

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ НА СКЛОНЕ

В. П. Гончаров^{a}, В. И. Павлов^{b**}*

^a *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
109017, Москва, Россия*

^b *UFR de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Lille
59655, Villeneuve d'Ascq, France*

Поступила в редакцию 2 ноября 2009 г.

Сформулирована гамильтоновская версия контурной динамики для модели потенциального склонового течения однородной несжимаемой жидкости. В рамках этого подхода изучены частицеподобные решения, играющие роль структурных элементов в процессах дезинтеграции сильно возмущенных склоновых потоков. Исследование механизма неустойчивости решений показало, что в зависимости от крутизны склона реализуются два сценария коллапса. На вертикальном склоне формирование особенности для формы поверхности развивается по закону $(t - t_0)^{-1/3}$, а на неvertикальном — чуть медленней, по закону $(t - t_0)^{-2/7}$, где t_0 — время коллапса. Установлен достаточный критерий коллапса, позволяющий судить об этом эффекте по первым трем интегралам движения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение гравитационных течений с учетом влияния топографии (формы или наклона дна) и других факторов вызывает не только теоретический, но и практический интерес. Склоновые явления в атмосфере и океане, среди которых — оползни, сели, снежные лавины, боры представляют собой один из примеров природных процессов подобного рода.

Поскольку по характеру движения эти явления близки к течению несжимаемой жидкости в тонком слое, для их описания используются различные варианты теории мелкой воды (или теории длинных волн) [1–3]. Минимальная модель для описания склоновых явлений предполагает, что гравитационный поток, рассматриваемый как тонкий однородный слой несжимаемой жидкости, стекает по склону постоянной крутизны, а неконсервативными эффектами, связанными с трением и вязкостью можно пренебречь.

Отметим, что традиционная модель неустойчивости Рэлея–Тейлора в известном смысле соответствует предельному случаю склонового течения. Действительно, вертикальное перемешивание, при кото-

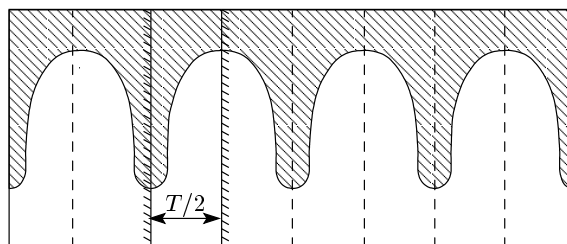


Рис. 1. Схема неустойчивости Рэлея–Тейлора

ром происходит образование чередующихся всплывающих пузырей легкой жидкости и опускающихся струй холодной, можно рассматривать как периодически продолженное (с периодом T) гравитационное течение между двумя вертикальными стенками (см. рис. 1).

2. ГАМИЛЬТОНОВСКАЯ ВЕРСИЯ МОДЕЛИ СКЛОНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Как известно [4], трехмерную динамику несжимаемой жидкости с поверхностью раздела, которая разделяет однородные по плотности области потенциальных движений, можно свести к динамике этой

*E-mail: v.goncharov@mtu-net.ru

**E-mail: vadim.pavlov@univ-lille1.fr

поверхности и сформулировать уравнения движения в гамильтоновой форме.

Соответствующие скобки Пуассона можно получить из первых принципов, если исходить из скобок Пуассона более общей модели — несжимаемой неоднородной жидкости, сформулированной в терминах поля плотности ϱ и поля завихренности $\gamma = \text{rot } \boldsymbol{\pi}$ для плотности вихревого импульса $\boldsymbol{\pi} = \varrho \mathbf{v}$. В переменных ϱ, γ исходные скобки выглядят следующим образом [5, 6]:

$$\{\varrho, \varrho'\} = 0, \quad (1)$$

$$\{\varrho, \gamma'_k\} = e_{knm} \partial_m \varrho \partial_n \delta, \quad (2)$$

$$\{\gamma_i, \gamma'_k\} = e_{ipj} e_{jln} e_{ktn} \partial_p \gamma_l \partial_m \delta. \quad (3)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, а полевые переменные со штрихом обозначают зависимость от пространственных координат со штрихом. Кроме того, обозначение $\delta = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ подразумевает дельта-функцию Дирака, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ — оператор дифференцирования, e_{ikj} — единичный антисимметричный тензор (символ Леви-Чивита), а γ_i — компоненты вектора $\boldsymbol{\gamma}$, связанные соотношением

$$\gamma_i = e_{ikn} \partial_k \varrho v_n \quad (4)$$

с компонентами v_n гидродинамической скорости.

2.1. 3D-версии гамильтоновской контурной динамики для потенциальных течений несжимаемой жидкости

Рассмотрим две области G^+, G^- потенциальных движений $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, которые разделены поверхностью, по обе стороны которой плотность ϱ принимает различные, но постоянные значения. Используя знаки «+» и «-» для обозначения переменных соответственно в областях G^+ и G^- , запишем плотность и компоненты гидродинамического импульса в виде разложений:

$$\varrho = \varrho^+ \theta^+ + \varrho^- \theta^-, \quad (5)$$

$$\varrho v_i = \varrho^+ \theta^+ \partial_i \varphi^+ + \varrho^- \theta^- \partial_i \varphi^-. \quad (6)$$

Здесь θ^+ и θ^- — взаимно дополнительные субстанциональные характеристические функции:

$$\theta^\pm = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{x} \in G^\pm, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \notin G^\pm, \end{cases}$$

которые обладают следующими свойствами:

$$\theta^+ + \theta^- = 1, \quad \theta^+ \theta^- = 0, \quad \partial_i \theta^\pm + v_i \partial_i \theta^\pm = 0.$$

Гамильтоновская версия контурной динамики, получающаяся в результате редукции (1)–(3), зависит от способа параметризации поверхности раздела, которая в самом общем виде может быть задана соотношениями

$$x_i = \hat{x}_i(\mathbf{s}, t), \quad (7)$$

где $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ — так называемые поверхностные координаты.

В каждой точке \mathbf{s} можно ввести касательные векторы: $\mathbf{t} = \partial \hat{\mathbf{x}}/\partial s_1$, $\mathbf{b} = \partial \hat{\mathbf{x}}/\partial s_2$, которые определяют метрику поверхности, заданную тензором $a_{\alpha\beta}$ с компонентами

$$a_{11} = \mathbf{t}^2, \quad a_{22} = \mathbf{b}^2, \quad a_{12} = a_{21} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b},$$

определителем $a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$, и единичную внешнюю нормаль \mathbf{n} к этой поверхности,

$$n_i = -\frac{e^{ikl}}{\sqrt{a}} t_k b_l = -\frac{e^{ikl}}{\sqrt{a}} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial s_1} \frac{\partial \hat{x}_l}{\partial s_2}.$$

Параметризация (7) позволяет использовать для обычной и вариационной производных θ^+ -функции явные выражения

$$\partial_i \theta^+ = \int n_i \sqrt{a} \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) ds, \quad \frac{\delta \theta^+}{\delta \hat{x}_i} = -n_i \sqrt{a} \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

и формализовать последующие шаги на пути редукции к контурной динамике.

Подстановка $\boldsymbol{\pi}$ -представления (6) в соотношение (4) приводит к выражению

$$\gamma_i = \int \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) e^{\alpha\beta} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial s_\alpha} \frac{\partial \xi}{\partial s_\beta} ds, \quad (8)$$

где ξ — скачок величины $\varrho \varphi$ на границе раздела:

$$\xi = (\varrho^+ \varphi^+ - \varrho^- \varphi^-)_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}. \quad (9)$$

Скобки Пуассона для переменных ξ и $\hat{\mathbf{x}}$, определяющих динамику поверхности раздела, находятся после подстановки (5) и (8) в (1)–(3) и имеют следующий вид:

$$\{\hat{x}_i, \hat{x}'_k\} = 0, \quad (10)$$

$$\{\xi, \xi'\} = \frac{\partial \xi}{\partial s_\alpha} B_\alpha(\mathbf{s}, \mathbf{s}') - \frac{\partial \xi'}{\partial s'_\alpha} B_\alpha(\mathbf{s}', \mathbf{s}), \quad (11)$$

$$\{\hat{x}_i, \xi'\} = -\frac{n_i}{\sqrt{a}} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}') + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial s_\alpha} B_\alpha(\mathbf{s}, \mathbf{s}'). \quad (12)$$

Структурные функции B_α фиксируются конкретным выбором параметризации поверхности раздела.

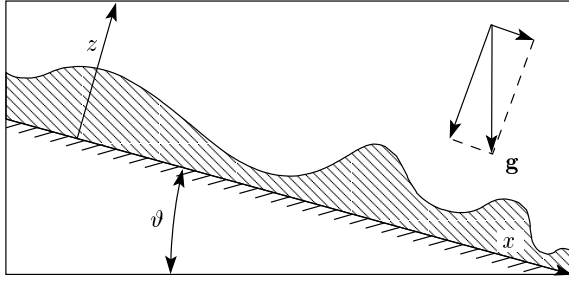


Рис. 2. Модель «мелкой воды» на склоне

В случае декартовой параметризации, когда в качестве s_α выбираются декартовы координаты $s_1 = x_1, s_2 = x_2$, а сама поверхность описывается уравнением $x_3 = \eta(x_1, x_2, t)$, где η — форма поверхности, из выражений (10)–(12) следуют скобки Захарова [4].

Действительно, для такой параметризации

$$\mathbf{n} = a^{-1/2}(\partial_1\eta, \partial_2\eta, -1), \quad a = 1 + (\partial_1\eta)^2 + (\partial_2\eta)^2,$$

и непосредственно из формулы (12) можно найти, что

$$B_\alpha(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = a^{-1} \frac{\partial \eta}{\partial s_\alpha} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}').$$

Полученный результат позволяет установить, что скобки Пуассона для декартовой параметризации имеют каноническую структуру:

$$\{\eta, \eta'\} = \{\xi, \xi'\} = 0, \quad \{\eta, \xi'\} = \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}').$$

Неканонические скобки Пуассона, которые следуют из формул (10)–(12) при использовании так называемых конформных поверхностных координат, рассматривались в работах [6, 7].

2.2. Модель «мелкой воды» на склоне

Поскольку наличие свободной границы равносильно условию $\varrho^+ = 0$, будем далее предполагать, что слой жидкости единичной плотности $\varrho^- = 1$ находится в поле сил тяжести с ускорением g на склоне постоянной крутизны с углом наклона ϑ к горизонту. Эту модель удобно рассматривать в декартовой системе координат, ось x которой направлена вниз вдоль склона, а ось z соответственно составляет угол ϑ с силой тяжести (см. рис. 2).

Гамильтониан H модели совпадает с полной энергией жидкости и в терминах гидродинамического потенциала φ^- выражается через интеграл:

$$H = \int \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \right) \theta^- d\mathbf{r} dz = \frac{1}{2} \int \left((\nabla \varphi^-)^2 + (\partial_z \varphi^-)^2 + 2g(z \cos \vartheta - x \sin \vartheta) \right) \theta^- d\mathbf{r} dz. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — декартовы координаты, причем координатные линии z перпендикулярны склону, а ∇ — градиент по координатам $\mathbf{r} = (x, y)$, которые выбраны так, что

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = g(z \cos \vartheta - x \sin \vartheta).$$

Субстанциональная функция θ^- , идентифицирующая область течения в данной модели, может быть задана как

$$\theta^- = \theta(z) - \theta(z - \eta),$$

где $\theta(z)$ — обычная функция Хевисайда, обладающая свойством: $\theta = 1$, если $z \geq 0$, и $\theta = 0$, если $z < 0$.

После интегрирования по частям из выражения (13) с учетом граничного условия (9) получим

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\xi (\nabla \eta \cdot \nabla \varphi^- - \partial_z \varphi^-)_{z=\eta} + g(\eta^2 \cos \vartheta - 2x\eta \sin \vartheta) \right) d\mathbf{r}.$$

На основании условий несжимаемости, непроницаемости склона и соотношения (9), которое следует трактовать как еще одно краевое условие, для потенциала φ^- можно сформулировать краевую задачу:

$$(\Delta + \partial_z^2)\varphi^- = 0, \quad (14)$$

$$\partial_z \varphi^-|_{z=0} = 0, \quad (15)$$

$$\varphi^-|_{z=\eta} = -\xi, \quad (16)$$

где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ — двумерный лапласиан в плоскости склона.

Общее решение задачи (14) с учетом условия (15) ищем в виде фурье-разложения:

$$\varphi^- = \int \text{ch}(z|\mathbf{k}|) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} A_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \quad (17)$$

При разложении функции $\text{ch}(z|\mathbf{k}|)$ в формальный ряд теории возмущений:

$$\text{ch}(z|\mathbf{k}|) = 1 + \frac{z^2 \mathbf{k}^2}{2!} + \frac{z^4 \mathbf{k}^4}{4!} + \dots,$$

видно, что решение (17) можно записать как

$$\varphi^- = \left(1 - \frac{z^2}{2!} \Delta + \frac{z^4}{4!} \Delta^2 + \dots \right) A = \cos(z\Delta^{1/2})A.$$

Подставляя это решение в краевое условие (16) на свободной границе, получаем уравнение

$$\cos(\eta\Delta^{1/2})A = -\xi \quad (18)$$

для функции A , в терминах которой точный гамильтониан модели удобно представить в виде

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\eta (\nabla \xi)^2 + \Delta \xi \left(\sin(\eta\Delta^{1/2}) \Delta^{-1/2} A + \eta \xi \right) + g(\eta^2 \cos \vartheta - 2x\eta \sin \vartheta) \right) d\mathbf{r}. \quad (19)$$

Ограничиваясь приближением нелинейной дисперсии [8], при решении уравнения (18) учтем только члены не старше второго порядка по производным ∂_x, ∂_y . В этом случае, разлагая псевдодифференциальный оператор $\cos(\eta\Delta^{1/2})$ в ряд теории возмущений, из уравнения (18) легко найти приближенное решение

$$A = - \left(1 + \frac{\eta^2}{2} \Delta \right) \xi,$$

а затем и приближенный гамильтониан модели

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\eta (\nabla \xi)^2 - \frac{\eta^3}{3} (\Delta \xi)^2 + g(\eta^2 \cos \vartheta - 2x\eta \sin \vartheta) \right) d\mathbf{r}.$$

Неоднородность, обусловленную присутствием в гамильтониане члена, явно зависящего от координаты x , можно исключить следующим образом. Во-первых, перейдем в систему координат $\mathbf{r}' = (x', y')$, движущуюся вдоль склона с ускорением $g \sin \vartheta$, что равносильно преобразованию

$$x' = x - \frac{gt^2}{2} \sin \vartheta, \quad y' = y. \quad (20)$$

Во-вторых, сделаем замену

$$p(\mathbf{r}') = \xi(\mathbf{r}') - tx'g \sin \vartheta - \frac{1}{3}t^3g^2 \sin^2 \vartheta, \quad (21)$$

$$q(\mathbf{r}') = \eta(\mathbf{r}').$$

Преобразования (20), (21) суть не что иное, как нестационарное каноническое преобразование к новым переменным q и p . Поскольку производящий функционал этого преобразования

$$F_0 = - \int \eta(\mathbf{r}) \left(p(\mathbf{r}') + tx'g \sin \vartheta + \frac{1}{3}t^3g^2 \sin^2 \vartheta \right) \times \\ \times \delta \left(x' - x + \frac{gt^2}{2} \sin \vartheta \right) \delta (y' - y) d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

зависит явно от времени, новый гамильтониан находится в соответствии с общим правилом [7]:

$$\mathcal{H} = H + \partial_t F_0 = \frac{1}{2} \int \left(q (\nabla p)^2 - \frac{q^3}{3} (\Delta p)^2 + q^2 g \cos \vartheta \right) d\mathbf{r}.$$

Учитывая, что при $\vartheta \neq \pi/2$ в задаче присутствует единственный размерный параметр $g \cos \vartheta$, введем масштабы для времени T и пространства L , так что $LT^{-2} = g \cos \vartheta$, и осуществим переход к безразмерным зависимым и независимым переменным.

После приведения к безразмерному виду гамильтониан и соответствующие уравнения контурной динамики в терминах q и p принимают вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \left(q (\nabla p)^2 - \frac{q^3}{3} (\Delta p)^2 + q^2 \right) d\mathbf{r}, \quad (22)$$

$$\partial_t q = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p} = -\nabla \left(q \nabla p + \nabla \left(\frac{q^3}{3} \Delta p \right) \right), \quad (23)$$

$$\partial_t p = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} = -\frac{1}{2} (\nabla p)^2 + \frac{q^2}{2} (\Delta p)^2 - q. \quad (24)$$

Уравнения (23), (24) описывают эволюцию свободной границы потенциального гравитационного течения на склоне в приближении нелинейной дисперсии и, кроме гамильтониана \mathcal{H} , сохраняют еще два интеграла:

$$\mathbf{P} = \int q \nabla p d\mathbf{r}, \quad Q = \int q d\mathbf{r}. \quad (25)$$

Если сохранение интеграла \mathbf{P} , имеющего смысл полного импульса, связано с трансляционной инвариантностью \mathcal{H} , то интеграл Q , который выражает полный объем жидкости, сохраняется в силу инвариантности \mathcal{H} относительно калибровочного преобразования $p \rightarrow p + \text{const}$.

3. ПЛОСКИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

В плоском случае, когда решения зависят от времени t и только одной пространственной координаты x , вместо динамической переменной p удобно ввести новую — $\lambda = p_x$. Величина λ представляет собой скачок тангенциальной скорости на поверхности слоя и характеризует распределение вихревой пелены.

После такой замены получаем неканоническую гамильтонову систему со скобками Пуассона

$$\{q, q'\} = \{\lambda, \lambda'\} = 0, \quad \{q, \lambda'\} = \partial_x \delta(x - x') \quad (26)$$

и гамильтонианом \mathcal{H} , который согласно (22) удобно представить в виде линейной комбинации

$$\mathcal{H} = I_1 + I_2 - I_3 \quad (27)$$

трех положительных интегралов

$$I_1 = \frac{1}{2} \int q \lambda^2 dx, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int q^2 dx, \quad I_3 = \frac{1}{6} \int q^3 \lambda_x^2 dx.$$

В терминах q и λ уравнения контурной динамики (23), (24) принимают вид

$$\partial_t q = -\partial_x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \lambda} = -\partial_x \left(q \lambda + \frac{1}{3} \partial_x (q^3 \lambda_x) \right), \quad (28)$$

$$\partial_t \lambda = -\partial_x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} = -\partial_x \left(\frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{q^2}{2} \lambda_x^2 + q \right), \quad (29)$$

и кроме \mathcal{H} сохраняют еще три интеграла движения:

$$P = \int q \lambda dx, \quad Q = \int q dx, \quad \Lambda = \int \lambda dx.$$

Отметим, что интегралы Q и Λ сохраняются как аннуляторы скобок (26).

Рассмотрим решения в виде так называемых плоских стационарных возмущений

$$q = q(s), \quad \lambda = \lambda(s), \quad s = x - ct,$$

распространяющихся с постоянной скоростью c без деформации профиля вдоль оси x .

После подстановки стационарных решений в уравнения (28), (29) и интегрирования эти уравнения принимают вид

$$F(q, \lambda) = 4q\lambda^2 - 8cq\lambda + 5q^2 + 8c_2q + 6c_1\lambda + c_3 = 0, \quad (30)$$

$$G(q, \lambda) = \lambda^2 - 2c\lambda + 2q + 2c_2 = q^2\lambda_s^2, \quad (31)$$

где c_1, c_2, c_3 — константы интегрирования.

Константы интегрирования определяются типом решения. Анализ уравнений (30), (31) показывает, что они могут иметь как периодические, так и локализованные решения (солитоны и компактоны). Кроме того, так как эти уравнения инвариантны относительно одновременной смены знака $\lambda \rightarrow -\lambda$ и $c \rightarrow -c$, такая симметрия позволяет далее ограничиться анализом решений, для которых $c > 0$.

3.1. Солитоны

Решения классического солитонного типа можно определить как решения, которые, экспоненциально убывая при $s \rightarrow \pm\infty$, переходят в режим

$$q|_{s=\pm\infty} = d, \quad \lambda|_{s=\infty} = 0,$$

где положительная константа d — безразмерная толщина невозмущенного слоя.

В этом случае из формул (30), (31) можно найти, что данный тип решений реализуется при выборе констант в виде

$$c_1 = cd, \quad c_2 = -d, \quad c_3 = 3d^2,$$

и условию

$$c^2 > d, \quad (32)$$

которое гарантирует экспоненциальное убывание возмущений при $s \rightarrow \pm\infty$.

Полагая $d = 1$, что соответствует выбору толщины невозмущенного слоя в качестве масштаба длины L , из (30), (31) можно найти соотношения, которые связывают амплитудные характеристики: в точках $s = \pm s_m$, где q достигает максимума,

$$F(a, \kappa) = 0, \quad \frac{\partial F(a, \kappa)}{\partial \kappa} = 0; \quad (33)$$

в точке $s = 0$, где q достигает минимума

$$F(b, \tau) = 0, \quad G(b, \tau) = 0. \quad (34)$$

Здесь $a = q(\pm s_m)$, $b = q(0)$ и $\kappa = \lambda(\pm s_m)$, $\tau = \lambda(0)$ — значения переменных q и λ в соответствующих точках.

Исключая κ и τ , из уравнений (33), (34) можно найти соотношения

$$c^2 = \frac{4a(a-1)(5a-3)}{(4a-3)^2}, \quad (1+b)^2 = 4c^2, \quad (35)$$

связывающие скорость c и амплитудные характеристики a и b .

В силу неравенства $c^2 > 1$, которое следует из условия (32), амплитуда солитонов a должна превышать пороговое значение $a_{cr} = 1.243$.

Типичный профиль солитонного решения показан на рис. 3. В центральной части форма солитонных возмущений q имеет прогиб (локальный минимум), по обе стороны от которого расположены два локальных максимума. Исключением является решение, соответствующее $c = (17 + \sqrt{33})/16 \approx 1.42$, когда неравенство $a \geq b$ превращается в равенство $a = b = (9 + \sqrt{33})/8 \approx 1.84$. Это решение имеет только один максимум.

3.2. Компактоны

Решения с компактным носителем — идеальные кандидаты на роль структурных элементов, которые

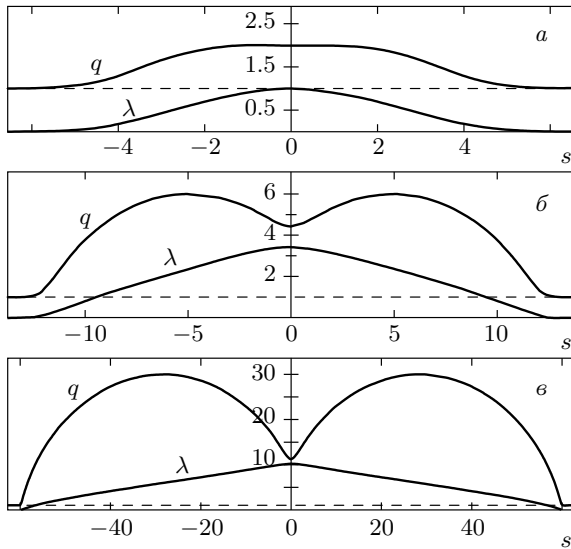


Рис. 3. Профили функций q и λ для солитонов: $a - a = 2, b = 0.99, c = 1.497$; $b - a = 6, b = 3.42, c = 2.71$; $c - a = 30, b = 10.23, c = 6.11$. Невозмущенная толщина слоя отмечена штриховой линией

можно использовать для описания процесса дезинтеграции течений [7, 9–11]. Поэтому они представляют интерес с точки зрения изучения финальной стадии развития неустойчивости.

Чтобы построить класс таких решений, прежде всего заметим, что исходные уравнения движения (28), (29) инвариантны относительно преобразования

$$x \rightarrow x - ct, \quad \lambda \rightarrow \lambda - c. \quad (36)$$

Следовательно, достаточно рассмотреть неподвижные решения, для которых $c = 0$ и соответственно

$$P = \int q\lambda dx = 0.$$

Как показывает анализ, такие решения реализуются на компактном носителе, вне которого $q = \lambda = 0$, при следующем выборе констант интегрирования:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -l^2/2, \quad c_3 = 0,$$

где l — амплитудный параметр.

Это обстоятельство позволяет привести систему уравнений (30), (31) к виду

$$4\lambda^2 + 5q - 4l^2 = 0, \quad (37)$$

$$\lambda^2 + 2q - q^2\lambda_x^2 - l^2 = 0. \quad (38)$$

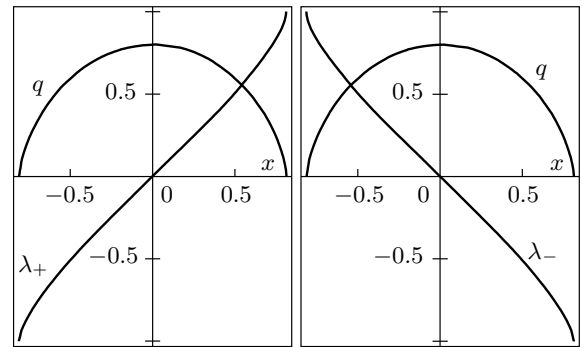


Рис. 4. Форма q неподвижного компактона и два возможных распределения интенсивности вихревой пелены λ_{\pm} при $l = \pm 1$

Для решения уравнений (37), (38) воспользуемся параметризацией

$$\lambda = l \sin \varphi, \quad q = \frac{4}{5}l^2 \cos^2 \varphi, \quad (39)$$

где $\varphi(x)$ — некоторая функция, изменяющейся в интервале $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Параметризация (39) тождественно удовлетворяет уравнению (37), а ее подстановка в (38) приводит к уравнению

$$l^4 \varphi_x^2 \cos^4 \varphi = \frac{15}{16},$$

из которого следует, что

$$x = \frac{2l^2}{\sqrt{15}} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right).$$

На рис. 4 приведены графики, которые показывают, что при $l = \pm 1$ в зависимости от знака одной и той же формы поверхности неподвижного компактона соответствуют два различных распределения вихревой пелены: либо λ_+ , если $l > 0$, либо зеркально-симметричное λ_- , если $l < 0$.

Чтобы построить решения для компактонов, распространяющихся с постоянной скоростью c , необходимо воспользоваться преобразованием (36). По существу, оно означает, что необходимо лишь добавить постоянную c к распределению вихревой пелены неподвижного компактона и заменить аргумент x на $s = x - ct$. Поскольку форма q компактона является четной функцией, а λ за вычетом постоянной c — нечетной, между интегралами движения P и Q компактонов справедливо соотношение

$$P = cQ.$$

Отметим, что в отличие от солитонов любая суперпозиция неперекрывающихся компактонов с различ-

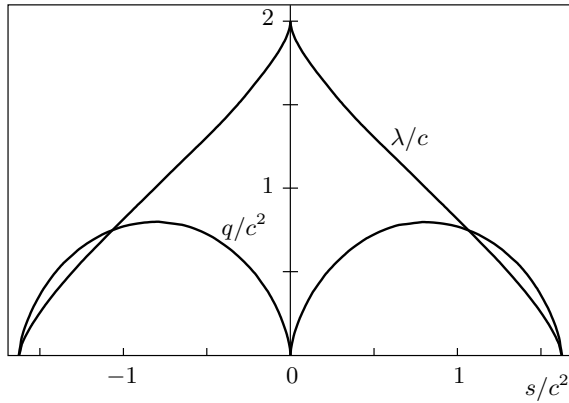


Рис. 5. Графики функций q/c^2 и λ/c для движущегося компактона

ными параметрами l и c также является решением. В частности, на рис. 5 приведено решение, которое составлено из двух компактонов, движущихся с одинаковой скоростью c , но для левого компактона $l = c$, а для правого $l = -c$.

Это решение интересно тем, что оно является предельной формой солитонного решения при $a \rightarrow \infty$. Действительно, в этом пределе в центральной части солитона прогиб контура достигает предельно возможного значения — касается дна. В точке касания и на краях солитонного решения нарушается аналитичность и формы контура, и распределения интенсивности вихревой пелены — образуются особенности.

Будет или нет нарушаться приближение «мелкой воды» в окрестностях этих точек зависит от интегрируемости особенностей. В частности, об этом можно судить по сходимости или расходимости соответствующих поправок к гамильтониану модели.

Исходя из более полного разложения

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \left(q\lambda^2 + q^2 - \frac{1}{3} q^3 \lambda_x \left(1 + \frac{1}{2} \partial_x^2 q^2 - \frac{1}{10} q^2 \partial_x^2 + \dots \right) \lambda_x \right) dx,$$

полученного из формулы (19), можно убедиться, что, по крайней мере, в следующем порядке теории возмущений поправка к гамильтониану, вычисленная на компактонных решениях, интегрируема и конечна. Это означает, что ее учет приведет лишь к локальной перестройке в окрестностях особенностей, не затрагивая принципиальный характер компактонных решений.

3.3. Неустойчивость компактонов

Изучим устойчивость компактонных решений. В силу симметрии преобразования (36) достаточно рассмотреть неподвижные компактоны, для которых $P = 0$.

Как и любые другие стационарные решения, неподвижные компактоны можно рассматривать как точки равновесия в бесконечномерном фазовом пространстве полей q, λ . При этих решениях уравнения движения (28) и (29) записываются в виде

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \lambda} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} - \frac{l^2}{2} = 0,$$

что может быть истолковано как следствие вариационной задачи

$$\delta \left(\mathcal{H} - \frac{l^2}{2} Q \right) = 0, \tag{40}$$

в которой $l^2/2$ играет роль множителя Лагранжа.

Таким образом, вариационное равенство (40) указывает, что в этой точке реализуется экстремум функционала \mathcal{H} при фиксированном Q . В соответствии с теоремой Ляпунова данная стационарная точка устойчива, если она реализует минимум или максимум гамильтониана. Если же стационарная точка представляет собой седло, то данное состояние, возможно, неустойчиво.

Чтобы выяснить тип стационарной точки, рассмотрим двухмасштабное преобразование

$$q \rightarrow \beta^{-1} q \left(\frac{x}{\beta} \right), \quad \lambda \rightarrow \alpha \lambda \left(\frac{x}{\beta} \right), \tag{41}$$

где β и α — параметры этого преобразования, полагая при этом, что λ — нечетная функция.

Отметим, что в этом случае функция q четная и, очевидно, преобразование (41) не только оставляет инвариантным интеграл движения Q , но и всегда обеспечивает выполнение равенств $P = 0, \Lambda = 0$.

Применяя преобразование (41) к гамильтониану (27), получим

$$\mathcal{H}(\alpha, \beta) = \alpha^2 I_1 + \beta^{-1} I_2 - \alpha^2 \beta^{-4} I_3, \tag{42}$$

где интегралы I_1, I_2, I_3 связаны соотношениями

$$I_1 + 2I_2 - 3I_3 = \frac{l^2}{2} Q, \quad I_1 = I_3, \quad I_2 = 4I_3. \tag{43}$$

Первое из соотношений следует из уравнения (38), а второе и третье — из условий равновесия

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=1, \beta=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} \right|_{\alpha=1, \beta=1} = 0.$$

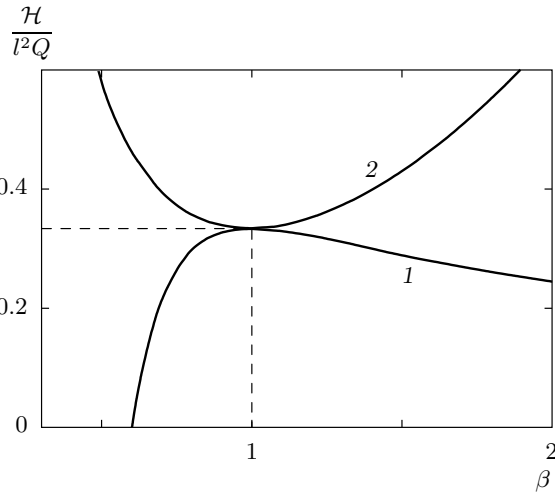


Рис. 6. Зависимости гамильтониана компактона от параметра масштабного преобразования для двух плоскостей сечения $\alpha = 1$ (1), $1.5\beta - 0.5$ (2), проходящих через стационарную точку

Решив систему (43) относительно I_1, I_2, I_3 , найдем, что

$$I_1 = I_3 = \frac{l^2}{12}Q, \quad I_2 = \frac{l^2}{3}Q,$$

и для гамильтониана $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$ получим выражение

$$\mathcal{H}(\alpha, \beta) = \frac{l^2}{12}Q (4\beta^{-1} + \alpha^2 (1 - \beta^{-4})).$$

На рис. 6 приведено поведение функции $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$ в двух плоскостях сечения, проходящих через стационарную точку $\beta = 1, \alpha = 1$. Кривая 1, на которой в точке равновесия реализуется максимум, получена в плоскости сечения $\alpha = 1$. Кривая 2, на которой в этой же точке реализуется минимум, получена в плоскости сечения $\alpha = 1.5\beta - 0.5$. Таким образом, можно сделать вывод, что компактонным решениям соответствует седловая точка функционала \mathcal{H} , что указывает на неустойчивость этих решений.

4. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для любой динамической системы наличие автомодельных решений отражает существование фундаментальных внутренних симметрий и позволяет судить о тенденциях в развитии тех или иных процессов на финальной стадии. Особое значение этот тип решений имеет для изучения явления коллапса — образования особенности за конечное время [12, 13].

4.1. Решения для вертикального склона

Чтобы получить представление об автомодельных режимах, присущих склоновым течениям, прежде всего обратимся к наиболее простому случаю — модели вертикального склона.

В этом случае составляющая силы тяжести, прижимающая слой к склону, отсутствует, поэтому в выражении (27) для гамильтониана \mathcal{H} остаются только интегралы I_1, I_3 , а интеграл I_2 исключается:

$$\mathcal{H} = I_1 - I_3 = \frac{1}{2} \int \left(q\lambda^2 - \frac{1}{3}q^3\lambda_x^2 \right) dx. \quad (44)$$

Соответствующие уравнения движения принимают вид

$$\partial_t q = -\partial_x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \lambda} = -\partial_x \left(q\lambda + \frac{1}{3}\partial_x (q^3\lambda_x) \right), \quad (45)$$

$$\partial_t \lambda = -\partial_x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} = -\partial_x \left(\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{q^2}{2}\lambda_x^2 \right). \quad (46)$$

Отметим, что в вертикальном приближении склоновая модель весьма похожа на свой осесимметричный аналог [11]. Отличие лишь в том, что член нелинейной дисперсии в гамильтониане (44) по переменной q имеет показатель степени на единицу больше.

По аналогии с работой [11] будем интересоваться автомодельными решениями, которые не нарушают законы сохранения, и, следовательно, предполагают, что

$$q = \beta^{-1}(t)\hat{q}(z), \quad \lambda = \alpha(t)\hat{\lambda}(z), \quad (47)$$

где $z = x/\beta(t)$ — автомодельная переменная, $\beta(t)$ и $\alpha(t)$ — некоторые функции времени.

В качестве структурных функций $\hat{q}(z)$ и $\hat{\lambda}(z)$ рассмотрим анзац

$$\hat{q} = \sqrt{R^2 - z^2}, \quad \hat{\lambda} = 2z, \quad (48)$$

который описывает возмущение, сосредоточенное на компактном носителе $|z| \leq R$ (положительная константа R характеризует полуразмер).

Прямая подстановка в уравнения (45), (46) показывает, что анзац (48) оказывается точным решением, если переменные β и α удовлетворяют канонически сопряженным уравнениям

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} = 2\frac{\alpha}{\beta^4}(\beta^4 - 1), \quad \dot{\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} = -4\frac{\alpha^2}{\beta^5}, \quad (49)$$

описывающим систему с одной степенью свободы и гамильтонианом

$$H = \alpha^2 (1 - \beta^{-4}).$$

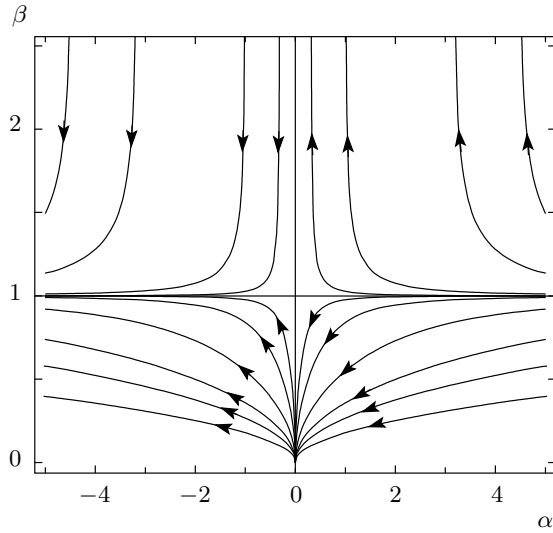


Рис. 7. Фазовый портрет системы уравнений (49)

Следует подчеркнуть, что на решениях (47), (48) исходные инварианты движения P и Λ обращаются в нуль, а Q и \mathcal{H} являются конечными величинами и связаны с константами R и H соотношениями

$$Q = \frac{\pi}{2}R^2, \quad \mathcal{H} = \frac{\pi}{4}R^4H.$$

Фазовый портрет для системы уравнений (49) приведен на рис. 7. На этом рисунке видно, что прямая $\beta = 1$ делит фазовое пространство на две области — область $0 < \beta < 1$, где $H < 0$, и область $\beta > 1$, где $H > 0$. Интегральные кривые в правой и левой полуплоскостях различаются лишь противоположной ориентацией стрелок, указывающих направление эволюции системы по времени. Это свойство является следствием симметрии относительно преобразования $t \rightarrow -t, \alpha \rightarrow -\alpha$ и говорит об обратимости движений в консервативных системах. Поэтому далее без ограничения общности полагаем, что $\alpha > 0$.

Решение 1. В случае $\beta = 1$, который соответствует режиму $H = 0$, из уравнений (49) для переменной α следует соотношение

$$\alpha = \frac{1}{4}(t - t_0)^{-1}.$$

Соответствующие этому случаю решения

$$q = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad \lambda = \frac{x}{2(t - t_0)} \quad (50)$$

локализованы на отрезке $-R \leq x \leq R$ и описывают полукруг радиуса R , на поверхности которого со вре-

менем по закону $(t - t_0)^{-1}$ происходит интенсификация вихревой пелены, распределенной по линейному закону.

Решение 2. В области $\beta > 1$, где $H > 0$, решение уравнений (49) можно представить в виде

$$H^{1/2}(t - t_0) = -\frac{1}{8}B\left(\beta^{-4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \\ \alpha = H^{1/2}(1 - \beta^{-4})^{-1/2},$$

где $B(z, n, m)$ — неполная бета-функция.

При $t \rightarrow \infty$ из этих соотношений следует, что

$$\beta \sim 2H^{1/2}t, \quad \alpha \sim H^{1/2}. \quad (51)$$

Поскольку в этом случае продольный размер $L = 2R\beta \rightarrow \infty$, решение описывает растекание жидкого слоя, имеющего форму полуэллипса, который со временем вытягивается вдоль оси x , сохраняя первоначальную площадь. Максимальные значения интенсивности вихревой пелены, которые достигаются на концах, при этом стремятся к постоянному значению.

Решение 3. В области $0 < \beta < 1$, где $H < 0$, решения уравнений (49) можно представить в виде

$$|H|^{1/2}(t - t_0) = \frac{1}{8}B\left(\beta^4, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \\ \alpha = |H|^{1/2}(\beta^{-4} - 1)^{-1/2}.$$

При $t \rightarrow t_0$ это решение описывает режим коллапса, в котором $\alpha, \beta \rightarrow 0$ по законам

$$\beta \sim (t - t_0)^{1/3}, \quad \alpha \sim (t - t_0)^{2/3}. \quad (52)$$

Поскольку в этом режиме продольный размер $L = 2R\beta \rightarrow 0$, решение описывает полуэллипс, который со временем сжимается вдоль оси x , но увеличивается в поперечном направлении, сохраняя первоначальную площадь. При этом величина α/β , характеризующая наклон в линейном законе распределения интенсивности вихревой пелены, стремится к нулю.

4.2. Решения для невертикального склона

В общем случае, когда склон не вертикальный, в гамильтониан модели (44) добавляется интеграл I_2 . Поэтому сохранение гамильтониана на автомодельных решениях должно обеспечиваться за счет баланса уже трех интегралов I_1, I_2, I_3 .

Прежде всего рассмотрим, как это обстоятельство отразится на решении (50), описывающем режим интенсификации вихревой пелены в модели

вертикального склона. Учитывая, что на этом автомодельном решении $\beta = 1$, $\alpha \sim (t - t_0)^{-1}$ и, следовательно, при $t \rightarrow t_0$ вклад интеграла $I_2 \sim \beta^{-1}$ мал по сравнению с интегралами $I_1 \sim \alpha^2$ и $I_3 \sim \alpha^2 \beta^{-4}$, можно сделать вывод, что это решение асимптотически выживает и для невертикального склона.

Остальные два решения (51) и (52), описывающие соответственно режим растекания и режим коллапса, нуждаются в пересмотре.

Режим растекания. Поскольку в этом режиме основной вклад обеспечивается интегралами I_1, I_2 , в качестве гамильтониана \mathcal{H} рассмотрим величину

$$\mathcal{H} = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \int (q\lambda^2 + q^2) dx.$$

Соответствующие уравнения движения принимают вид

$$\partial_t q = -\partial_x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \lambda} = -\partial_x (q\lambda), \quad (53)$$

$$\partial_t \lambda = -\partial_x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} = -\partial_x \left(\frac{1}{2} \lambda^2 + q \right). \quad (54)$$

Автомодельная подстановка (47) в уравнения (53), (54), с одной стороны, позволяет найти точные решения для структурных функций $\hat{q}, \hat{\lambda}$:

$$\hat{q} = R^2 - z^2, \quad \hat{\lambda} = 2z, \quad (55)$$

а с другой — приводит к канонически сопряженным уравнениям

$$\dot{\beta} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 2\alpha, \quad \dot{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial \beta} = \beta^{-2}. \quad (56)$$

Здесь β и α — зависящие от времени масштабные функции, а гамильтониан H определяется выражением

$$H = \alpha^2 + \beta^{-1}.$$

При $t \rightarrow \infty$ из уравнений (56) следует в точности тот же закон растекания, что и для модели вертикального склона:

$$\beta \sim 2H^{1/2}t, \quad \alpha \sim H^{1/2}.$$

Другой общей чертой является пространственная локализация решений (55), (48) на отрезке $|z| \leq R$ и линейный характер распределения интенсивности вихревой пелены λ . Тем не менее, поскольку, несмотря на внешнее сходство, решения для q все же различаются, соотношения, которые связывают инварианты движения Q и \mathcal{H} с константами R и H , оказываются другими:

$$Q = \frac{4}{3}R^3, \quad \mathcal{H} = \frac{8}{15}R^5H.$$

Режим коллапса. Поскольку нас интересует сценарий автомодельного коллапса для формы поверхности, естественно предположить, что в этом режиме основной вклад обеспечивается старшими по q интегралами I_2, I_3 . Поэтому, пренебрегая интегралом I_1 в выражении (27), в качестве гамильтониана \mathcal{H} рассматриваем величину

$$\mathcal{H} = I_2 - I_3 = \frac{1}{2} \int \left(q^2 - \frac{1}{3} q^3 \lambda_x^2 \right) dx.$$

Соответствующие уравнения движения для этого режима принимают вид

$$\partial_t q = -\partial_x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \lambda} = -\frac{1}{3} \partial_x^2 (q^3 \lambda_x), \quad (57)$$

$$\partial_t \lambda = -\partial_x \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} = -\partial_x \left(q - \frac{q^2}{2} \lambda_x^2 \right). \quad (58)$$

В отличие от модели вертикального склона, невертикальная модель, которую представляют уравнения (57), (58), в режиме коллапса допускает более узкий класс автомодельных решений

$$q = \beta^{-1}(t) \hat{q}(z), \quad \lambda = \beta^{3/2}(t) \hat{\lambda}(z). \quad (59)$$

Здесь, как и прежде, $z = x/\beta(t)$ — автомодельная переменная, а $\beta(t)$ — одна-единственная масштабная функция.

Подстановка решений (59) в систему уравнений (57), (58) позволяет найти

$$\beta = \frac{7}{2} (t - t_0)^{2/7},$$

а задачу для структурных функций свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z \hat{q} = -\frac{1}{3} \partial_z \left(\hat{q}^3 \hat{\lambda}_z \right), \quad (60)$$

$$z \hat{\lambda}_z - \frac{3}{2} \hat{\lambda} = \partial_z \left(\frac{\hat{q}^2}{2} \hat{\lambda}_z^2 - \hat{q} \right). \quad (61)$$

Система уравнений (60), (61) обладает двумя важными свойствами. Во-первых, на ее решениях, если они удовлетворяют соответствующим краевым условиям, о которых речь пойдет ниже, все инварианты движения \mathcal{H}, P, Λ , кроме Q , равны нулю. Это обстоятельство говорит о режиме слабого коллапса. Во-вторых, система обладает симметрией относительно преобразования

$$\hat{q} \rightarrow \alpha^4 \hat{q}, \quad \hat{\lambda} \rightarrow \alpha \hat{\lambda}, \quad z \rightarrow \alpha^3 z. \quad (62)$$

В частности, при $\alpha = -1$ из (62) вытекает полезное следствие: $\hat{q} \rightarrow \hat{q}, \hat{\lambda} \rightarrow -\hat{\lambda}, z \rightarrow -z$, которое говорит о том, что \hat{q} — четная, а $\hat{\lambda}$ — нечетная функции аргумента z .

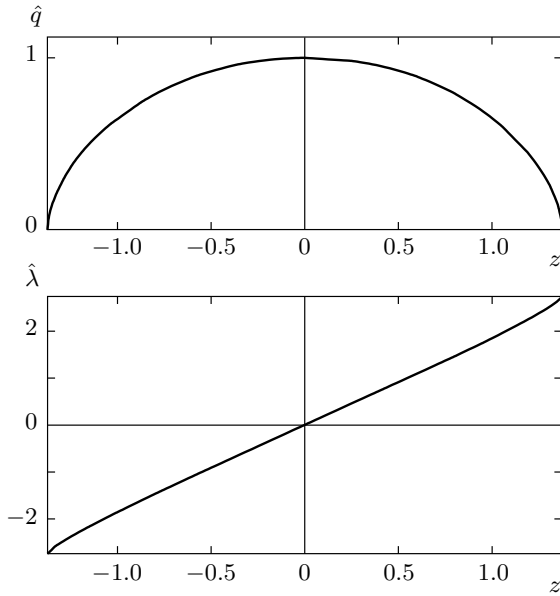


Рис. 8. Эталонные решения для структурных функций невертикальной модели в режиме коллапса

В силу отмеченных выше свойств и симметрий, поиск эталонного решения можно сформулировать как двухточечную краевую задачу с условиями

$$\hat{q}(0) = 1, \quad \hat{\lambda}(0) = 0, \quad \hat{q}_z(0) = 0, \quad \hat{q}(R) = 0,$$

которые означают, что для q ищется решение с единичной амплитудой, но неизвестным размером $2R$.

Для численного решения уравнений (60), (61) вместо z удобно ввести новый аргумент τ , такой что

$$z_\tau = \hat{q}.$$

Это позволяет понизить порядок нелинейности системы и записать ее в виде

$$\frac{2}{3} z_{\tau\tau} \hat{\lambda}_\tau + \frac{1}{3} \hat{\lambda}_{\tau\tau} z_\tau + z_\tau z = 0, \quad (63)$$

$$z_{\tau\tau} - \hat{\lambda}_{\tau\tau} \hat{\lambda}_\tau - \frac{3}{2} \hat{\lambda} z_\tau + z \hat{\lambda}_\tau = 0. \quad (64)$$

Численное решение задачи (63), (64) может быть получено методом пристрелки. Для этого вместо двухточечных краевых условий (45) следует использовать одноточечные:

$$z(0) = 0, \quad z_\tau(0) = 1, \quad \hat{\lambda}(0) = 0, \quad \hat{\lambda}_\tau(0) = \sigma,$$

где σ — пристрелочный параметр.

При $\sigma = 2.51084$ выходим на эталонное решение (см. рис. 8), для которого $\hat{\lambda}_z(0) = 1.79554$, $R = 1.37334$, $\hat{\lambda}(R) = 2.73913$.

5. ДОСТАТОЧНЫЙ КРИТЕРИЙ КОЛЛАПСА

Интегральные критерии представляют интерес в связи с тем, что развитие неустойчивости может зависеть от начальных данных, и позволяют судить об этом по интегралам движения. Обычно такие критерии находят в рамках подхода [13], основанного на использовании соответствующих мажорирующих неравенств.

Введем положительно определенную величину

$$\Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (65)$$

которая представляет собой центральный момент второго порядка для распределения q , а угловые скобки обозначают операцию «усреднения»:

$$\langle f \rangle = Q^{-1} \int f q dx, \quad Q = \int q dx.$$

Рассмотрим эволюцию величины Δx^2 по времени t . Вначале для момента первого порядка на основании уравнений движения (28), (29) установим справедливость равенства

$$\partial_t \langle x \rangle = Q^{-1} P = \text{const},$$

где Q и P — интегралы движения. Затем, дважды дифференцируя равенство (65), найдем, что

$$Q \partial_t^2 \Delta x^2 = Q \partial_t^2 \langle x^2 \rangle - 2Q^{-1} P^2,$$

где

$$Q \partial_t^2 \langle x^2 \rangle = 4I_1 + 2I_2 - 2 \int q^2 q_x^2 dx - 2 \int \left(q^3 q_x^2 \lambda_x^2 + \frac{2}{3} q^4 q_x \lambda_x \lambda_{xx} + \frac{1}{3} q^5 \lambda_{xx}^2 \right) dx. \quad (66)$$

Чтобы найти оценку для правой части выражения (66), воспользуемся неравенством Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} \left(\int q^3 \lambda_x^2 dx \right)^2 &= \left(\int \lambda \partial_x (q^3 \lambda_x) dx \right)^2 = \\ &= \left(\int \lambda q^{1/2} \left(3q^{3/2} q_x \lambda_x + q^{5/2} \lambda_{xx} \right) dx \right)^2 \leq \int q \lambda^2 dx \times \\ &\times \int \left(9q^3 q_x^2 \lambda_x^2 + 6q^4 q_x \lambda_x \lambda_{xx} + q^5 \lambda_{xx}^2 \right) dx, \end{aligned}$$

из которого следует неравенство

$$2I_3^2 I_1^{-1} \leq \int \left(q^3 q_x^2 \lambda_x^2 + \frac{2}{3} q^4 q_x \lambda_x \lambda_{xx} + \frac{1}{9} q^5 \lambda_{xx}^2 \right) dx.$$

Тогда из выражения (66) получим, что

$$Q\partial_t^2 \langle x^2 \rangle \leq 4I_1 + 2I_2 - 4I_3^2 I_1^{-1}.$$

Учитывая, что интегралы I_1, I_2, I_3 и гамильтониан \mathcal{H} связаны соотношением (27), легко показать, что

$$Q\partial_t^2 \langle x^2 \rangle \leq 8\mathcal{H}, \quad (67)$$

причем максимальное значение $8\mathcal{H}$ в этом неравенстве достигается при $I_1 \rightarrow \infty, I_2 \rightarrow 0$.

Неравенство (67) позволяет установить оценку

$$\partial_t^2 \Delta x^2 \leq 2Q^{-1} (4\mathcal{H} - Q^{-1}P^2),$$

интегрируя которую мы приходим к неравенству

$$Q\Delta x^2 \leq (4\mathcal{H} - Q^{-1}P^2)t^2 + C_1 t + C_2, \quad (68)$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования, определяемые начальными условиями. Отсюда следует достаточный критерий коллапса

$$\mathcal{H} < \frac{1}{4}Q^{-1}P^2. \quad (69)$$

Отметим, что условия коллапса для автомодельных решений, рассмотренных в разд. 4.1 для модели вертикального склона, следуют из критерия (69) как частный случай при $P = 0$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование показывает, что в рамках нелинейно-дисперсионного подхода гравитационное потенциальное течение на склоне неустойчиво. Более того, в отличие от бездисперсионных (см., например, [14]), нелинейно-дисперсионная модель воспроизводит принципиально другой характер неустойчивости. В частности, в ней отсутствует тенденция к опрокидыванию профиля поверхности и к образованию особенностей типа ударных волн, но зато проявляется другой механизм неустойчивости — коллапс.

Анализ нелинейных режимов модели показал существование стационарных частицеподобных решений (солитонов и компактонов), на которые могут распадаться склоновые течения на начальных стадиях дезынтеграции. Однако, как свидетельствуют численные эксперименты, рано или поздно в зависимости от начальных условий в процесс дезынтеграции вмешивается коллапс, который за конечное время приводит к формированию особенности для формы поверхности.

В зависимости от крутизны склона реализуются два сценария коллапса для формы поверхности q .

Для течения на вертикальном склоне коллапс развивается по законам

$$q \sim (t - t_0)^{-1/3}, \quad \lambda \sim (t - t_0)^{1/3}.$$

На невертикальном склоне этот процесс протекает чуть медленней:

$$q \sim (t - t_0)^{-2/7}, \quad \lambda \sim (t - t_0)^{1/7}.$$

Согласно теории, коллапс развивается на локализованном фрагменте течения определенной формы и требует антисимметричного линейного закона для распределения вихревой пелены, обеспечивающего коллапсирующему фрагменту нулевой импульс $P = \Lambda = 0$. Если для невертикальной модели при этом должно соблюдаться условие слабого коллапса $\mathcal{H} = 0$, то для вертикальной выполняется условие $\mathcal{H} < 0$.

Кроме коллапса, для локализованного фрагмента течения существует еще два возможных сценария развития — режим растекания и режим интенсификации вихревой пелены. Отметим, что линейный размер растекающегося фрагмента увеличивается пропорционально времени, а эффективная толщина соответственно уменьшается.

В качественном отношении отдельные результаты данной работы закономерно оказались близки к результатам, полученным в работе [11] для осесимметричной модели. К их числу относятся классификация режимов для вертикальной модели и достаточный критерий коллапса. В частности, этот критерий в обоих случаях имеет вид $\mathcal{H} < \gamma Q^{-1}P^2$, различны лишь множители γ . Для осесимметричной модели $\gamma = 1/3$, а для плоской модели склонового течения $\gamma = 1/4$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-05-00274), программы президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике», гранта Президента РФ НШ-4166.2006.5 и гранта РФФИ–Франция 07-05-92211-НЦНИЛ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Стокер, *Волны на воде. Математическая теория и приложения*, Изд-во иностр. лит., Москва (1959).
2. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).

3. Н. А. Иногамов, А. Ю. Демьянов, Э. Е. Сон, *Гидродинамика перемешивания*, Изд-во МФТИ, Москва (1999).
4. В. Е. Захаров, ПМТФ №2, 86 (1968).
5. V. P. Goncharov, V. I. Pavlov, ЖЭТФ **119**, 685 (2001).
6. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, в кн. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей*, под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского, Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск (2003), с. 179.
7. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, *Гамильтонова вихревая и волновая динамика*, Геос, Москва (2008).
8. P. Rosenau, Notices Amer. Math. Soc. **55**, 738 (2005).
9. В. П. Гончаров, В. И. Павлов, Письма в ЖЭТФ **84**, 459 (2006).
10. В. П. Гончаров, ЖЭТФ **132**, 1226 (2007).
11. В. П. Гончаров, Письма в ЖЭТФ **89**, 457 (2009).
12. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986).
13. Е. А. Кузнецов, Изв. вузов. Радиофизика **56**, 342 (2003).
14. О. В. Руденко, А. Л. Собисевич, Л. Е. Собисевич, ДАН **416**, 384 (2007).