

О ГЕНЕРАЦИИ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ В СРЕДЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПРЕЛОМЛЕНИЕМ ВОЛНЫ НАКАЧКИ

С. О. Елютин^{a,}, А. И. Маймистов^{a,b}, И. Р. Габитов^c*

^a *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Россия*

^b *Московский физико-технический институт, Центр бионанотехнологии
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

^c *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 12 сентября 2009 г.

Теоретически рассмотрено распространение импульсов накачки и ее третьей гармоники в кубично нелинейной среде при условии, что линейные свойства среды характеризуются отрицательным показателем преломления на частоте накачки и положительным показателем преломления на частоте гармоники. Для случая малой интенсивности взаимодействующих волн импульсы накачки и третьей гармоники распространяются в противоположных направлениях, но достаточно мощные импульсы могут образовать симултон — уединенную двухчастотную волну, распространяющуюся в определенном направлении как одно целое. Численно исследована система уравнений модели, включающей помимо генерации гармоники дисперсию групповых скоростей второго порядка и нелинейную фазовую авто- и кросс-модуляцию взаимодействующих волн. Обсуждаются эффект разбега импульсов накачки и гармоники из-за различия направлений их групповых скоростей и особенности соотношения Мэнли – Роу для параметрических процессов в метасредах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитные свойства материалов, построенных из периодически расположенных структурных элементов (например, наноразмерных металлических шариков, проволок, подковок и колечек) в диэлектрическом окружении, интенсивно исследуются в последние годы [1–12]. Такого рода материалы называют метаматериалами. При размере каждого элемента меньше или порядка длины волны излучения метаматериал может рассматриваться как сплошная среда, а его структурные элементы — как метамолекулы. В определенном диапазоне частот излучения как падающий, так и преломленный пучки на границе раздела метаматериала с обычным диэлектриком находятся по одну сторону от нормали к поверхности раздела двух сред. Чтобы сохранить вид закона Снелла, приходится предполагать, что относительный показатель преломления отрицателен. Отрицательное преломление связано с

тем, что электромагнитная волна в такой среде имеет волновой вектор, направленный антипараллельно вектору Пойнтинга [13–15]. Отрицательным преломлением обладают материалы, у которых вещественные части диэлектрической и магнитной проницаемостей одновременно отрицательны в некотором частотном диапазоне [2–4, 9–12]. Существование сред, обладающих отрицательным преломлением в оптическом (точнее, в ИК) диапазоне, было экспериментально продемонстрировано в работах [16–18]. У ныне существующих материалов с отрицательным преломлением достаточно высоки потери, однако недавно [18] было достигнуто существенное улучшение качества этих материалов. Это дает надежду на получение в будущем прозрачных материалов с отрицательным преломлением и обуславливает целесообразность проводить исследования их оптических нелинейных свойств.

К настоящему времени были рассмотрены явления, имеющие место на границе раздела нелинейных сред с отрицательным и положительным показате-

*E-mail: soelyutin@mephi.ru

лями преломления. Теоретически исследованы нелинейные поверхностные волны и волны в волноводах [19–21], оптическая бистабильность [22–26], нелинейные волны в одномерных периодических структурах [27–30], мультистабильность и нелинейные волны в антинаправленном ответвителе [31–33]. Разброс параметров структурных элементов метаматериала приводит к генерации когерентных откликов типа эффекта фотонного эхо [34]. С другой стороны, показатель преломления для одной и той же среды может быть положительным в одной спектральной области и отрицательным в другой. Таким образом, особенности отрицательного преломления могут проявиться при взаимодействии волновых пакетов, несущие частоты которых лежат в различных спектральных областях, в которых показатель преломления имеет различные знаки. Исследования параметрического взаимодействия в такой положительно-отрицательно преломляющей среде [35–37], генерации второй гармоники [14, 38–43] и распространения в ней двухчастотных солитонов [44] предсказывают также новые нелинейные оптические эффекты. Следует заметить, что в недавних работах [45, 46] наблюдалась генерация как второй, так и третьей гармоники в тонких слоях метаматериала.

Целью статьи является исследование частного случая четырехволнового взаимодействия — генерации третьей гармоники (ГТГ) — в условиях, когда для волны фундаментальной частоты среда является отрицательно преломляющей, а для гармоники — положительно преломляющей. В отличие от трехволнового взаимодействия здесь нелинейные восприимчивости третьего порядка, отвечающие за фазовую автомодуляцию и кросс-модуляцию, могут быть того же порядка, что и восприимчивость, ответственная за ГТГ. Основное внимание будет сосредоточено на изучении ГТГ в поле волн, бегущих в противоположных направлениях, без учета вращения вектора напряженности электрического поля. Это позволяет сформулировать систему скалярных уравнений для моделирования ГТГ в среде с отрицательным преломлением на частоте волны накачки, но положительно преломляющей на частоте гармоники. Благодаря дополнительным приближениям возможны аналитические решения модели. Показана возможность связанного состояния импульсов накачки и гармоники. Найдено, что среди стационарных решений уравнений модели имеются решения в виде кноидальной волны. В предельном случае непрерывных волн для интенсивностей полей найдено выражение, являющееся аналогом соотношения Мэнли–Роу [47]. Численными методами исследова-

ны переходные процессы формирования импульсов третьей гармоники в метасреде, когда учитывается влияние на динамику огибающих импульсов дисперсии групповых скоростей взаимодействующих волн, нелинейной фазовой авто- и кросс-модуляции волны гармоники и фундаментальной волны. В Заключении дано краткое обсуждение результатов.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Генерация третьей гармоники есть четырехволновое взаимодействие по схеме $(\omega_1 + \omega_1 + \omega_1 \rightarrow \omega_3 = 3\omega_1 = 3\omega)$ в кубично-нелинейной среде. В квазигармоническом приближении медленно меняющихся амплитуд и фаз взаимодействующих волн и для случая коллинеарного распространения плоских волн гармоники и накачки уравнения нестационарной ГТГ выглядят следующим образом [48]:

$$\left(-s_1 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_{g,1}} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_1 = i \frac{2\pi\omega_1^2 \mu(\omega_1)}{c^2 k_1} P_{NL}(\omega_1) \exp(-ik_1 z), \quad (1a)$$

$$\left(s_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_{g,3}} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_3 = i \frac{2\pi\omega_3^2 \mu(\omega_3)}{c^2 k_3} P_{NL}(\omega_3) \exp(-ik_3 z), \quad (1b)$$

где $v_{g,1}$, $v_{g,3}$ — групповые скорости волновых пакетов, представляющих импульсы накачки и гармоники, $k_j^2 = (\omega_j/c)^2 \varepsilon(\omega_j) \mu(\omega_j)$, $s_j = \text{sign}(\sqrt{k_j^2})$. Нелинейная поляризация включает не только превращение одной волны в другую, но и фазовую авто- и кросс-модуляцию [48]:

$$\begin{aligned} P_{NL}(\omega_1) &= \chi^{(3)}(\omega_1; \omega_3, -\omega_1, -\omega_1) \times \\ &\quad \times E_3 E_1^{*2} \exp[iz(k_3 - 2k_1)] + \\ &\quad + \chi^{(3)}(\omega_1; \omega_1, -\omega_1, \omega_1) |E_1|^2 E_1 \exp(izk_1) + \\ &\quad + \chi^{(3)}(\omega_1; \omega_1, -\omega_3, \omega_3) |E_3|^2 E_1 \exp(izk_1) = \\ &= \chi_{11} E_3 E_1^{*2} \exp[iz(k_3 - 2k_1)] + \\ &\quad + \chi_{12} |E_1|^2 E_1 \exp(izk_1) + \\ &\quad + \chi_{13} |E_1|^2 E_1 \exp(izk_1), \quad (2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{NL}(\omega_3) &= \chi^{(3)}(\omega_3; \omega_1, \omega_1, \omega_1) E_1^3 \exp(iz3k_1) + \\ &\quad + \chi^{(3)}(\omega_3; \omega_3, -\omega_3, \omega_3) |E_3|^2 E_3 \exp(izk_3) + \\ &\quad + \chi^{(3)}(\omega_3; \omega_3, -\omega_1, \omega_1) |E_1|^2 E_3 \exp(izk_3) = \\ &= \chi_{31} E_1^3 \exp(iz3k_1) + \chi_{32} |E_3|^2 E_3 \exp(izk_3) + \\ &\quad + \chi_{33} |E_1|^2 E_3 \exp(izk_3). \quad (2b) \end{aligned}$$

Нижние индексы при χ нумеруют последовательность, с которой появляются соответствующие слагаемые в правых частях уравнений (2), они не обозначают тензорные компоненты нелинейной восприимчивости третьего порядка. Следует заметить, что волновые сопротивления среды $\sqrt{\mu(\omega_j)/\varepsilon(\omega_j)}$ на частотах ω_j , возникающие в правых частях уравнений (1) всегда положительны и не зависят от знака диэлектрической и магнитной проницаемостей. Направление распространения взаимодействующих волн, тем самым, определяется знаками s_j .

Условие коллинеарного синхронизма $\Delta k = 3k_1 - k_3 = 0$ определяет направление волновых векторов волн накачки и гармоники. Из условия $\Delta \mathbf{k} \approx 0$ следует, что волновой вектор гармоники \mathbf{k}_3 (приближенно) равен вектору $3\mathbf{k}_1$. Если среда характеризуется положительным (или отрицательным) показателем преломления на обеих частотах, то векторы $\mathbf{k}_{1,3}$ и векторы Пойнтинга взаимодействующих волн направлены одинаково. В рассматриваемом здесь случае вектор Пойнтинга и волновой вектор волны накачки направлены в противоположные стороны. Так что при выполнении условия фазового синхронизма векторы Пойнтинга взаимодействующих волн направлены навстречу друг другу.

В уравнениях (1) считается, что волновые векторы накачки и гармоники направлены вдоль оси z . Но поскольку предполагается, что среда является отрицательно преломляющей для волны накачки, ее поток энергии должен быть направлен против оси z , т. е. излучение накачки падает на заднюю границу среды. Импульс гармоники возникает в среде и распространяется вдоль оси z . Для такой схемы взаимодействующих волн уравнения ГТГ (1) с учетом выражений для поляризации (2) и дисперсии групповых скоростей второго порядка переписутся в следующем виде:

$$i \left((-1) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_1 - \frac{D_1}{2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = -\frac{2\pi\omega_1}{c} \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} (\chi_{11} E_3 E_1^{*2} \exp(-i\Delta k z) + \chi_{12} |E_1|^2 E_1 + \chi_{13} |E_3|^2 E_1), \quad (3a)$$

$$i \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_3} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_3 - \frac{D_3}{2} \frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} = -\frac{2\pi\omega_3}{c} \sqrt{\frac{\mu_3}{\varepsilon_3}} (\chi_{31} E_1^3 \exp(i\Delta k z) + \chi_{32} |E_3|^2 E_3 + \chi_{33} |E_1|^2 E_3), \quad (3b)$$

где коэффициенты D_1 и D_3 определяют дисперсию групповых скоростей на фундаментальной частоте

и частоте гармоники, $\mu_{1,3} = \mu(\omega_{1,3})$, $\varepsilon_{1,3} = \varepsilon(\omega_{1,3})$. Проведя замену переменных

$$E_1 = E_0 e_1(\zeta, \tau) \exp(-i\zeta), \\ E_3 = E_0 e_3(\zeta, \tau) \exp(i\Delta\zeta - 3i\zeta), \\ z = L\zeta, \quad t = \tau \frac{L}{c} + (-1)\zeta \frac{L}{v_1},$$

где

$$L = \frac{c}{2\pi\omega} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_0^2 \chi_{11})^{-1} = \lambda \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (4\pi^2 E_0^2 \chi_{11})^{-1}, \\ \lambda = \frac{2\pi c}{\omega},$$

уравнения (3) можно представить в нормализованной форме:

$$\frac{\partial e_1}{\partial \zeta} = i \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 e_1}{\partial \tau^2} + i e_1 - i e_3 e_1^{*2} - i (q_1 |e_1|^2 + r_1 |e_3|^2) e_1, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial \zeta} = -i \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 e_3}{\partial \tau^2} - i \gamma e_3 - \delta \frac{\partial e_3}{\partial \tau} + i \theta e_1^3 + i (q_3 |e_3|^2 + r_3 |e_1|^2) e_3, \quad (4b)$$

где $\gamma = \Delta - 3$, $\Delta = L\Delta k$,

$$\theta = \frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{\chi_{31}}{\chi_{11}} \left(\frac{\mu_3 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_3} \right)^{1/2},$$

$$\delta = \left(\frac{c}{v_{g,1}} + \frac{c}{v_{g,3}} \right), \quad \sigma = \frac{D_1 c^2}{L}, \quad \beta = \frac{D_3 c^2}{L},$$

$$q_1 = \frac{\chi_{12}}{\chi_{11}}, \quad r_1 = \frac{\chi_{13}}{\chi_{11}},$$

$$q_3 = \frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{\chi_{32}}{\chi_{11}} \left(\frac{\mu_3 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_3} \right)^{1/2}, \quad r_3 = \frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{\chi_{33}}{\chi_{11}} \left(\frac{\mu_3 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_3} \right)^{1/2}.$$

Допустим для простоты, что между эффективными значениями нелинейной восприимчивости третьего порядка, отвечающими за разные типы нелинейностей, существует связь $3\chi_{31} = \chi_{11}$ [32] и $\chi_{13} = \chi_{33}$. Тогда можно установить, что параметр θ определяется отношением $\theta = (\mu_3/\varepsilon_3)^{1/2} (\mu_1/\varepsilon_1)^{-1/2}$ волновых импедансов среды на разных частотах, а коэффициенты кросс-модуляции связаны соотношением $r_3 = 3\theta r_1$. Величина L имеет смысл характерной длины, на которой происходит эффективное преобразование накачки в гармонику, если бы речь шла о непрерывном излучении. Параметр $\delta = c(v_{g,1}^{-1} + v_{g,3}^{-1})$

учитывает эффект разбегания импульсов фундаментальной волны (накачки) и гармоники из-за различия их групповых скоростей. Тем самым δ есть мера нарушения группового синхронизма, который характерен для взаимодействия уединенных волн, дополнительно к фазовому синхронизму. В отличие от обычного случая генерации гармоник любого порядка, где при малой разнице между групповыми скоростями накачки и гармоники эффект разбегания может оказаться незначительным, в рассматриваемом здесь случае эффект разбегания импульсов всегда присутствует. Как минимум, $\delta > 2$.

Принципиальной для адекватных числовых оценок предложенной модели является эффективная величина нелинейной восприимчивости третьего порядка. Спектральные измерения ГТГ в метасредах [46, 49] не дают возможности извлечь необходимую информацию. Следуя работе [42], выберем величину $\chi^{(3)}$ исходя из известных характерных значений для оптических сред: $\chi^{(3)} \approx 2 \cdot 10^{-14}$ СГСЭ = $2 \cdot 10^{-22}$ м²/В².

Огибающая импульса накачки предполагается медленно меняющейся во времени и, соответственно, его длительность t_p должна быть существенно больше оптического периода. С другой стороны, пространственная протяженность импульса фундаментальной волны должна поместиться на характерной длине L , таким образом, можно считать, что $ct_p \sim L \approx 200\lambda \approx 2 \cdot 10^{-4}$ м. Отсюда с учетом определения параметра L следует оценка для амплитуды характерного поля:

$$E_0 \approx \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (800\pi^2 \chi_{11})^{-1} \right)^{1/2} = \frac{1}{20\sqrt{2}\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\chi_{11}\mu_1}} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ В/м,}$$

что представляет значительную величину, если учесть что характерное внутриатомное поле $E_{at} \approx 3 \cdot 10^{10}$ В/м.

При выбранной оценке пространственной протяженности импульса длина дисперсии $L_{disp} = t_p^2/D_1$ составит по оценке работы [42] $L_{disp} \approx 6$ см, при этом коэффициент $D_1 \approx 7 \cdot 10^{-24}$ с²/см, а параметры σ и β по порядку величины не превысят 10^{-2} . Ясно, что вклад дисперсионных процессов в динамику импульсов параметрически связанных волн в этом случае будет незначителен. Для того чтобы эффект дисперсии групповых скоростей на выбранном пространственном масштабе был замечен, следует положить $|\sigma| \sim |\beta| \approx 1$. В этом случае при тех же условиях $D_1 \approx 2 \cdot 10^{-21}$ с²/см, а длина дис-

персии $L_{disp} \sim L \approx 0.2$ мм. Для сравнения характерная величина D_1 для стеклянных световодов составляет $D_1 \approx 2 \cdot 10^{-28}$ с²/см. Из общих соображений оценки для коэффициентов q и r фазовой авто- и кросс-модуляции фундаментальной волны и гармоники могут варьироваться в пределах нескольких единиц или вовсе отсутствовать, если в анализе пренебрегается соответствующими эффектами, т. е. в случае $\chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{32}, \chi_{33} \ll \chi_{11}$.

Из уравнений модели (4) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} (|e_3|^2 - \theta|e_1|^2) + \delta \frac{\partial |e_3|^2}{\partial \tau} + \\ + i \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e_3^* \frac{\partial e_1}{\partial \tau} - e_3 \frac{\partial e_3^*}{\partial \tau} \right) + \\ + i \theta \frac{\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e_1^* \frac{\partial e_1}{\partial \tau} - e_1 \frac{\partial e_1^*}{\partial \tau} \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, предполагая выполнение следующих граничных и начальных условий:

$$\begin{aligned} |e_{1,3}(\zeta = 0, \tau)|^2 &\rightarrow |e_{10,30}(\tau)|^2, \\ |e_{1,3}|^2 &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \pm\infty, \end{aligned}$$

можно найти интеграл движения

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|e_3|^2 - \theta|e_1|^2) d\tau = \text{const.} \quad (5)$$

Для непрерывного излучения из формулы (5) следует соотношение, аналогичное соотношению Мэнли-Роу. В среде с положительным преломлением вместо знака минус в подынтегральном выражении стоит знак плюс. Как и при генерации второй гармоники, в рассматриваемом здесь случае выражение (5) отражает противоположность направлений потоков энергии взаимодействующих волн. Это, в свою очередь, обусловлено необходимостью выполнения фазового синхронизма, который в работах [35, 40] был назван обратным синхронизмом. Этим параметрическое взаимодействие волн в средах с отрицательным преломлением для одной из волн отличается от взаимодействия волн в обычных средах или в средах, где характер преломления одинаков для всех волн.

3. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИКИ В ПОЛЕ НЕПРЕРЫВНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В качестве первого шага в изучении ГТГ следует рассмотреть случай непрерывной накачки. При этом

рассмотрим только процесс превращения излучения накачки в гармонику, опустив слагаемые, описывающие фазовую автомодуляцию и кросс-модуляцию. Система уравнений (4) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial e_1}{\partial \zeta} = ie_1 - ie_3 e_1^{*2}, \quad \frac{\partial e_3}{\partial \zeta} = -i\gamma e_3 + i\theta e_1^3. \quad (6)$$

Для анализа уравнений (6) удобно перейти к действительным переменным:

$$e_1 = a \exp(i\varphi_1), \quad e_3 = b \exp(i\varphi_3).$$

Разделение вещественных и мнимых частей в формуле (6) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \zeta} &= a^2 b \sin \Phi, & \frac{\partial b}{\partial \zeta} &= \theta a^3 \sin \Phi, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= -\Delta + \left(\frac{\theta a^3 + 3ab^2}{b} \right) \cos \Phi, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Phi = \varphi_3 - 3\varphi_1$. Из первых двух уравнений (7) следует интеграл движения:

$$\theta a^2 - b^2 = c_0^2 = \text{const}. \quad (8)$$

Для слоя нелинейного материала толщиной l краевое условие записывается как

$$a(\zeta = l) = a_0, \quad b(\zeta = 0) = 0. \quad (9)$$

При выполнении условия фазового синхронизма ($\Delta = 0$) соотношение (8) позволяет записать уравнения в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial \zeta} &= a(b^2 + c_0^2) \sin \Phi, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= ab^{-1}(4b^2 + c_0^2) \cos \Phi. \end{aligned} \quad (10)$$

Из формулы (10) имеем

$$\frac{d\Phi}{db} = \frac{(c_0^2 + 4b^2) \cos \Phi}{b(c_0^2 + b^2) \sin \Phi}.$$

Отсюда следует второй интеграл движения системы (7):

$$b(b^2 + c_0^2)^{3/2} \cos \Phi = c_1 = \text{const}. \quad (11)$$

Краевые условия (9) удовлетворяются, если $c_1 = 0$, и тогда $\Phi = \pi/2$ либо $\Phi = 3\pi/2$. Первое значение приводит к положительной производной в уравнениях (10) и должно быть отброшено. Выбор $\Phi = 3\pi/2$ позволяет записать амплитудные уравнения (7) в следующей форме:

$$\frac{\partial b}{\partial \zeta} = -a(b^2 + c_0^2), \quad \frac{\partial a}{\partial \zeta} = -a^2(\theta a^2 - c_0^2)^{1/2}. \quad (12)$$

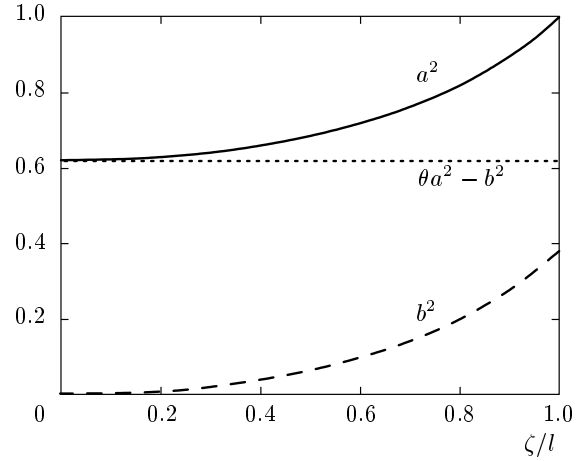


Рис. 1. Иллюстрация модифицированного соотношения Мэнли–Роу для ГТГ в «лево-правой» метасреде. $\theta = 1$, $a_0 = 1$, $l = 1$, $c_0 = 0.786$

Первое уравнение системы (12) с учетом (8) преобразуется в уравнение

$$\sqrt{\theta} \frac{\partial b}{\partial \zeta} = -(b^2 + c_0^2)^{3/2}.$$

Его решение имеет вид

$$-c_0^2 \theta^{-1/2} (\zeta - \zeta_0) = \frac{w}{(1 + w^2)^{1/2}}, \quad (13)$$

где $w = b/c_0$. Константа интегрирования ζ_0 находится из условия $b(\zeta = 0) = 0$, откуда $\zeta_0 = 0$. Соотношения Мэнли–Роу $\theta a_0^2 - b^2(\zeta = l) = c_0^2$ или $a_0^2(\theta - l^2 c_0^4) = c_0^2$ задают уравнение для определения константы c_0^2 . Выражение для c_0 получается обычным образом:

$$c_0^2 = (2l^2 a_0^2)^{-1} \left(\sqrt{1 + 4\theta l^2 a_0^4} - 1 \right),$$

$$b(\zeta = l) = (2la_0)^{-1} \left(\sqrt{1 + 4\theta l^2 a_0^4} - 1 \right).$$

Окончательно решения системы (7) следуют из формулы (13):

$$\begin{aligned} b^2 &= c_0^2 w^2(\zeta) = \frac{c_0^2 (\zeta/l)^2 (\theta a_0^2 - c_0^2)}{\theta a_0^2 - (\zeta/l)^2 (\theta a_0^2 - c_0^2)}, \\ a^2 &= a_0^2 \frac{c_0^2}{\theta a_0^2 - (\zeta/l)^2 (\theta a_0^2 - c_0^2)}, \end{aligned} \quad (14)$$

и представлены в виде графиков на рис. 1 при выборе параметров задачи $\theta = 1$, $a_0 = 1$, $l = 1$. Коэффициент преобразования в гармонику можно определить как

$$r = \frac{|b(\zeta = l)|^2}{|a_0|^2} = \frac{1 + 2\theta a_0^4 l^2 - \sqrt{1 + 4\theta a_0^4 l^2}}{2a_0^4 l^2}.$$

Отсюда видно, что при

$$l \rightarrow \infty \left(l \gg \frac{1}{2a_0^2 \sqrt{\theta}} \right)$$

величина $r \rightarrow \theta$.

4. ВОЛНЫ БЕЗ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

В действительных переменных уравнения модели (4) без нелинейной фазовой модуляции и при выполнении условия фазового синхронизма имеют вид

$$\frac{\partial a}{\partial \zeta} = -\frac{\sigma}{2} \left(2 \frac{\partial a}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + a \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} \right) + a^2 b \sin \Phi, \quad (15a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \delta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) b = \frac{\beta}{2} \left(2 \frac{\partial b}{\partial \tau} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \tau} + a \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \tau^2} \right) + \theta a^3 \sin \Phi, \quad (15b)$$

$$a \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} - a \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \right)^2 \right) + a - a^2 b \cos \Phi, \quad (15c)$$

$$b \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \delta \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \varphi_3 = \frac{\beta}{2} \left(b \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{\partial^2 b}{\partial \tau^2} \right) - \gamma b + \theta a^3 \cos \Phi. \quad (15d)$$

Пусть и линейная фазовая модуляция отсутствует, т. е. $\partial^2 \varphi_{1,3} / \partial \tau^2 = 0$, тогда $\partial \varphi_{1,3} / \partial \tau = \Omega_{1,3}$. Условие $\Phi = \varphi_3 - 3\varphi_1 = 0$ означает, что $\Omega_3 = 3\Omega_1 \equiv 3\Omega$. Считая величины $\partial \varphi_{1,3} / \partial \zeta = \kappa_{1,3}$ постоянными, можно определить фазы взаимодействующих волн:

$$\varphi_1 = \kappa \zeta + \Omega \tau, \quad \varphi_3 = 3\kappa \zeta + 3\Omega \tau. \quad (16)$$

Амплитудные уравнения (15a) и (15b) приобретут вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \sigma \Omega \frac{\partial}{\partial \tau} \right) a &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + (\delta - 3\beta \Omega) \frac{\partial}{\partial \tau} \right) b &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Стационарные волны на обеих частотах должны распространяться как одно целое, с одинаковыми скоростями, т. е.

$$a = a(\tau - \zeta/V), \quad b = b(\tau - \zeta/V),$$

где $V^{-1} = \sigma \Omega = \delta - 3\beta \Omega$. При этом уравнения (17) выполняются тождественно, и фиксируется параметр «мгновенная частота»

$$\Omega = \delta / (\sigma + 3\beta).$$

Для того чтобы найти скорость такого импульса, нужно записать «запаздывающее» (retarded) время $y = \tau - \zeta/V$ в физических переменных:

$$y = \tau - \frac{\zeta}{V} = \frac{c}{L} \left(t + \frac{z}{v_1} \right) - \frac{z}{LV}.$$

Используя определения $V^{-1} = \sigma \Omega$, $\Omega = \delta / (\sigma + 3\beta)$, $\delta = c(v_{g,1}^{-1} + v_{g,3}^{-1})$, величину y можно записать следующим образом:

$$y = \frac{c}{L} \left\{ t - z \left[\frac{\sigma}{\sigma + 3\beta} \left(\frac{1}{v_{g,1}} + \frac{1}{v_{g,3}} \right) - \frac{1}{v_1} \right] \right\} = \frac{c}{L} \left\{ t - \frac{z}{V_s} \right\}.$$

Отсюда следует, что скорость уединенной нелинейной волны (светлого двухчастотного солитона) определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_s} &= \frac{1}{\sigma + 3\beta} \left(\frac{\sigma}{v_{g,3}} - \frac{3\beta}{v_{g,1}} \right) \\ \text{или} \quad \frac{1}{V_s} &= \frac{1}{D_1 + 3D_3} \left(\frac{D_1}{v_{g,3}} - \frac{3D_3}{v_{g,1}} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Если, к примеру, положить $\sigma = -1$ и $\beta = -1$, тогда

$$V_s = \frac{4v_{g,3}v_{g,1}}{v_{g,1} - 3v_{g,3}}.$$

5. ПРИМЕРЫ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН ПРИ ГЕНЕРАЦИИ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ

В сделанных предположениях уравнения (15c) и (15d) переписутся в виде

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = \frac{2}{\sigma} \left(\kappa + \sigma \frac{\Omega^2}{2} - 1 \right) a + \frac{2}{\sigma} a^2 b, \quad (19a)$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = \frac{2}{\beta} \left(\frac{9}{2} \beta \Omega^2 - \gamma - 3\kappa - 3\delta \Omega \right) b + \frac{2\theta}{\beta} a^3. \quad (19b)$$

Решение системы уравнений (19) будем искать, полагая, что амплитуды взаимодействующих волн линейно связаны: $b = fa$. Тогда уравнения (19) сводятся к двум уравнениям для одной функции $a = a(y)$ от одной переменной $y = \tau - \zeta/V$:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = \frac{2}{\sigma} \left(\kappa + \Omega^2 \frac{\sigma}{2} - 1 \right) a + \frac{2}{\sigma} f a^3, \quad (20a)$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = \frac{2}{\beta} \left(\frac{9}{2} \beta \Omega^2 - \gamma - 3\kappa - 3\delta \Omega \right) a + 2 \frac{\theta}{f \beta} a^3. \quad (20b)$$

Эти уравнения будут определять одну функцию $a(y)$, если коэффициенты при одинаковых степенях величины a равны, т. е.

$$f^2 = \frac{\theta\sigma}{\beta} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{2}{\beta} \left(\frac{9}{2}\beta\Omega^2 - \gamma - 3\kappa - 3\delta\Omega \right) = \frac{2}{\sigma} \left(\kappa + \Omega^2 \frac{\sigma}{2} - 1 \right). \quad (21)$$

Если $\sigma = 1$ и $\theta > 0$, то параметр дисперсии на частоте третьей гармоники β должен быть также положительным. Наоборот, если $\sigma = -1$ и $\theta > 0$, то параметр β должен быть отрицательным. Выражения (21) определяют параметр κ как

$$\kappa = \sigma \frac{4\beta\Omega^2 - 3\delta\Omega - \gamma + \beta/\sigma}{\beta + 3\sigma}. \quad (22)$$

При этом амплитуда $a(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = pa + \frac{2}{\sigma} fa^3, \quad (23)$$

где

$$p = 2\frac{\kappa}{\sigma} + \Omega^2 - \frac{2}{\sigma}.$$

Отсюда следует первый интеграл:

$$\left(\frac{da}{dy} \right)^2 = pa^2 + \frac{f}{\sigma} a^4 + \text{const.} \quad (24)$$

Выбор начальных условий определяет тип нелинейных волн, возникающих в качестве решений уравнения (24), а именно, для уединенных волн в форме светлого солитона: $a \rightarrow \bar{a}$ и $da/dy \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$, для периодических (кноидальных) волн: $a = \bar{a}$ и $da/dy = 0$ в некоторых точках оси τ .

Из уравнения (24) следует соотношение, определяющее константу интегрирования:

$$p\bar{a}^2 + \sigma^{-1}f\bar{a}^4 + \text{const} = 0,$$

так что уравнение (24) записывается в виде

$$\left(\frac{da}{dy} \right)^2 = (a^2 - \bar{a}^2) \left[p + \frac{f}{\sigma}(a^2 + \bar{a}^2) \right]. \quad (25)$$

Пусть для определенности дисперсионные коэффициенты будут заданы как $\sigma = -1$, $\beta = -3$. Тогда

$$\left(\frac{da}{dy} \right)^2 = (a^2 - \bar{a}^2) [p - f(a^2 + \bar{a}^2)]. \quad (26)$$

После подстановки $a = \bar{a} \cos \phi$ в уравнение (26) имеем

$$\left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 = (2f\bar{a}^2 - p) [1 - m_1^2 \sin^2 \phi], \quad (27)$$

где модуль $m_1^2 = f\bar{a}^2 (2f\bar{a}^2 - p)^{-1}$.

Если $p < 0$, то $m_1^2 < 1$ и решение уравнения (27) есть

$$\cos \phi = \text{cn} \left((2f\bar{a}^2 + |p|)^{1/2} (y - y_0), m_1 \right),$$

что соответствует решению уравнения (26) в виде кноидальной волны:

$$a(y) = \bar{a} \text{cn} \left((2f\bar{a}^2 + |p|)^{1/2} (y - y_0), m_1 \right).$$

На рис. 2а представлено численное решение исходного уравнения (23) при краевом условии, соответствующем кноидальной волне.

Если $p \geq 0$, уравнение (26) может быть преобразовано в следующее:

$$\left(\frac{da}{dy} \right)^2 = f(a^2 - \bar{a}^2) ((p - f\bar{a}^2)f^{-1} - a^2). \quad (28)$$

Для новой переменной $u^2 = a^2 - \bar{a}^2$ оно будет выглядеть как

$$\left(\frac{du}{dy} \right)^2 = f(u^2 + \bar{a}^2) ((p - 2f\bar{a}^2)f^{-1} - u^2). \quad (29)$$

Подставив

$$u = ((p - 2f\bar{a}^2)f^{-1})^{1/2} \cos \phi,$$

получим

$$\left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 = (p - f\bar{a}^2) [1 - m_2^2 \sin^2 \phi],$$

где $m_2^2 = (p - 2f\bar{a}^2)(p - f\bar{a}^2)^{-1}$. Если предположить, что $m_2^2 \leq 1$, то решение уравнения (29) выражается через эллиптический косинус:

$$u(y) = ((p - 2f\bar{a}^2)f^{-1})^{1/2} \times \text{cn} \left((p - f\bar{a}^2)^{1/2} (y - y_0), m_2 \right),$$

тогда как решение уравнения для огибающей фундаментальной волны задается выражением

$$a^2(y) = a_0^2 + (p - 2f\bar{a}^2)f^{-1} \times \text{cn}^2 \left((p - f\bar{a}^2)^{1/2} (y - y_0), m_2 \right). \quad (30)$$

При $\bar{a} \neq 0$ и $da/dy \neq 0$ выражение (30) соответствует кноидальной однополярной волне подобно той, которая приведена на рис. 2б в качестве численного решения уравнения (23).

С использованием свойств эллиптических функций $\text{cn}(z, 1) = \text{ch}^{-1}(z)$, из уравнения (25) в пределе

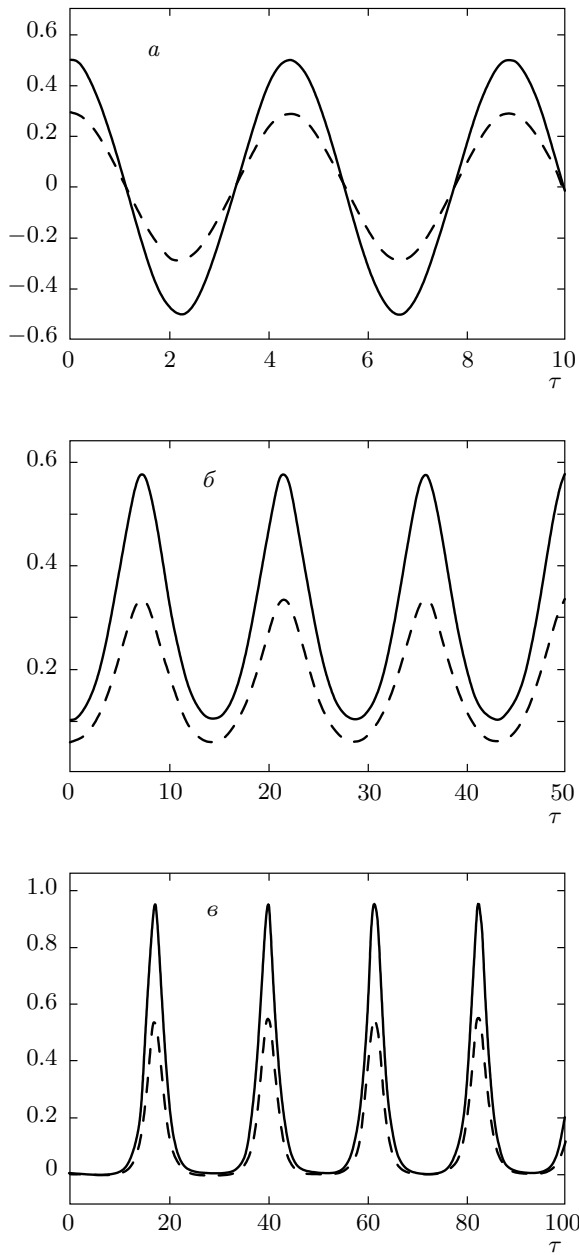


Рис. 2. Стационарные решения уравнений модели при $\sigma = -1$, $\beta = -3$, $\delta = 4$, $\Omega = -4$; (а) $p = -1.8$, $\Delta = -3$, $\gamma = -6$, $\theta = 1$, $\kappa = 1.98$, $a_0 = 0.5$, $da/d\tau = 0$, $m_1 = 0.263$; (б) $p = 0.2$, $\Delta = 3$, $\gamma = 0$, $\theta = 1$, $\kappa = 0.98$, $a_0 = 0.1$, $da/d\tau = 0$, $m_2 = 0.263$; (в) $p = 0.533$, $\sigma = -1$, $\beta = -3$, $\Delta = 4$, $\gamma = 1$, $\theta = 1$, $\kappa = 0.813$, $a_0 = 0$, $da/dy = 0.00001$, $m_2 = 1$. Сплошные линии соответствуют волнам накачки (а), штриховые — гармонике (б)

$\bar{a} = 0$ получаются решения в виде светлых солитонов для волн накачки и гармоники:

$$a(y) = \frac{\sqrt{p/f}}{\text{ch}((y - y_0)\sqrt{p})},$$

$$b(y) = \frac{\sqrt{pf}}{\text{ch}((y - y_0)\sqrt{p})}.$$

На рис. 2в показано численное решение общего уравнения (23) в виде цепочки импульсов при соответствующих краевых условиях. Скважность импульсов будет тем больше, чем более точно выполняется предел $da/dy \rightarrow 0$.

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ

Объектом численного моделирования является полная система уравнений (4), описывающая ГТГ в среде с отрицательным преломлением волны накачки с учетом эффектов нелинейной авто- и кросс-модуляции (параметры $q_{1,3}$, $r_{1,3}$), дефектов фазового (Δ) и группового (δ) синхронизма, а также дисперсии групповых скоростей волн накачки и гармоники (σ , β). Как уже отмечалось, принципиальным отличием рассмотренного процесса от соответствующих параметрических процессов в обычных средах является взаимодействие волновых пакетов накачки и гармоники, распространяющихся навстречу друг другу. Лишь в некоторых, обсуждавшихся выше, специальных случаях стационарных волн происходит захват гармоники уединенной волной накачки и образование связанного состояния двух солитонов. Таким образом, при численном анализе необходимо решить задачу о самосогласованном переносе краевых условий для фундаментальной волны и гармоники по трассам распространения во встречных направлениях. Определенная трудность состоит в том, что на задней грани образца известно лишь краевое условие в виде падающего импульса накачки. Наоборот, для гармоники известно лишь краевое условие на границе образца с координатой $z = 0$. Поскольку через переднюю грань нет потока энергии на утроенной частоте, из физических соображений правильным будет выбрать граничное условие для гармоники нулевым при $z = 0$.

В качестве решения проблемы предлагается итерационный алгоритм, согласно которому уравнения системы (4) расцепляются. При первом проходе от

задней плоскости образца к передней распространяется волна накачки согласно (4а) с нулевой гармоникой. Затем с передней грани стартует с нулевым граничным условием решение уравнения (4б), используя уже вычисленное поле накачки. Процесс повторяется с выходом гармоники на заднюю грань образца. Итерационный процесс можно оборвать, когда отличия решений на последовательных итерациях станут ничтожными. В течение каждого прохода решение уравнений (4а) или (4б) строится по разностному алгоритму типа схемы Кранка–Никольсона с контролем сходимости внутренних итераций и общим контролем сходимости по физическому условию модифицированного закона Мэнли–Роу.

В простом примере (рис. 3), когда выполнено условие фазового синхронизма, а дисперсией групповых скоростей и нелинейной фазовой модуляцией пренебрегается, отчетливо демонстрируется эффект разбегания импульсов фундаментальной волны и гармоники из-за различия их групповых скоростей. Центр тяжести импульса фундаментальной волны неподвижен на оси «замедленного» времени τ (рис. 3а), а сам импульс распространяется без временного уширения. Большая часть энергии гармоники (рис. 3б) в результате взаимодействия с накачкой распространяется по той же характеристике, что и волна низкой частоты. Однако, несмотря на то, что в условиях точного фазового синхронизма преобразование в гармонику довольно эффективно (рис. 3в), из области вблизи передней плоскости метасреды, где гармоника еще мала, возникает излучение линейной слабой волны вдоль характеристики третьей гармоники (рис. 3г). В результате профиль волны утроенной частоты приобретает временной хвост. За счет увеличения длительности импульса гармоники энергии фундаментальной волны и третьей гармоники на входе в среду могут даже сравняться (рис. 3в). В условиях нарушения фазового синхронизма, когда $|\Delta| > 1$ (рис. 3д), сигнал гармоники, по крайней мере, для умеренных значений амплитуды накачки ($\epsilon_{1a} \leq 1$), подобным образом ослабляется, так же как убывает эффективность преобразования в гармонику.

Закономерно, что добавление к рассматриваемой модели нелинейных слагаемых с коэффициентами $q_{1,3}$, $r_{1,3}$ (рис. 4), отвечающих за нелинейную фазовую модуляцию, вызывает появление на временном профиле взаимодействующих импульсов накачки и гармоники узких максимумов (рис. 4а, б, рис. 5а, б), характерных для керровского самосжатия импульсов в оптическом волокне [50]. Интересно, что возникновение пиковой структуры захвати-

ло и контур волны, отделяющейся от основного импульса гармоники в результате процесса разбегания (рис. 4б, г). Возникновение волн пространственной модуляции, начинающихся на разных участках временного профиля входного импульса накачки, есть признак нелинейных изменений фаз взаимодействующих волн, в том числе и кросс-процесса из-за расщепления в импульсе гармоники, стартующего на передней границе среды в сторону выходной плоскости с нулевого уровня (рис. 4а, б, рис. 5а, б). В результате временная форма выходного импульса оказывается изрезанной двумя и возможно большим числом максимумов (рис. 4а, рис. 5а). Эффекты нелинейной фазовой авто- и кросс-модуляции, повлияв на временную форму импульсов накачки и фундаментальной волны, изменили ход зависимостей энергии этих волн с глубиной метасреды (рис. 4в), однако интеграл движения в виде модифицированного закона Мэнли–Роу (5) остался неизменным.

Быстрое уменьшение амплитуды волны накачки в глубине сильно диспергирующей метасреды (рис. 5г) обусловлено увеличением длительности уединенной волны (рис. 5д). Из-за малости интенсивности фундаментальной волны в глубине метаматериала интенсивность гармоники у передней грани образца также мала. Как и в предыдущих, бездисперсионных случаях, из области, совпадающей с трассой волны накачки, вследствие эффекта разбегания возникает излучение вдоль другой характеристики. Замечательно, что выраженная модуляция поля излучения (рис. 5е) имеет неосцилляторный характер, что можно было бы ожидать от дополнительного подключения к численному анализу эффекта дисперсии групповых скоростей (рис. 5б, е). (Небольшие осцилляции на периферии области вычислений есть артефакт из-за отражения уединенной волны от жесткой границы расчетной сетки.) На пространственно-временной карте процесса ГТГ в градациях серого цвета (рис. 5жс) видно, что поле излучения разбивается на последовательность уединенных волн, стартующих из области распространения основного импульса гармоники, причем длительность формируемых слабых сигналов и их скважность убывают к задней границе среды. Как видно по временному контуру импульса третьей гармоники, вышедшему на координату $z = l$ метасреды, эти сигналы имеют правильную колоколообразную форму. Ясно, что при увеличении толщины образца всплески на контуре разовьются в отдельные импульсы.

В целом динамика такого многопараметрового процесса ГТГ довольно сложна. Прежде все-

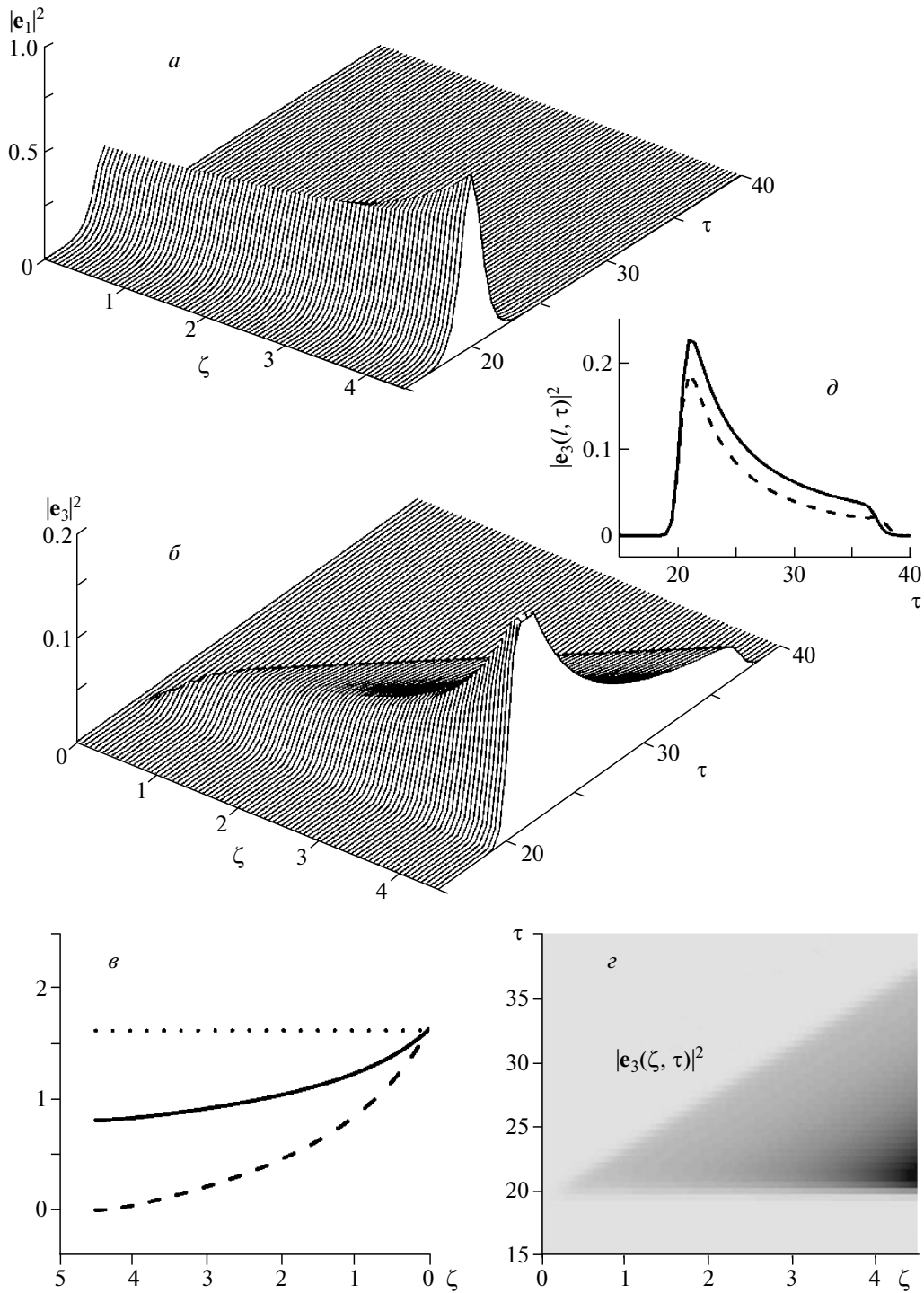


Рис. 3. Эффект ГТГ без учета дисперсии групповых скоростей и нелинейной фазовой модуляции. $\sigma = 0, \beta = 0, \theta = 2, \delta = 4, e_{1a} = 0.9$, длительность импульса накачки $\tau_{p1} = 1$. Для рис. а, б, в, г $\Delta = 0, \gamma = -3$. На рис. в сплошная линия — энергия накачки, штриховая — энергия гармоники, пунктирная — соотношение (5) (закон Мэнли–Роу). На рис. д $\Delta = 0$ (сплошная линия), ± 3.0 (штриховая)

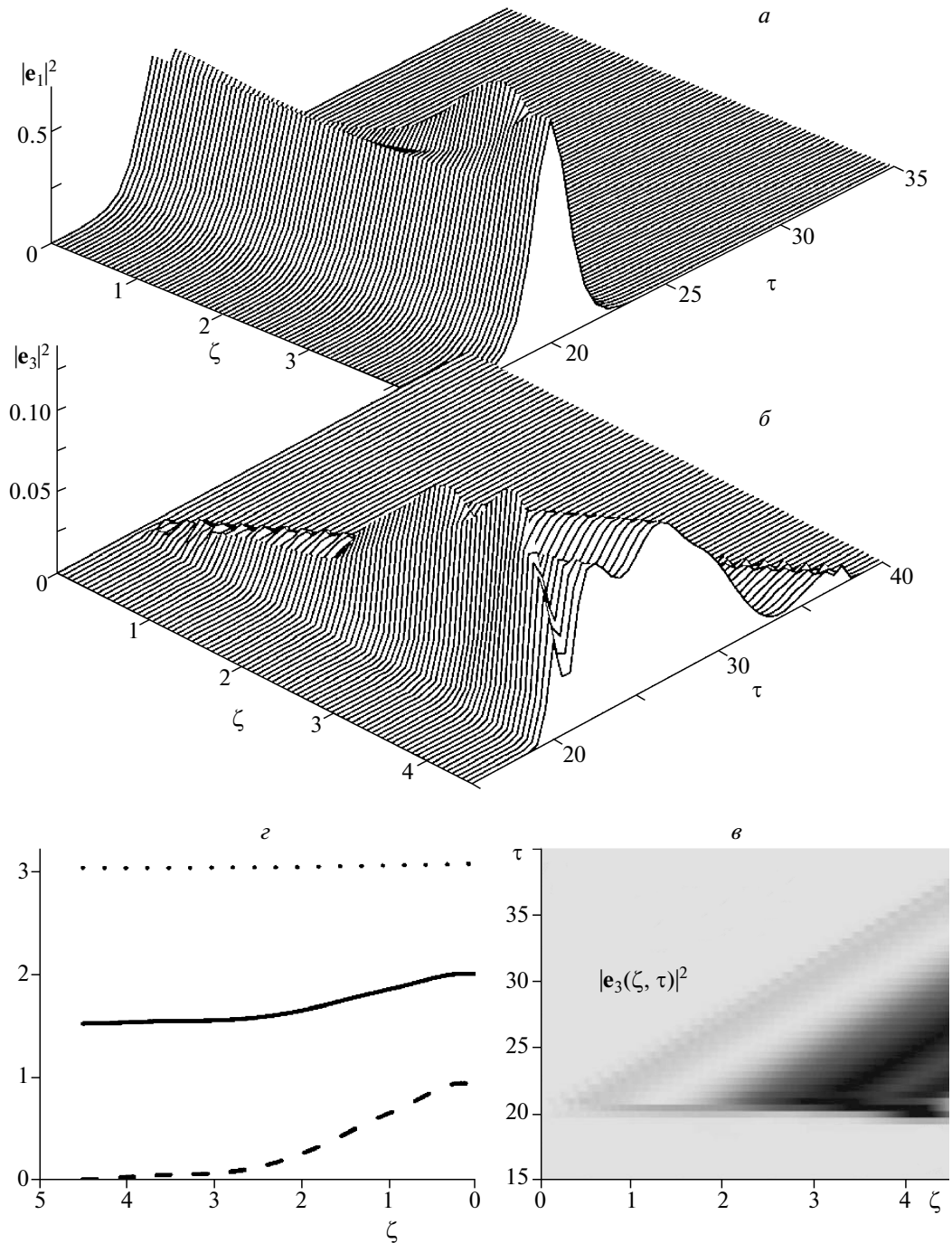


Рис. 4. Влияние эффектов нелинейной фазовой модуляции на процесс ГТГ в «лево-правой» среде. $\sigma = 0$, $\beta = 0$, $\Delta = -3$, $\gamma = -6$, $\theta = 2$, $\delta = 4$, $q_1 = 3$, $r_1 = 6$, $q_3 = 3$, $r_3 = 6$, $e_{1a} = 1$, $\tau_{p1} = 1$. На рис. в сплошная линия — энергия накачки, штриховая — энергия гармоники, пунктирная — соотношение (5) (закон Мэнли–Роу)

го, надо вновь упомянуть уменьшение интенсивности гармоники вследствие дисперсионного расплывания и ослабления накачки в глубине среды. Пространственно-временное распределение интенсивно-

сти гармоники при точном фазовом синхронизме и при отсутствии нелинейной фазовой модуляции дает точно ту же картину (здесь не показано), но при значительно меньших уровнях интенсивности.

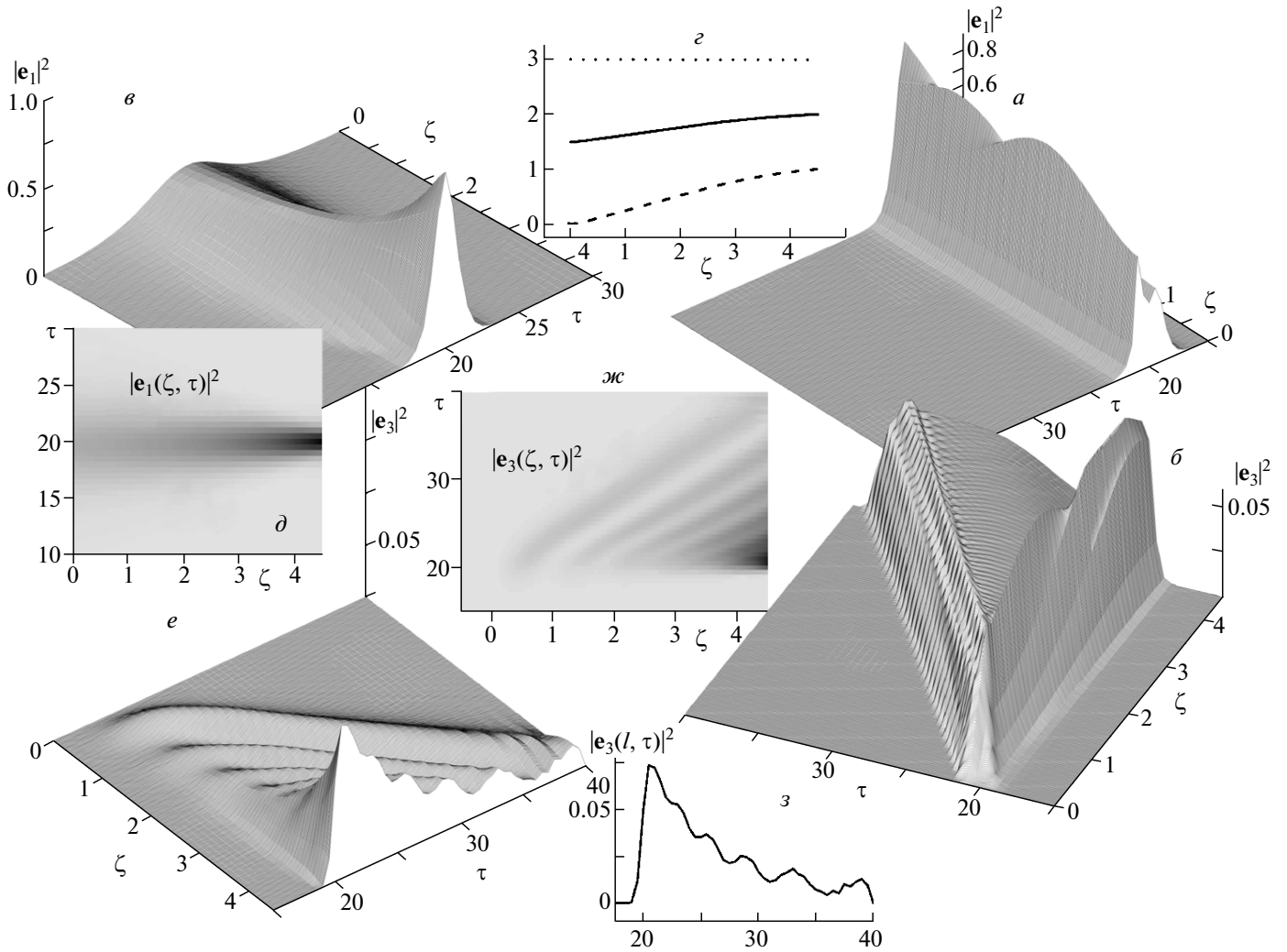


Рис. 5. Влияние дисперсии групповых скоростей второго порядка на эффект ГТГ. Для всех графиков на рисунке: $\theta = 2, \delta = 4, q_1 = 1, r_1 = 1, q_3 = 6, r_3 = 6, e_{1a} = 1, \tau_{p1} = 1$; для рис. *а, б, в*: $\Delta = -3, \gamma = -6, \sigma = 0, \beta = 0$; *г, д, е, ж*: $\Delta = -3, \gamma = -6, \sigma = -2, \beta = -2$; *з*: $\Delta = 0, \gamma = -3, \sigma = -2, \beta = -2$. На рис. *в* сплошная линия — энергия накачки, штриховая — энергия гармоники, пунктирная — соотношение (5) (закон Мэнли-Роу)

Вследствие малости гармоники по сравнению с интенсивностью накачки можно считать, что качественно выполнено приближение заданного поля накачки. Далее, в качестве гипотезы можно предположить, что источником для цепочки уединенных сигналов являются максимумы интенсивности, появившиеся в области распространения основного импульса гармоники как результат пространственной модуляции амплитуды. Такой процесс формируется в условиях сильной отстройки от фазового синхронизма [51] в заданном поле накачки. Однако, как показали расчеты, появление многоимпульсной простран-

ственно-временной структуры будет иметь место и при условии $\Delta = 0$ (рис. 5з), хотя количество пиков на контуре импульса гармоники уменьшилось. Можно предположить, что эффективная отстройка от фазового синхронизма и инициирование пространственной пульсации интенсивности обеспечивается довольно сильными керровскими процессами в фазовой модуляции связанных волн. Косвенным образом об этом свидетельствует увеличение пространственной частоты модуляционных всплесков по мере распространения волны гармоники от задней плоскости сред назад к входной плоскости (рис. 5е, ж).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе аналитически и методами численного анализа исследована нестационарная ГТГ в среде, электромагнитные свойства которой допускают изменение знака показателя преломления в некоторой полосе частот. Рассмотрен случай, когда волна накачки распространяется в отрицательно преломляющей среде, где поток энергии и фазовая скорость имеют противоположные направления. В приближении непрерывного излучения и в приближении стационарных импульсов удалось установить закономерности, сходные с соответствующими режимами распространения в средах с положительным показателем преломления: существует аналог соотношения Мэнли–Роу, возможно возникновение связанного состояния фундаментальной волны и волны гармоники в виде уединенных импульсов. Показано, что уравнения модели при определенных предположениях имеют периодические решения в виде кноидальных волн. Отличительной особенностью рассмотренной модели от процессов ГТГ в средах с положительным преломлением является наличие не исчезающего эффекта разбегания импульсов фундаментальной волны и гармоники из-за различия их групповых скоростей. Этот эффект хорошо заметен при численном анализе переходных процессов ГТГ на встречных направлениях групповых скоростей параметрически связанных волн. Для полноты модели в компьютерном моделировании были учтены фазовая модуляция керровского типа и дисперсия групповых скоростей взаимодействующих волн. Совокупное действие перечисленных эффектов выявило богатую динамику процесса ГТГ, включая не только ожидаемую пиковую структуру на временном контуре накачки из-за керровского самосжатия, но и формирование во временной шкале цуга хорошо выраженных импульсов, излучаемых из области формирования импульса гармоники. В заключение надо добавить, что аналитические и численные подходы, аналогичные тем, которые применялись в данной работе, были использованы нами и для анализа переходных и стационарных эффектов при ГВГ в положительно-отрицательно преломляющей среде. Полученные результаты, наряду с общими с ГТГ чертами, имеют ряд интересных особенностей, особенно при отходе от условия фазового синхронизма. В целом исследование импульсной ГВГ может существенно дополнить результаты, полученные в работах [36–42].

Благодарим А. М. Башарова за полезные дискуссии. Один из авторов (А. И. М.) выражает бла-

годарность Департаменту математики Университета Аризоны за поддержку и гостеприимство в период выполнения настоящего исследования. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00701-а) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Веселаго, УФН **92**, 517 (1967), **173**, 790 (2003).
2. J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4773 (1996).
3. J. B. Smith and N. Kroll, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2933 (2000).
4. J. B. Pendry, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000).
5. J. B. Pendry, *Contemp. Phys.* **45**, 191 (2004).
6. S. A. Ramakrishna, *Rep. Progr. Phys.* **68**, 449 (2005).
7. N. M. Litchinitser, I. R. Gabitov, A. I. Maimistov et al., in *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf (2008), Vol. 51, p. 1.
8. V. M. Shalaev, *Nature Photonics* **1**, 41 (2007).
9. D. R. Smith and J. B. Pendry, *J. Opt. Soc. Amer. B* **23**, 391 (2006).
10. R. W. Ziolkowski and E. Heyman, *Phys. Rev. B* **64**, 056625 (2001).
11. A. A. Zharov, I. V. Shadrivov, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 037401 (2003).
12. J. F. Woodley, M. S. Wheeler, and M. Mojahedi, *Phys. Rev. E* **71**, 066605 (2005).
13. Л. И. Мандельштам, ЖЭТФ **15**, 475 (1945).
14. V. M. Agranovich, Y. R. Shen, R. H. Baughman et al., *Phys. Rev. B* **69**, 165112 (2004).
15. В. М. Агранович, УФН **174**, 683 (2004).
16. V. P. Drachev, W. Cai, U. Chettiar, H.-K. Yuan, A. K. Sarychev, A. V. Kildishev, G. Klimeck, and V. M. Shalaev, *Laser Phys. Lett.* **3**, 49 (2006).
17. V. M. Shalaev, W. Cai, U. Chettiar, H.-K. Yuan, A. K. Sarychev, V. P. Drachev, and A. V. Kildishev, *Opt. Lett.* **30**, 3356 (2005).
18. W. Cai, U. K. Chettiar, H.-K. Yuan, V. C. de Silva, A. V. Kildishev, V. P. Drachev, and V. M. Shalaev, *Opt. Express* **15**, 3333 (2007).

19. I. V. Shadrivov, *Photonics Nanostruct.: Fundam. Appl.* **2**, 175 (2004).
20. S. A. Darmanyan, M. Neviere, and A. A. Zakhidov, *Phys. Rev. E* **72**, 036615 (2005).
21. S. A. Darmanyan, A. Kobayakov, and D. Q. Chowdhury, *Phys. Lett. A* **363**, 159 (2007).
22. R. S. Hegde and H. G. Winful, *Microwave and Opt. Technol. Lett.* **46**, 528 (2005).
23. M. W. Feise, I. V. Shadrivov, and Yu. S. Kivshar, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 1451 (2004).
24. M. W. Feise, I. V. Shadrivov, and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. E* **71**, 037602 (2005).
25. Tao Pan, Chaojun Tang, Lei Gao, and Zhenya Li, *Phys. Lett. A* **337**, 473 (2005).
26. N. M. Litchinitser, I. R. Gabitov, A. I. Maimistov, and V. M. Shalaev, *Opt. Lett.* **32**, 151 (2007).
27. R. S. Hegde and H. G. Winful, *Opt. Lett.* **30**, 1852 (2005).
28. S. M. Wang, C. J. Tang, T. Pan, and L. Gao, *Phys. Lett. A* **348**, 424 (2006).
29. S. M. Wang and L. Gao, *Opt. Comm.* **267**, 197 (2006).
30. A. Namdar, *Opt. Comm.* **278**, 194 (2006).
31. N. M. Litchinitser, I. R. Gabitov, and A. I. Maimistov, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 13902 (2007).
32. А. И. Маймистов, И. Р. Габитов, Н. М. Личиницер, *Опт. и спектр.* **104**, 292 (2008).
33. E. V. Kazantseva, A. I. Maimistov, and S. S. Ozhenko, *Phys. Rev. A* **80**, 043833 (2009).
34. А. И. Маймистов, С. О. Елютин, С. С. Оженко, *Оптич. ж.* **75**, 21 (2008).
35. A. K. Popov and V. M. Shalaev, *Opt. Lett.* **31**, 2169 (2006).
36. A. K. Popov and S. A. Myslivets, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 191117 (2008).
37. R. R. A. Syms, L. Solymar, and I. R. Young, *Metamaterials* **2**, 122 (2008).
38. I. V. Shadrivov, A. A. Zharov, and Yu. S. Kivshar, *J. Opt. Soc. Amer. B* **23**, 529 (2006).
39. A. K. Popov and V. M. Shalaev, *Appl. Phys. B* **84**, 131 (2006).
40. A. K. Popov, V. V. Slabko, and V. M. Shalaev, *Laser Phys. Lett.* **3**, 293 (2006).
41. G. D'Aguzzo, N. Mattiucci, M. Scalora, and M. J. Bloemer, *Phys. Rev. E* **74**, 026608 (2006).
42. M. Scalora, G. D'Aguzzo, M. Bloemer et al., *Opt. Express* **14**, 4746 (2006).
43. V. Roppo, M. Centini, Concita Sibilio et al., *Phys. Rev. A* **76**, 033829 (2007).
44. E. Centeno and C. Ciraci, *Phys. Rev. B* **78**, 235101 (2008).
45. А. И. Маймистов, И. Р. Габитов, Е. В. Казанцева, *Опт. и спектр.* **102**, 99 (2007).
46. E. Kim, F. Wang, W. Wu et al., *Phys. Rev. B* **78**, 113102 (2008).
47. J. M. Manley and H. E. Rowe, *Proc. IRE* **47**, 2115 (1959).
48. A. I. Maimistov and I. R. Gabitov, *Eur. Phys. J. Special Topics* **147**, 265 (2007).
49. M. W. Klein, M. Wegener, N. Feth et al., *Opt. Express* **15**, 5238 (2007).
50. S. O. Elyutin, *Phys. Rev. A* **78**, 013821 (2008).
51. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London (1999), pp. 481–487.