , а также меандрирование, исчезновение и возрождение ЦИК. На рис. 5 *а* ЦИК и окружающие ее гладкие инвариантные кривые являются транспортным барьером. С увеличением амплитуды второй волны при  $A_{cr} = 0.102$  происходит рождение пары цепочек островов резонанса  $151 : 64$  по обе стороны от ЦИК, которая становится кривой с  $151$  меандром (рис. 5*б*). Последующее увеличение  $A_2$  приводит к слиянию инвариантных многообразий гиперболических орбит резонанса  $151 : 64$ , разрушению ЦИК и

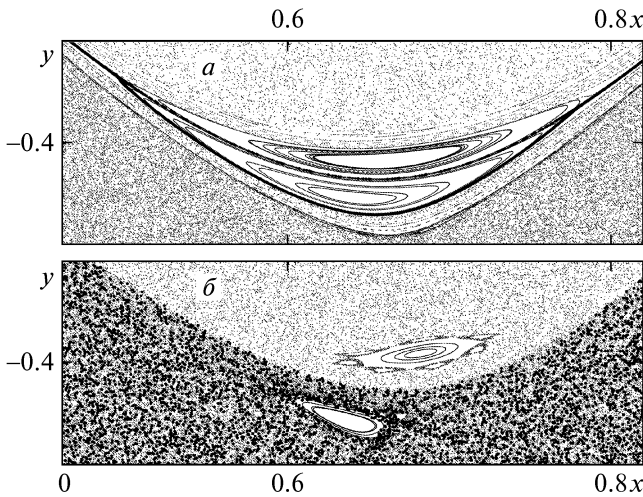


**Рис. 5.** Сечения Пуанкаре иллюстрируют резонансный механизм разрушения ЦИК и установление локального ХПТ в интервале значений  $A_2 = [0.1016 : 0.1024]$  при  $A_1 = 0.243$ . *а*) ЦИК в окружении гладких инвариантных кривых ( $A_2 = 0.102$ ). *б*) В результате бифуркации «седло-центр» ( $A_2 = 0.1022212 > A_{cr}$ ) по обе стороны от ЦИК появляются цепочки островов резонанса  $151 : 64$  и ЦИК становится кривой с  $151$  меандром. *в*) В результате слияния инвариантных многообразий гиперболических орбит резонансов высокого порядка на месте ЦИК возникает стохастический слой ( $A_2 = 0.102225$ ). *г*) В результате разъединения многообразий гиперболических орбит резонанса  $151 : 64$  появляется новая ЦИК ( $A_2 = 0.10236$ )

установлению локального ХПТ. Далее многообразия гиперболических орбит резонанса  $151 : 64$  разъединяются, порождая новую ЦИК, препятствующую поперечному транспорту.

Следует различать два сценария разрушения ЦИК, связанных с наличием четных или нечетных резонансов вблизи ЦИК. Резонанс  $n : m$  называется четным или нечетным в зависимости от того, четным или нечетным является  $n$ . Здесь  $m$  — количество фреймов, проходимых частицей за  $n$  периодов возмущения.

В рассмотренном выше случае нечетного резонанса в результате бифуркации «седло-центр» по обе стороны ЦИК рождается пара цепочек резонансных островов. Далее при увеличении амплитуды возмущения размеры островов и меандров ЦИК увеличиваются. При некотором критическом значении амплитуды происходит слияние инвариантных многообразий гиперболических орбит, сопровождающееся разрушением ЦИК. Дальнейшее увеличение амплитуды приводит к разъединению этих многообразий с



**Рис. 6.** Разрушение ЦИК при движении вдоль бифуркационной кривой с числом вращения  $w = 1/2$ . *а)* В результате соединения инвариантных многообразий гиперболических орбит четного резонанса ЦИК разрушена и на ее месте возникает узкий стохастический слой, запертый между гладкими инвариантными кривыми ( $A_1 = 0.2038, A_2 = 0.17$ ). *б)* Соприкосновение северного и южного стохастических слоев при  $A_1 = 0.2038, A_2 = 0.205$ . ЦИК разрушена, но ХПТ фактически нет, так как итерации индикаторной точки (жирные точки) заполняют только южную область потока и за очень большое время не пересекают границу между слоями, несмотря на то что не существует инвариантных кривых, препятствующих этому переходу

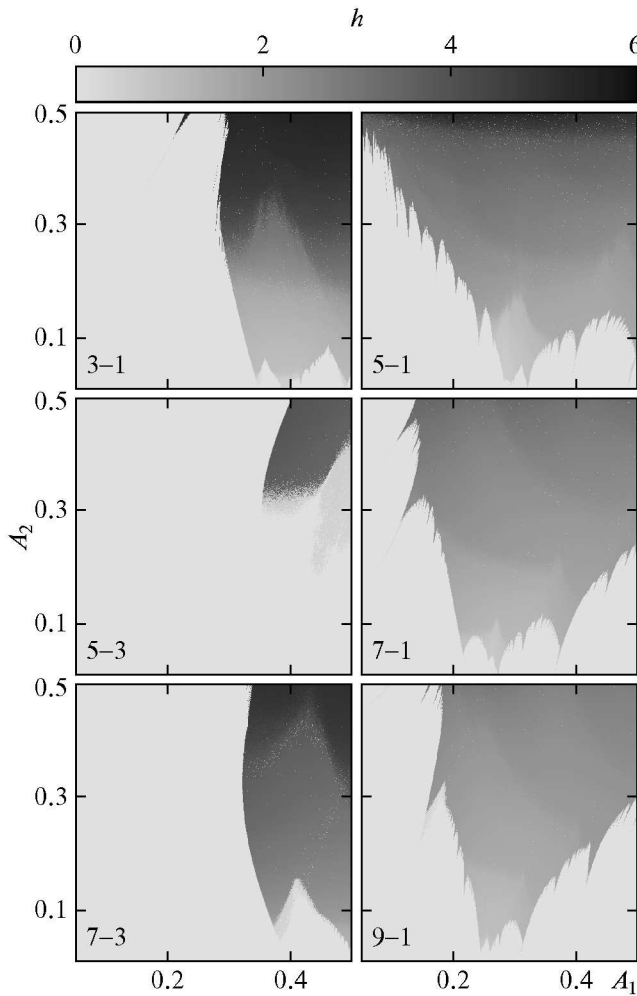
возрождением новой ЦИК. Этот процесс в литературе по незакручивающим отображениям называется пересоединением сепаратрис [16].

В случае четного резонанса при увеличении амплитуды возмущения происходит постепенное сближение цепочек резонансных островов, разделенных ЦИК. При некотором критическом значении амплитуды цепочки сливаются, образуя вихревые пары. На месте разрушенной ЦИК появляется узкий стохастический слой, опоясывающий вихревые пары. При дальнейшем увеличении амплитуды происходит постепенное уменьшение размеров вихревых пар, завершающееся аннигиляцией гиперболических и эллиптических орбит и рождением новой ЦИК.

Интересный пример возникновения ХПТ при выборе значений амплитуд волн Россби вдоль бифуркационной кривой с числом вращения  $w = 1/2$  приведен на рис. 6. Резонансная бифуркационная кривая  $m/n$  — это множество значений амплитуд, при которых происходит слияние инвариантных многооб-

разий гиперболических орбит резонанса  $n : m$ . При амплитудах  $A_1 = 0.2038$  и  $A_2 = 0.17$ , выбранных на этой бифуркационной кривой, образуется цепочка вихревых пар, окруженных инвариантными кривыми (рис. 6*а*). При движении вдоль бифуркационной кривой с увеличением амплитуд происходит постепенное разрушение инвариантных кривых, уменьшение размера вихревых пар и увеличение площади северного и южного стохастических слоев. При достаточно больших амплитудах разумно ожидать перекрытия этих слоев с образованием единого слоя, точки которого свободно мигрируют с севера на юг и наоборот. Однако это не всегда так. На рис. 6*б* мы видим соприкосновение северного и южного стохастических слоев при  $A_1 = 0.2038$  и  $A_2 = 0.205$ . Строились итерации индикаторной точки (жирные точки), которые заполнили всю доступную южную область потока, но не весь слой, как ожидалось. Подчеркнем, что за очень большое время (число итераций достигает 5 миллионов!) итерации индикаторной точки не пересекают видимую на рисунке границу между слоями, несмотря на то что не существует инвариантных кривых, препятствующих этому переходу. Можно предположить, что в результате разрушения ЦИК возникает сложная и плотная сеть устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических орбит, которая и является транспортным барьером. В сущности, это означает, что в ситуации, изображенной на рис. 6*б*, ЦИК разрушена, но ХПТ фактически нет. Он возникает только при дальнейшем увеличении амплитуд волн Россби. Анимацию сечений Пуанкаре потока, иллюстрирующую этот эффект для пары волновых чисел  $N_1 = 5$  и  $N_2 = 3$ , см. по ссылке [20].

Завершим этот раздел построением диаграмм ХПТ для набора пар нечетных волновых чисел в диапазонах значений амплитуд волн Россби  $A_1 = [0.05 : 0.5]$  и  $A_2 = [0.05 : 0.5]$ . Для каждой пары вычислялись итерации первой индикаторной точки. Если точки при итерировании составляют ЦИК или центральную периодическую орбиту, то поперечный транспорт очевидно отсутствует. На рис. 7 этой ситуации отвечает белый цвет. Начиная с определенных для каждой пары волновых чисел значений волновых амплитуд, растет ширина стохастического слоя, возникающего на месте разрушенной ЦИК. Оттенки серого цвета на рис. 7 характеризуют эту ширину. Для значений  $h < 1$  ХПТ является локальным (серые области на рисунке). Черный цвет означает, что при данных амплитудах волн Россби ХПТ становится глобальным,  $h > 1$ . Особое значение имеет вид границы перехода между режимами с существо-



**Рис. 7.** Диаграммы ХПТ в координатах амплитуд волн Россби для набора пар нечетных волновых чисел 3–1, 5–1, 5–3, 7–1, 7–3, 9–1. Цвет кодирует ширину стохастического слоя  $h$ , возникающего на месте разрушенной ЦИК. Белый цвет — отсутствие ХПТ, серый — локальный ХПТ, черный — глобальный ХПТ

ванием ЦИК и наличием ХПТ. Изрезанность этой границы на диаграммах (наличие шипов) обусловлена существованием цепочек резонансных островов вблизи ЦИК.

#### 4. ХАОТИЧЕСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ТРАНСПОРТ ДЛЯ ЧЕТНО-НЕЧЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ

В этом разделе приводятся результаты численного исследования поперечного транспорта в потоке (12) для четно-нечетных значений волновых чи-

сел  $N_1$  и  $N_2$ . В этом случае уравнение адвекции (14) уже не имеет симметрии  $\hat{S}$  (см. уравнение (15)), наличие которой позволило нам разработать в предыдущем разделе методику построения ЦИК с последующим изучением бифуркаций этой кривой и ее разрушения. Представим численный метод установления поперечного транспорта для четно-нечетных значений волновых чисел.

Будем определять наличие поперечного транспорта по перекрытию северного и южного стохастических слоев, которые формируются при вычислении на достаточно большое время сечений Пуанкаре с начальными условиями, взятыми, соответственно, в северной и южной областях потока по отношению к центральной струе. Перекрытие двух таких слоев определим следующим образом. Если каждая точка первого стохастического слоя лежит во втором и наоборот, то два таких слоя перекрываются. Полного перекрытия при счете на конечное время, конечно, не происходит, т. е. слои перекрываются частично.

Представим алгоритм определения того, что некая точка принадлежит стохастическому слою. Пусть имеется точка  $A$  и множество точек  $B_i$ , случайно распределенных в некоторой ограниченной области  $D$  (область  $D$  точно неизвестна, но имеется набор точек  $B_i$ ). Для каждой точки  $B_i$  рассчитаем расстояние до ее ближайшего соседа  $r_i = \min_{j \neq i} \|B_i, B_j\|$ , где  $\|B_i, B_j\|$  — расстояние между точками  $B_i$  и  $B_j$ . Будем считать точку  $A$  принадлежащей области  $D$ , если расстояние от  $A$  до  $B_i$  меньше, чем максимальное расстояние до ближайшего соседа в множестве  $B_i$ :  $\min_i \|B_i, A\| \leq R = \max_i r_i$ . На практике мы используем не максимальное расстояние  $R$ , а такое расстояние  $R_n$ , что  $n$ -я часть значений  $r_i$  меньше  $R_n$ . Таким образом, при  $n = 0.95$  получаем, что 95% процентов точек находятся на расстоянии до ближайшего соседа меньше, чем  $R_{0.95}$ . Это делается для того, чтобы избежать случайных выбросов в распределении  $r_i$ . С другой стороны, при использовании критерия  $R_n$  точки, заведомо принадлежащие  $D$ , будут отбрасываться с вероятностью  $1 - n$ . Впрочем, на детектировании поперечного транспорта это не отражается.

Для определения факта перекрытия двух стохастических слоев на сечениях Пуанкаре мы вычисляем и анализируем величины  $F_1$  и  $F_2$ , где  $F_1$  — доля частиц из первого сечения, принадлежащих второму стохастическому слою,  $F_2$  — доля частиц из второго сечения, принадлежащих первому стохастическому слою. Принадлежность определяется по алгоритму, приведенному выше. Для данной задачи возможны

следующие варианты.

1.  $F_1 = F_2 = 0$ . Стохастические слои никак не перекрываются.

2.  $F_1 \approx n \approx F_2$ . Стохастические слои полностью перекрыты. Значение  $n$  меньше 1 по причине, приведенной выше.

3.  $F_1 \approx F_2 \ll 1$ . Стохастические слои не перекрываются, но касаются друг друга. Такое случается при разрушении невырожденных инвариантных торов, но не при разрушенной ЦИК или, когда поперечный транспорт существует, но маловероятен, как при разрушении ЦИК четными резонансами (см. рис. 6б).

4. В прочих случаях стохастические слои частично перекрыты, но время счета оказалось недостаточным для полного перекрытия.

На рис. 8 представлены диаграммы поперечного транспорта в координатах амплитуд волн Россби для четно-нечетных значений волновых чисел 3–2, 5–4 и 6–5, рассчитанные по приведенному выше алгоритму. Белый цвет означает, что для данных значений волновых амплитуд южный и северный стохастические слои не перекрываются, т. е. существует барьер, препятствующий поперечному транспорту. Градации серого цвета на диаграммах кодируют ширину единого стохастического слоя. В этом случае существует ХПТ. Для четно-нечетных значений волновых чисел глобальный поперечный транспорт становится возможным только для значений амплитуд волн Россби порядка единицы. Это в несколько раз больше, чем для нечетных волновых чисел. Следует отметить, что с ростом амплитуды второй волны поток может переходить из гетероклинического режима в гомоклинический с западной центральной струей. Предложенная нами методология применима и для таких ситуаций.

Вряд ли волны Россби с такими большими амплитудами ( $A_1, A_2 > 1$ ) могут возникать в реальных геофизических потоках или в лабораторных экспериментах. Анимацию сечений Пуанкаре потока, иллюстрирующую возникновение глобального ХПТ для пары волновых чисел  $N_1 = 5$  и  $N_2 = 4$ , см. по ссылке [21].

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И СВЯЗЬ С ЛАБОРАТОРНЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Кратко изложим основные результаты работы. В разд. 2.1 выведена двумерная функция тока зонального сдвигового потока с двумя устойчивыми вол-

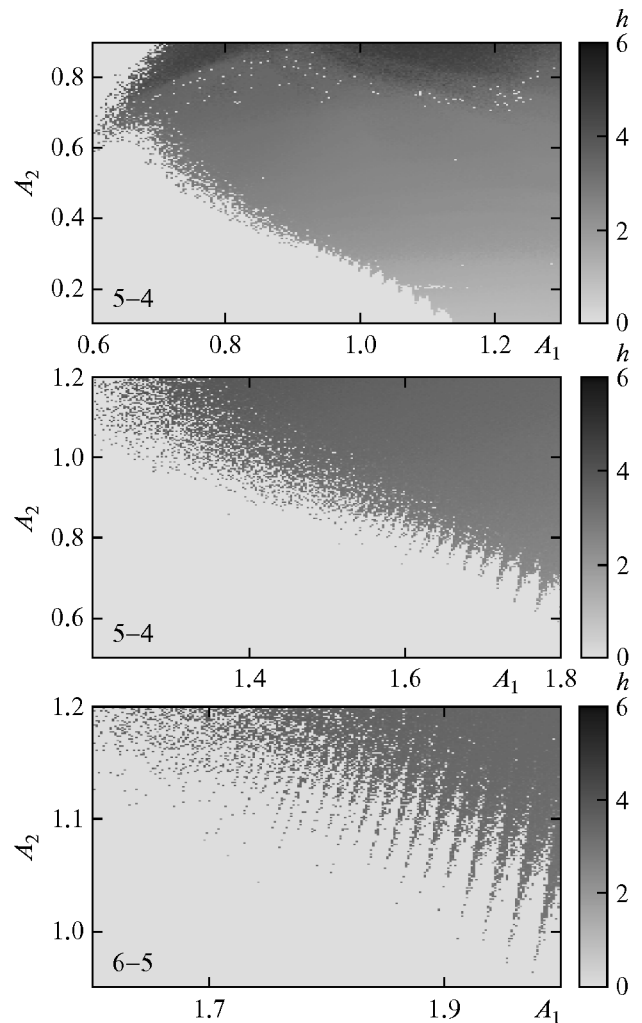


Рис. 8. Диаграммы ХПТ в координатах амплитуд волн Россби для четно-нечетных значений волновых чисел: 3–2, 5–4, 6–5. Цвет кодирует ширину единого стохастического слоя. Белый цвет — отсутствие ХПТ

нами Россби, удовлетворяющая уравнению сохранения потенциальной завихренности несжимаемой жидкости. В системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью первой волны, эта функция тока является суммой стационарной компоненты и зависящего от времени возмущения. Анализ устойчивости стационарных точек и бифуркации стационарного потока приведен в разд. 2.2 (рис. 1). Наличие второй волны (возмущения) приводит к возникновению хаотической адвекции пассивных частиц, происходящей по типичному для гамильтоновых систем сценарию (рис. 2).

Записав волновые числа Россби в виде  $n_1 = mN_1$ ,  $n_2 = mN_2$ , где  $m \neq 1$  — наибольший общий делитель  $n_1$  и  $n_2$ , а  $N_1/N_2$  — несократимая дробь, мы свели все возможные пары волновых чисел к двум классам: 1) нечетные значения  $N_1$  и  $N_2$ ; 2) одно из чисел  $N$  четное, а другое — нечетное (случай обоих четных значений  $n_1$  и  $n_2$  сводится к одному из перечисленных). В первом случае уравнения адвекции (14) имеют симметрию  $\hat{S}$  (см. уравнение (15)), наличие которой позволило нам разработать в разд. 3 методику нахождения центральной инвариантной кривой, используя итерации отображения Пуанкаре одной из индикаторных точек (рис. 3). В зависимости от величины размерности покрытия множества точек этих итераций можно различать режимы с наличием ЦИК и появлением на ее месте стохастического слоя с ХПТ (рис. 4). Выявлены амплитудный (рис. 4) и резонансный (рис. 5, 6) механизмы разрушения ЦИК и установления ХПТ. В последнем случае сценарии разрушения ЦИК различны для нечетных (рис. 5) и четных (рис. 6) резонансов. Для нечетных значений волновых чисел разрушение ЦИК и установление глобального ХПТ происходят для сравнительно малых амплитуд волн Россби (рис. 7).

В случае возмущения с четно-нечетными значениями волновых чисел, когда отсутствует одна из симметрий уравнений адвекции, в разд. 4 разработана другая методика обнаружения ХПТ, основанная на вычислении перекрытия северного и южного стохастических слоев. Расчеты по этой методике показывают, что в данном случае глобальный ХПТ наступает при значительно больших (по сравнению с нечетными волновыми числами) значениях амплитуд волн Россби (рис. 4).

В заключение кратко обсудим возможность проверки полученных в этой работе результатов в лабораторных экспериментах по хаотической адвекции с вращающейся жидкостью [8–10], имитирующих нелинейные геострофические потоки в океане и атмосфере. Вращающийся танк имеет конусообразное дно (имитация  $\beta$ -эффекта на Земле), через отверстия которого закачивается вода. В результате создавался устойчивый восточный струйный поток с волнами Россби, измеренное поле скорости которого хорошо описывается модельной функцией тока (9). Краситель, вводимый на одной стороне струи, быстро перемешивался вдоль струи (зональный хаотический транспорт), но не пересекал струю, т. е. в экспериментах наблюдался центральный транспортный барьер. Из измеренного энергетического спектра следовало, что, как правило, в эксперименте со-

здавалась устойчивая струя с одной доминирующей модой с волновым числом, которое изменялось от 3 до 8 в зависимости от частоты вращения танка и силы накачки. Одна или две другие волновые моды имели меньшую амплитуду. При этом числа двух основных мод, для которых проводилось сравнение экспериментальных и модельных линий тока, составляли пару четно-нечетных волновых чисел: 5–4 и 5–6. Из результатов разд. 4 этой статьи следует, что для четно-нечетных значений волновых чисел и, в частности, для упомянутых выше транспортный барьер разрушается для нереально больших амплитуд волн Россби (см. рис. 4). Таким образом, эксперименты проводились при таких условиях, когда транспортный барьер невозможно было разрушить.

Однако этот барьер можно разрушить, если реализовать в экспериментах на установке, описанной в работах [8–10], пару нечетных волновых чисел, скажем 3–1 или 5–1 (см. рис. 7). Полученные в разд. 3 результаты позволяют для любой пары нечетных волновых чисел построить ЦИК и указать те параметры потока, при которых возникают резонансы, способные ее разрушить и обеспечить поперечный транспорт при умеренных значениях амплитуд волн Россби. Изменяя амплитуду одной из волн, можно наблюдать постепенное разрушение барьера и следить за тем, как филаменты красителя пересекают центр струи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-05-98520) и Программы РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики».

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. S. Lozier, L. J. Pratt, A. M. Rogerson, and P. D. Miller, *J. Phys. Oceanogr.* **27**, 2327 (1997).
2. R. T. Pierrehumbert, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **58**, 285 (1991).
3. R. M. Samelson, *J. Phys. Oceanogr.* **22**, 431 (1992).
4. S. V. Prants, M. V. Budyansky, M. Yu. Uleysky, and G. M. Zaslavsky, *Chaos* **16**, 033117 (2006).
5. M. Yu. Uleysky, M. V. Budyansky, and S. V. Prants, *Chaos* **17**, 024703 (2007).
6. К. В. Кошель, С. В. Пранц, *УФН* **176**, 1177 (2006).
7. К. В. Кошель, С. В. Пранц, *Хаотическая адвекция в океане*, ИКИ, Москва–Ижевск (2008).

8. J. Sommeria, S. D. Meyers, and H. L. Swinney, *Nature* **337**, 58 (1989).
9. R. P. Behringer, S. D. Meyers, and H. L. Swinney, *Phys. Fluids A* **3**, 1243 (1991).
10. T. H. Solomon, W. J. Holloway, and H. L. Swinney, *Phys. Fluids A* **5**, 1971 (1993).
11. D. Del-Castillo-Negrete and P. J. Morrison, *Phys. Fluids A* **5**, 948 (1993).
12. I. I. Rypina, M. G. Brown, F. J. Beron-Vera, H. Kozak, M. J. Olascoaga, and I. A. Udovydchenkov, *J. Atmosph. Sci.* **64**, 3595 (2007).
13. M. V. Budyansky, M. Yu. Uleysky, and S. V. Prants, *Phys. Rev. E* **79**, 056215 (2009).
14. J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York (1987).
15. H. L. Kuo, *J. Meteorol.* **6**, 105 (1949).
16. J. E. Howard and S. M. Hohn, *Phys. Rev. A.* **29**, 418 (1984).
17. S. Shinohara and Y. Aizawa, *Progr. Theor. Phys.* **100**, 219 (1998).
18. A. Morozov, *Chaos.* **12**, 539 (2002).
19. М. Ю. Улейский, М. В. Будянский, С. В. Пранц, <http://dynamlab.poi.dvo.ru/papers/3-1.avi>.
20. М. Ю. Улейский, М. В. Будянский, С. В. Пранц, <http://dynamlab.poi.dvo.ru/papers/5-3.avi>.
21. М. Ю. Улейский, М. В. Будянский, С. В. Пранц, <http://dynamlab.poi.dvo.ru/papers/5-4.avi>.