ЖЭТФ, 2010, том 138, вып. 2 (8), стр. 373–380

ОБЫЧНЫЕ СКВИД-ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ И ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ НА ВОЛНАХ МАТЕРИИ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ: РОЛЬ КВАНТОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

А. И. Головашкин [a], *Л. Н. Жерихина* [a*], *А. М. Цховребов* [a], *Г. Н. Измайлов* [b], *В. В. Озолин* [b]

[a] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 119991, Москва, Россия*

[b] *Московский авиационный институт (государственный технический университет) 119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 октября 2009 г.

При сопоставлении действия квантового интерферометра на волнах материи в сверхтекучем гелии (He-СКВИД) с обычным интерферометром на постоянном токе (dc-СКВИД) оценивается ограничение их разрешающей способности, отвечающее квантовым флуктуациям. Рассматривается альтернативный режим функционирования интерферометра как единой макроквантовой системы.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Первые сверхпроводящие квантовые интерферометры постоянного тока (dc-СКВИД) появились в конце 60-х гг. прошлого века [1–3], т. е. примерно через 5–7 лет после теоретического предсказания [4] и экспериментального обнаружения [5] эффекта Джозефсона [6–8]. Принцип действия dc-СКВИД-интерферометра хорошо известен [9–11]: токи $I_{J1} = I_{c1}\sin\Delta\varphi_1$ и $I_{J2} = I_{c2}\sin\Delta\varphi_2$, текущие в плечах интерферометра, которые представляют собой правую и левую половинки сверхпроводящего кольца, складываются с учетом разности фаз на джозефсоновских туннельных барьерах, включенных в каждое из плеч,

$$I_{J\Sigma} = I_{c1}\sin\Delta\varphi_1 + I_{c2}\sin\Delta\varphi_2 = \\ = 2I_c\cos\left(\frac{\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2}{2}\right)\sin\chi,$$

$$\chi = \frac{\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2}{2}, \quad I_{c1} = I_{c2} = I_c.$$

Вместо «индивидуального» джозефсоновского критического тока I_{c1} или I_{c2}, превышение которого приводит к появлению ненулевой разности потенциалов на соответствующем туннельном барьере, результирующее значение критического тока двуплечевого интерферометра зависит от суммы набегов фаз на барьерах,

$$I_{c\Sigma} = 2I_c\cos\left(\frac{\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2}{2}\right)$$

с учетом знаков $\Delta\varphi_{1,2}$ по отношению к направлению обхода контура. Если от верхнего к нижнему

*E-mail: zherikh@sci.lebedev.ru

полюсу кольца (рис. 1, справа) пропустить ток, значение которого превышает максимальный результирующий критический ток $I > I_{c\Sigma}$, то периодическая фазовая зависимость критического тока интерферометра $I_{c\Sigma} = I_{c\Sigma}(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)$ отобразится в периодическую зависимость разности потенциалов между полюсами от суммарной разности фаз, «набираемой» при обходе кольца,

$$U \approx (I - I_{c\Sigma}(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2))\,\frac{R_N}{2},$$

где R_N — сопротивление туннельных барьеров в нормальном состоянии. Набегу квантовомеханической фазы при обходе кольца dc-СКВИДа отвечает интегрирование канонического импульса, включающего вектор-потенциал магнитного поля

$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = \frac{1}{\hbar}\oint(\mathbf{p} + 2e\mathbf{A})\,d\mathbf{r}.$$

В соответствии с теоремой Стокса

$$\oint \mathbf{A}\,d\mathbf{r} = \iint \operatorname{rot}\mathbf{A}\,dx\,dy = \int \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = \Phi$$

интегрирование сводит фазовую зависимость результирующего критического тока к зависимости

$$I_{c\Sigma} = 2I_c\cos\left(\frac{2\Phi e}{\hbar}\right) = 2I_c\cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right),$$

осциллирующей с периодом, равным кванту магнитного потока

$$\Phi_0 = \pi\hbar/e = 2.07\cdot10^{-15}\ \text{Вб}.$$

Считая число полных осцилляций разности потенциалов между верхним и нижним полюсами кольца, отвечающих изменению магнитного поля внутри кольца, можно определить изменение магнитного потока в квантовых единицах, а при использовании СКВИД-интерферометра в качестве нуль-индикатора, включенного в систему интегрирующей отрицательной обратной связи, — измерять поток в долях кванта. На практике чувствительность современного коммерческого dc-СКВИДа составляет значение порядка $\langle\delta\Phi\rangle = 10^{-5}\Phi_0$ Гц$^{-1/2}$ [12], что позволяет решать различные задачи, связанные с измерением слабых магнитных полей [10, 11], включая исследования биомагнитной активности мозга.

Для сверхпроводников осцилляционная зависимость туннельного тока была получена Джозефсоном при анализе процесса прохождения куперовских пар через барьер. Первоначально [4] задача решалась при помощи канонического преобразования операторов боголюбовских квазичастиц, учитывающего наличие разности химических потенциалов по обе стороны барьера $\Delta\mu = 2e\Delta U$. Таким образом, Джозефсон перешел в представление взаимодействия, позволившее исключить химические потенциалы непосредственно из гамильтониана ценой введения их в мнимые показатели степени экспонент, осуществляющих каноническое преобразование. Именно эти мнимые показатели, пропорциональные проинтегрированной по времени суммарной разности химических потенциалов, обеспечивают осцилляции туннельного тока в нестационарном эффекте Джозефсона,

$$I_J(t) = I_c\sin\Delta\varphi = I_c\sin\omega t, \quad \omega t = \frac{1}{\hbar}\int\Delta\mu\,dt + \varphi_0,$$

открытом в работе [13]. Полное решение задачи включает обобщение зависимости туннельного тока $I_J = I_c\sin\Delta\varphi$ от разности фаз, которая содержит также и пространственную компоненту

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_t + \Delta\varphi_r = \frac{1}{\hbar}\int(2e\Delta U\,dt + 2eA\,dr) + \varphi_0,$$

отвечающую стационарному эффекту Джозефсона.

В случае сверхтекучего ^{4}He нестационарный эффект Джозефсона («квантовый свист» [14]) был обнаружен в эксперименте фактически при отсутствии четкой микроскопической теории. Предсказание эффекта в ^{4}He опиралось в основном на качественную аналогию сверхтекучести и сверхпроводимости. В то же время, теория, подобная предложенной в первых работах Джозефсона, по-видимому, может быть построена и для сверхтекучего ^{4}He, если воспользоваться представлением квазичастиц, отвечающих преобразованию Боголюбова гамильтониана взаимодействующей бозе-системы [15, 16]. При этом разность химических потенциалов, которая в представлении взаимодействия [17, 18] исключается из гамильтониана ценой введения в мнимые показатели степени экспонент, осуществляющих каноническое преобразование, складывается здесь из разности температур и давлений по обе стороны джозефсоновского перехода,

$$\Delta\mu = \frac{s_{^4\mathrm{He}}\Delta T + \Delta P}{n_{^4\mathrm{He}}},$$

где $s_{^4\mathrm{He}} = S_{^4\mathrm{He}}/V$ — удельная энтропия ^{4}He, а $n_{^4\mathrm{He}} = N_{^4\mathrm{He}}/V$ — его концентрация [19]. По аналогии со случаем когерентного туннелирования куперовских пар такое каноническое преобразование должно приводить к синусоидальной зависимости потока сверхтекучего гелия через джозефсоновский элемент $I_J^{^4\mathrm{He}} = I_c^{^4\mathrm{He}}\sin(t\Delta\mu/\hbar)$.

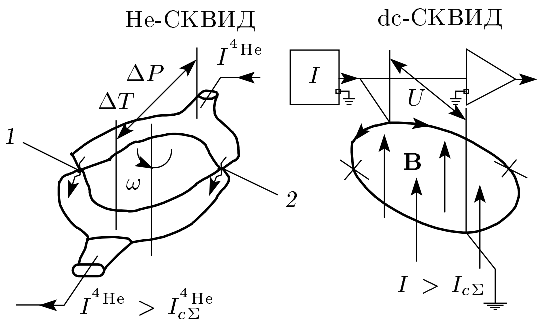

Рис. 1. Справа — обычный сверхпроводящий dc-СКВИД (крестики — джозефсоновские переходы). Слева — He-СКВИД, сверхтекучий аналог dc-СКВИДа (*1, 2* — джозефсоновские элементы)

Полного аналога туннельного барьера для сверхтекучего гелия не существует, однако здесь имеется аналог мостика Даема [20], сверхпроводящий ток через который зависит от разности фаз куперовского конденсата в соответствии с основной формулой эффекта Джозефсона $I_J = I_c \sin\Delta\varphi$. Мостик Даема представляет собой микроскопическое сужение сверхпроводника с характерными размерами порядка длины корреляции, а роль его аналога для сверхтекучего гелия играет сужение канала (нанодроссель), размер которого должен быть порядка корреляционного параметра ^{4}He ниже λ-точки ($T_\lambda = 2.17$ K).

Как известно [21], общая теория фазовых переходов может быть построена, исходя из условий устойчивости, примененных к свободной энергии системы, моделируемой функционалом Ландау

$$F\{\phi(\mathbf{r})\} = \int \left\{ \frac{1}{2}\kappa(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{T}{T_c} - 1\right)\phi^2 + \right. \left. + \frac{1}{4}b\phi^4 + h\phi \right\} dV + F_0.$$

Первое слагаемое в этой феноменологической модели (градиентный член) отвечает предположению, что доминируют здесь слабые длинноволновые флуктуации; второе слагаемое в функционале соответствует энтропийному вкладу; третье — межчастичному взаимодействию, а последнее — взаимодействию с внешнем полем. Вблизи температуры фазового перехода $T < T_c$, когда параметр порядка ϕ мал, минимуму свободной энергии отвечает нулевая сумма первого и второго слагаемых

$$\alpha\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)\phi^2 = \kappa(\nabla\phi)^2 \approx \frac{\kappa\phi^2}{r_{corr}^2}.$$

Таким образом, корреляционная длина системы имеет значение

$$r_{corr} \approx \sqrt{\frac{\kappa T_c}{\alpha(T_c - T)}}\ .$$

Именно рост корреляционной длины в сверхтекучем ^{4}He при $T \to T_c$ позволяет использовать для реализации эффекта Джозефсона в ^{4}He дроссели с характерными размерами 50–70 нм вместо 0.1 нм $\approx r_{corr}(T = 0) = \sqrt{\kappa/\alpha}$ [22, 23]. На практике (http://www.physics.berkeley.edu/research/packard/) «джозефсоновский режим» на дросселе с примерно такими размерами обеспечивается отстройкой рабочей температуры на 5 мК от температуры λ-перехода. Это условие задает очень высокие требования к системе стабилизации температур [24]. В первых экспериментах со сверхтекучим ^{4}He [25, 26] в качестве джозефсоновского элемента использовалось отверстие радиусом 10 мкм в тонкой металлической фольге, а в современных исследованиях [14, 27, 28] используются матрицы из $N \approx 4000$ упорядоченно расположенных отверстий, что, по-видимому, за счет эффекта интерференционного сложения позволяет пропорционально $\sqrt{N}$ ослабить относительный вклад фазовых флуктуаций.

В сверхтекучем гелии прямым аналогом нестационарного эффекта Джозефсона, наблюдаемого в сверхпроводниках, оказывается эффект «квантового свиста» [14]. Если в первом случае, прикладывая к джозефсоновскому переходу разность потенциалов ΔU, мы заставляем сверхпроводящий ток осциллировать:

$$I_J = I_c \sin\frac{2e\Delta U}{\hbar}t$$

и можем при этом зафиксировать излучение, генерируемое переходом на частоте

$$f\ [\text{МГц}] = \frac{e}{\pi\hbar}\Delta U = \Phi_0^{-1}\Delta U \approx 483\Delta U\ [\text{мкВ}],$$

то во втором случае, прикладывая к джозефсоновскому элементу разность давлений ΔP, мы заставляем поток ^{4}He, текущий через канал, осциллировать и фиксируем звук («квантовый свист»), генерируемый элементом на частоте

$$f\ [\text{кГц}] = (2\pi\hbar n_{^4\mathrm{He}})^{-1}\Delta P \approx 93.7\Delta P\ [\text{Па}].$$

Как видно, частота генерируемого звука пропорциональна разности давлений, что позволяет использовать описанный эффект для измерения ΔP, в том числе «на выходе» квантового интерферометра на волнах материи в сверхтекучем ^{4}He.

2. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРА НА ВОЛНАХ МАТЕРИИ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ

Действие квантового интерферометра со сверхтекучим ^{4}He, называемого He-СКВИД (рис. 1), основано на эффекте Джозефсона, когда в синусоидальной зависимости потока гелия

$$I_J^{^4\mathrm{He}} = I_c^{^4\mathrm{He}} \sin\Delta\varphi$$

наряду с временной учитывается и пространственная компонента разности фаз

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_t + \Delta\varphi_r = \frac{1}{\hbar}\int(\Delta\mu\,dt + p\,dr) + \varphi_0.$$

Соответственно

$$\Delta\varphi_t = \frac{1}{\hbar}\int\Delta\mu\,dt = \frac{1}{\hbar}\int\frac{(s_{^4\mathrm{He}}\Delta T + \Delta P)\,dt}{n_{^4\mathrm{He}}}$$

отвечает нестационарному эффекту Джозефсона в сверхтекучем ^{4}He, а

$$\Delta\varphi_r = \frac{1}{\hbar}\int p\,dr$$

— стационарному эффекту, который позволяет управлять интерференцией волн материи, изменяя момент количества движения атомов ^{4}He в кольцевом канале He-СКВИДа, включающем (по аналогии с dc-СКВИДом) два джозефсоновских элемента (либо отдельные нанодроссели либо пару матриц, состоящих из большого их числа). При расчете пространственной составляющей разности фаз $\Delta\varphi_r = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2$, складывающейся соответственно из разности на первом и втором джозефсоновских элементах, включенных в кольцевой канал He-СКВИДа, может быть использована теорема Стокса аналогично тому, как это было сделано выше для dc-СКВИДа. Применяя теорему Стокса для определения набега фазы в канале He-СКВИДа, отвечающего механическому вращению, и имея в виду, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, получим

$$\Delta\varphi_r = \frac{1}{\hbar}\oint\mathbf{p}\,d\mathbf{r} = \frac{m_{^4\mathrm{He}}}{\hbar}\oint\mathbf{v}\,d\mathbf{r} = \frac{m_{^4\mathrm{He}}}{\hbar}\times$$
$$\times\iint\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{S} = \frac{m_{^4\mathrm{He}}}{\hbar}\iint 2\boldsymbol{\omega}\,d\mathbf{S} = \frac{2m_{^4\mathrm{He}}}{\hbar}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{S}).$$

Набег фазы может быть также выражен через момент количества движения атома гелия $\ell_{^4\mathrm{He}}$ в кольцевом канале

$$\Delta\varphi_r = \frac{m_{^4\mathrm{He}}}{\hbar}\iint 2\omega\,dS = \frac{m_{^4\mathrm{He}}}{\hbar}\mathbf{r}\times\int_0^r\omega\,d\mathbf{r} =$$
$$= \frac{m_{^4\mathrm{He}}}{\hbar}\mathbf{r}\times\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar}\mathbf{r}\times\mathbf{p}_{^4\mathrm{He}} = \frac{\ell_{^4\mathrm{He}}}{\hbar},$$

имея в виду, что

$$dS = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times d\mathbf{r}.$$

При этом набег фазы выражается через полный момент количества движения $\Lambda_{^4\mathrm{He}}$ всех $N_{^4\mathrm{He}}$ атомов ^{4}He в канале He-СКВИДа как

$$\Delta\varphi_r = \frac{N_{^4\mathrm{He}}\ell_{^4\mathrm{He}}}{N_{^4\mathrm{He}}\hbar} = \frac{\Lambda_{^4\mathrm{He}}}{N_{^4\mathrm{He}}\hbar}.$$

Сложение двух потоков сверхтекучего гелия в нижнем полюсе кольцевого канала He-СКВИДа (рис. 1, слева) с учетом набега фаз на первом и втором джозефсоновских элементах показывает, что значение критического тока двуплечевого интерферометра зависит от суммарной разности фаз

$$I_{c\Sigma}^{^4\mathrm{He}} = 2I_c^{^4\mathrm{He}} = \cos\left(\frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2}{2}\right)$$

аналогично тому, как это имело место для dc-СКВИДа. При этом суммарная разность фаз

$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_r = \frac{2m_{^4\mathrm{He}}}{\hbar}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{S}) = \frac{\ell_{^4\mathrm{He}}}{\hbar} = \frac{\Lambda_{^4\mathrm{He}}}{N_{^4\mathrm{He}}\hbar}$$

может быть определена либо через скалярное произведение угловой частоты вращения системы координат на площадь кольцевого канала (с периодом зависимости $I_{c\Sigma}^{^4\mathrm{He}}$ равным $\hbar/2m_{^4\mathrm{He}}$), либо выражена через момент количества движения отдельного атома ^{4}He (с периодом зависимости $I_{c\Sigma}^{^4\mathrm{He}}$, равным постоянной Планка $\hbar$), либо через полный момент количества движения всех $N_{^4\mathrm{He}}$ атомов ^{4}He в канале He-СКВИДа (с периодом зависимости $I_{c\Sigma}^{^4\mathrm{He}}$, равным $N_{^4\mathrm{He}}\hbar$). Если пропустить поток ^{4}He от верхнего к нижнему полюсу кольцевого канала, величина которого выше максимального результирующего критического тока

$$I^{^4\mathrm{He}} > I_{c\Sigma}^{^4\mathrm{He}},$$

то периодическая фазовая зависимость результирующего критического потока He-СКВИДа

$$I_{c\Sigma}^{^4\mathrm{He}} = I_{c\Sigma}^{^4\mathrm{He}}(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) \to \Delta P = \Delta P(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)$$

отобразится в периодическую зависимость разности давлений между полюсами от суммарной разности фаз, «набираемой» при обходе кольца. Изменение разности давлений регистрируется [14] посредством измерения частоты «квантового свиста»

$$f\ [\text{кГц}] = (2\pi\hbar n_{^4\mathrm{He}})^{-1}\Delta P \approx 93.7\Delta P\ [\text{Па}],$$

либо может фиксироваться как вариация потока энтропии с помощью парамагнитного калориметра, связанного со СКВИД-интерферометром [29, 30].

Считая число полных осцилляций разности давлений между «верхним» и «нижним» полюсами кольцевого канала, отвечающих изменению параметров механического вращения, можно определить изменение циркуляции скорости сверхтекучего гелия в единицах $\hbar/2m_{^4\mathrm{He}}$, либо изменение момента количества движения отдельного атома ^{4}He в единицах $\hbar$, либо изменение полного момента количества движения всех атомов $N_{^4\mathrm{He}}$ в канале в единицах $N_{^4\mathrm{He}}\hbar$. Технически, по аналогии с обычным СКВИД-интерферометром, перечисленные выше параметры вращения могут регистрироваться и в долях соответствующих квантовых единиц.

3. КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В СКВИД- И He-СКВИД-ИНТЕРФЕРОМЕТРАХ

Нижний предел разрешающей способности СКВИД-интерферометра устанавливается амплитудой квантовых флуктуаций. Электродинамический вклад в полную энергию, отвечающий нулевым колебаниям, составляет $\delta\Phi^2/2L = \hbar\omega/2$, соответственно спектральная плотность и амплитуда квантовых флуктуаций выражаются в виде $\langle\delta\Phi^2\rangle/1$ Гц $= 2\pi\hbar L$, $\delta\Phi = \sqrt{\hbar\omega L}$. Необходимым условием функционирования СКВИД-интерферометра является обеспечение параметров, исключающих возможность размытия интерференционной зависимости. Условие «неразмытия» задается формулой

$$\sqrt{\langle\delta\Phi^2\rangle/1\ \text{Гц}} = \sqrt{2\pi\hbar L} < \Phi_0\ \text{Гц}^{-1/2},$$

что эквивалентно

$$\sqrt{\langle\delta\Phi^2\rangle/1\ \text{Гц}} = \zeta\Phi_0 < \Phi_0\ \text{Гц}^{-1/2},$$

где

$$\zeta = \sqrt{2e\Phi_c/I_c\Phi_0}, \quad \Phi_c = LI_c,$$

L — индуктивность входного контура СКВИД-интерферометра, I_c — критический ток джозефсоновских переходов.

Если из-за слишком большой индуктивности входного контура рабочие токи $I > I_c$ создают поле, самодействие которого обеспечивает вклад в измеряемый магнитный поток, сопоставимый с основным интерференционным периодом $LI_c \approx \Phi_0$, то СКВИД будет «вести себя» как усилитель, охваченный большой положительной обратной связью. Использовать СКВИД в таком многозначном триггерном режиме для измерений, разумеется, невозможно, однако на этой основе в 70-х–80-х гг. прошлого века разрабатывались схемы памяти джозефсоновского компьютера [9, 10].

Если учесть ограничение $LI_c < \Phi_0$, исключающее многозначность сигнальной характеристики СКВИДа, то амплитуда флуктуаций окажется ограничена:

$$\sqrt{\langle\delta\Phi^2\rangle/1\ \text{Гц}} = (2\cdot 10^{-8}\text{–}6\cdot 10^{-7})\Phi_0\ \text{Гц}^{-1/2} \ll \Phi_0\ \text{Гц}^{-1/2}$$

при реалистичных значениях $I_c = 1$ мА–1 мкА. Эти соотношения показывают, почему обычным СКВИД-интерферометром удается фиксировать магнитный поток с точностью до миллионных долей Φ_0 при временах измерения порядка секунды.

Далее рассмотрим флуктуации He-СКВИДа — аналога dc-СКВИДа. Аналогом потока магнитного поля Φ, измеряемого обычным СКВИДом, для He-СКВИДа служит механический момент количества движения $\Lambda_{^4\mathrm{He}}$. Эффект Бома–Ааронова заменяется здесь его квантовогидродинамическим аналогом — эффектом Фейнмана. Вместо Φ_0 роль основного интерференционного периода выполняет квант действия $2\pi\hbar$, передаваемый каждому атому гелия в виде орбитального момента движения. Однако для сверхтекучего гелия нет полного гидродинамического аналога магнитного поля, поэтому у He-СКВИДа отсутствуют эффекты самодействия, приводящие в обычном СКВИДе к многозначности его сигнальной характеристики и ограничениям типа $I_cL < \Phi_0$.

При рассмотрении ограничений разрешающей способности He-СКВИДа следует записать гидродинамический вклад в полную энергию, отвечающий квантовым флуктуациям в его входном контуре: $\delta\Lambda^2/2J = \hbar\omega/2$. Тогда амплитуда и спектральная плотность флуктуаций выражаются в виде $\delta\Lambda = \sqrt{\hbar\omega J}$ и $\langle\delta\Lambda^2\rangle/1$ Гц $= 2\pi\hbar J$. Основной интерференционный период, отвечающий передаче одного кванта действия $2\pi\hbar$ каждому атому гелия во входном контуре, равен $2\pi\hbar N_{^4\mathrm{He}}$, где $N_{^4\mathrm{He}}$ — количество атомов, циркулирующих в контуре. Тогда условие «неразмытия» интерференции, приведенное к единичной полосе частот, задается формулой

$$\sqrt{\langle\delta\Lambda^2\rangle/1\ \text{Гц}} = \sqrt{2\pi\hbar J} < N_{^4\mathrm{He}}\hbar\ \text{Гц}^{-1/2}.$$

При учете $J = r^2 m_{^4\mathrm{He}} N_{^4\mathrm{He}}$ отсюда следует ограничение на количество атомов, циркулирующих во входном контуре He-СКВИДа: $N_{^4\mathrm{He}}/1$ Гц $> 2\pi r^2 m_{^4\mathrm{He}}/\hbar \approx 2\pi r^2\cdot 10^7$ (где $[r] =$ метр). Если ввести обозначение $\zeta = \sqrt{2\pi J/\hbar}$, то $\sqrt{\langle\delta\Lambda^2\rangle/1\ \text{Гц}} = \zeta\hbar < N_{^4\mathrm{He}}\hbar\ \text{Гц}^{-1/2}$. Для $N_{^4\mathrm{He}} = 10^{15}$ атомов (примерно 4 нанограмма или 1/2 наномоля гелия), циркулирующих в торе диаметром 100 мкм с сечением канала 100 мкм^2, получаем

$\zeta < 6 \cdot 10^7$ Гц$^{-1/2}$. При этом среднеквадратичная амплитуда флуктуаций, ограничивающая чувствительность He-СКВИДа в измерениях момента количества движения, составляет $\sqrt{\langle\delta\Lambda^2\rangle/1\ \text{Гц}} = \zeta\hbar \approx$ $\approx 6 \cdot 10^7\hbar$ Гц$^{-1/2}$ (т. е. $6 \cdot 10^{-8}$ от основного периода, равного $N_{^4\mathrm{He}}\hbar$ Гц$^{-1/2} \approx 10^{-19}$ кг $\cdot$ м$^2 \cdot$ с$^{-1} \cdot$ Гц$^{-1/2}$).

Отметим, что именно микроскопические размеры входного контура обеспечивают выполнение необходимых условий сверхвысокой чувствительности He-СКВИДа. К сожалению, при таких ничтожных размерах входной контур не способен «захватить» для измерения достаточно большой момент количества движения и поэтому, обладая фантастической разрешающей способностью, невозможно проводить сверхвысокоточные измерения момента вращения макроскопических систем. Так, в работе [28] интерферометр на сверхтекучем ^{4}He смог «на пределе» разрешить вращение Земли — вообще говоря, эффект и без того довольно заметный. Выход из тупика следует искать на пути создания аналога сверхпроводящего трансформатора потока, который позволит передавать вращающий момент из приемного кольца макроскопических размеров во входной контур He-СКВИДа. Даже в отсутствие прямого гидродинамического аналога магнитного поля [19] в работах [24, 29] нами была предложена конструкция такого «сверхтекучего» трансформатора момента вращения. Сверхтекучий трансформатор представляет собой общую часть рабочего кольца He-СКВИДа и макроскопического измерительного контура трансформатора (рис. 2, $C_2 \cap C_3$). Согласно формулам, описывающим эффект Фейнмана, коэффициент передачи момента (из контура в кольцо) оказывается пропорционален длине их общей части.

В то же время, по-видимому, ничто не запрещает существования макроскопических квантовых эффектов «в строгом смысле», когда именно один квант действия $2\pi\hbar$ приходится на одну степень свободы единой бездиссипативной макроквантовой системы. Разумеется, в «обычном» эксперименте подобные эффекты было бы трудно заметить — момент вращения тора со сверхтекучим ^{4}He на уровне единиц $\hbar$ в полосе 1 Гц, магнитные поля в микронном сверхпроводящем кольце с интерференционным периодом 10^{-14} Тл и т. п. Оставляя в стороне технические проблемы фиксации столь малых величин, рассмотрим основное принципиальное ограничение — условие неразмытия квантовыми флуктуациями минимального интерференционного периода. Как показано выше в «обычном» случае, когда по одному кванту действия $2\pi\hbar$ приходится на каждого отдельного участника бездиссипативного движения (т. е. на каждую куперовскую пару или каждый атом сверхтекучего ^{4}He), неразмытие интерференционного периода обеспечивается с огромным запасом. Однако в случае, когда $2\pi\hbar$ приходится на всю сверхтекучую или сверхпроводящую макроквантовую систему, условие неразмытия квантовыми флуктуациями минимального периода интерференции становится весьма критичным.

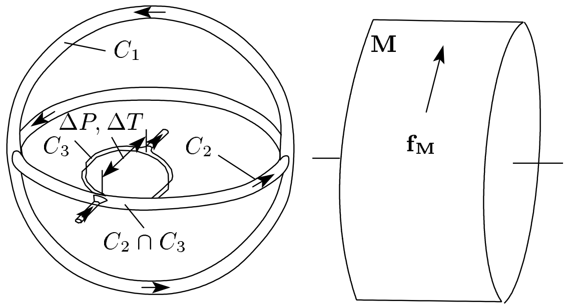

Рис. 2. Схема лабораторной регистрации эффекта Лензе–Тиринга с использованием He-СКВИДа. M — массивное (100 кг) тело, раскручиваемое примерно до $f_M \approx 100$ Гц; C_1 — кольцевая замкнутая трубка (диаметром 1 м) со сверхтекучим ^{4}He, который запасает момент количества движения ($L_1 = 10^{33}\hbar$), передаваемый под действием гравимагнитных сил в контур C_2; $C_2 \cap C_3$ (≈ 30 мкм) — трансформатор момента вращения; C_3 — He-СКВИД, т. е. квантовый интерферометр на волнах материи в сверхтекучем ^{4}He с чувствительностью $\sqrt{\langle\delta\Lambda^2\rangle/1\ \text{Гц}} \approx 6 \cdot 10^7\hbar$ Гц$^{-1/2}$. Ожидаемый эффект порядка $dL_3/dt \approx 5 \cdot 10^5\hbar/c$, а время его накопления $\tau \approx 25$ с

Усредненная в интервале частот $[0, \omega]$ спектральная плотность шума, отвечающего нулевым колебаниям единой макроквантовой системы, в отсутствие у нее собственных резонансных частот записывается в виде $\overline{\rho}_\omega = (\hbar\overline{\omega}/2)/\omega = \hbar/4$, где $\overline{\omega} = \omega/2$ — усредненная по интервалу частота нулевых колебаний. Выражая через среднеквадратичную амплитуду флуктуаций момента количества движения $\langle\delta\ell\rangle$ спектральную плотность $\rho_\omega = \left(\langle\delta\ell\rangle/\sqrt{\omega}\,\right)^2/(2J)$, получим уравнение для оценки амплитуды:

$$\frac{\hbar}{4} = \overline{\rho}_\omega \approx \rho_\omega = \frac{\left(\langle\delta\ell\rangle/\sqrt{\omega}\,\right)^2}{2J} \to \frac{\langle\delta\ell\rangle}{\sqrt{\omega}} = \sqrt{\frac{J\hbar}{2}}\,.$$

Условие неразмытия квантовыми флуктуациями $\langle\delta\ell\rangle$ минимального периода интерференции $2\pi\hbar$ при измерениях на He-СКВИДе с накоплением сигнала в течение одной секунды сводится к $2\pi\hbar > \sqrt{J\hbar/2\ \text{c}}$. Отсюда следует, что значение суммарного момента инерции сверхтекучего ^{4}He в кольце He-СКВИДа не должно превышать $8\pi^2\hbar \approx 8\cdot 10^{-33}$ м$^2\cdot$кг, что с учетом плотности жидкого гелия 120 кг/м^3 выполняется для кольцевого канала диаметром около 0.3 мкм и поперечным сечением 50×50 нм^2.

Аналогично для СКВИДа (когда он представляет собой единую макроквантовую систему), выражая спектральную плотность ρ_ω через среднеквадратичную амплитуду флуктуаций магнитного потока $\rho_\omega = \left(\langle\delta\Phi\rangle/\sqrt{\omega}\,\right)^2/(2L)$, получим уравнение

$$\frac{\hbar}{4} = \rho_\omega = \frac{\left(\langle\delta\Phi\rangle/\sqrt{\omega}\,\right)^2}{2L}$$

и оценку амплитуды флуктуаций $\langle\delta\Phi\rangle/\sqrt{\omega} = \sqrt{L\hbar/2}$. Требование неразмытия квантовыми флуктуациями $\langle\delta\Phi\rangle$ минимального периода интерференции Φ_0/N_{2e} в ходе измерений на СКВИДе с накоплением сигнала в течение 1 с сводится к $\pi\hbar/(eN_{2e}) > \sqrt{L\hbar/2}$ с. У сверхпроводника с плотностью куперовского конденсата 10^{22} см$^{-3}$ это условие выполняется для кольца СКВИДа диаметром около 1 мкм, имеющим поперечное сечение 150×150 нм^2. При этом L кольца оказывается на уровне 0.5 пГн, а количество куперовских пар N_{2e} не должно превышать $4\cdot 10^8$.

Разумеется, процесс изготовления каналов и колец субмикронного размера He-СКВИДа и СКВИДа потребует привлечения методов нанотехнологии. Однако технические трудности во многом «окупаются» возможностью измерений магнитного потока с точностью $2.5\cdot 10^{-9}\Phi_0$ Гц$^{-1/2}$, или возможностью регистрировать переданный момент количества движения в единицах $\hbar$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение коротко рассмотрим примеры применения эффекта Джозефсона в сверхтекучем гелии. Чувствительность измерительной схемы He-СКВИДа, снабженного трансформатором потока вращения, по приведенным выше оценкам оказывается настолько высока, что позволит проводить лабораторное наблюдение эффекта Лензе–Тирринга [31]. Этот фундаментальный эффект отражает релятивистские поправки к силе Кориолиса, которые описываются в рамках ОТО гравимагнитным взаимодействием. На рис. 2 приведена схема эксперимента, в котором бесконтактное гравимагнитное воздействие, индуцируемое вращающимся телом M, перераспределяет циркуляцию сверхтекучего ^{4}He между контурами C_1 и C_2. При этом общий участок C_2 и C_3 образует трансформатор потока вращения, а интерференция регистрируется по периодическому изменению приращения давления или температуры на полюсах контура C_3, которое повторяется в зависимости от режима работы He-СКВИДа либо с периодом $\Delta\Lambda = N_{^4\mathrm{He}}\hbar$, либо равным постоянной Планка.

В качестве примера прикладного использования системы с одним джозефсоновским элементом в сверхтекучем гелии рассмотрим возможность создания параметрического усилителя сверхслабых акустических сигналов на эффекте «квантового свиста» т. е. нестационарном эффекте Джозефсона вблизи λ-точки в ^{4}He. Из выражений для джозефсоновского потока гелия

$$I_J^{^4\mathrm{He}} = I_c^{^4\mathrm{He}} \sin\left(\frac{\Lambda_{^4\mathrm{He}}}{N_{^4\mathrm{He}}\hbar}\right),$$

частоты циркуляции ^{4}He в кольцевом канале

$$\omega = \frac{2\pi I_c^{^4\mathrm{He}}}{N_{^4\mathrm{He}}} = \frac{2\pi I_c^{^4\mathrm{He}}}{N_{^4\mathrm{He}}}\sin\left(\frac{\Lambda_{^4\mathrm{He}}}{N_{^4\mathrm{He}}\hbar}\right)$$

и производной частоты по моменту количества движения гелия

$$\frac{\partial\omega}{\partial\Lambda_{^4\mathrm{He}}} = \frac{2\pi I_c^{^4\mathrm{He}}}{N_{^4\mathrm{He}}^2\hbar}\cos\left(\frac{\Lambda_{^4\mathrm{He}}}{N_{^4\mathrm{He}}\hbar}\right) = \frac{2\pi I_c^{^4\mathrm{He}}}{N_{^4\mathrm{He}}^2\hbar}\cos\Delta\varphi(t)$$

можно определить кинетическую энергию механических колебаний ^{4}He:

$$E_{kin} = \frac{\omega\Lambda_{^4\mathrm{He}}}{2} = \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial\Lambda_{^4\mathrm{He}}}{\partial\omega} = \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{N_{^4\mathrm{He}}^2\hbar}{2\pi I_c^{^4\mathrm{He}}\cos\Delta\varphi(t)}\right) = \frac{\omega^2 J(t)}{2}.$$

Параметрическая модуляция момента инерции

$$J(t) = \frac{N_{^4\mathrm{He}}^2\hbar}{2\pi I_c^{^4\mathrm{He}}\cos\Delta\varphi(t)}$$

в условиях нестационарного эффекта Джозефсона

$$\Delta\varphi(t) = \frac{t\Delta P}{2\pi\hbar n_{^4\mathrm{He}}}$$

позволит «вкачивать» энергию в усиливаемые колебания ^{4}He, аналогично тому, как это делается в одночастотном параметрическом усилителе СВЧ-сигналов с «обычным» джозефсоновским переходом, впервые предложенным в работах [9, 32]. Для создания параметрического усилителя колебаний в ^{4}He джозефсоновский элемент включается в механический резонатор, настроенный на частоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{r m_{^4\mathrm{He}} n_{^4\mathrm{He}}}},$$

где $K = \partial P / \partial x$ — жесткость мембраны, разделяющей кольцевой канал радиуса r, а x — ее смещение из положения равновесия.

Работа выполнена в рамках программы «Сильно коррелированные электроны в полупроводниках, металлах, сверхпроводниках и магнитных материалах».

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Clarke, Phil. Mag. **13**, 155 (1966).
2. A. H. Silver and J. E. Zimmerman, Phys. Rev. **157**, 317 (1967).
3. M. R. Beasley and W. W. Webb, **SPSD**, 1 (1967).
4. B. D. Josephson, Phys. Lett. **1**, 251 (1962).
5. I. Giaever, Phys. Rev. Lett. **5**, 464 (1960).
6. B. D. Josephson, Rev. Mod. Phys. **46**, 251 (1974).
7. P. W. Anderson, Phys. Today **23**, 20 (1970).
8. A. B. Pippard, NASI **76**, 1 (1976).
9. К. К. Лихарев, Б. Т. Ульрих, *Системы с джозефсоновскими контактами*, Изд-во МГУ, Москва (1978), с. 447.
10. А. Бароне, Дж. Патерно, *Эффект Джозефсона — физика и применения*, Мир, Москва (1984), с. 639.
11. J. Clarke, Physics Today **39**, 36 (1986).
12. *Слабая сверхпроводимость*, сб. статей под ред. Б. Б. Шварца, С. Фонера, Мир, Москва (1980), с. 256.
13. И. К. Янсон, В. М. Свистунов, И. М. Дмитриенко, ЖЭТФ **48**, 976 (1965).
14. E. Hoskinson, R. E. Packard, and Th. M. Haard, Nature **433**, 376 (2005).
15. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971), с. 320.
16. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978), с. 447.
17. Дж. Займан, *Современная квантовая теория*, Мир, Москва (1980), с. 286.
18. М. В. Садовский, *Лекции по квантовой теории поля*, Инст. комп. иссл., Москва–Ижевск (2003), с. 480.
19. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва (1978), с. 520.
20. P. W. Anderson and A. H. Dayem, Phys. Rev. Lett. **13**, 195 (1964).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976), с. 583.
22. Ю. Г. Мамаладзе, О. Д. Чешвили, ЖЭТФ **50**, 169 (1966).
23. Р. Фейнман, *Статистическая механика*, Мир, Москва (1975), с. 407.
24. А. И. Головашкин et al., Кр. сообщ. по физике ФИАН, №6, (2006), с. 21.
25. P. L. Richards and P. W. Anderson, Phys. Rev. Lett. **14**, 540 (1965).
26. Д. Р. Тилли, Дж. Тилли, *Сверхтекучесть и сверхпроводимость*, Мир, Москва (1977), с. 304.
27. Y. Sato, E. Hoskinson, and R. E. Packard, Phys. Rev. B **74**, 144502 (2006).
28. Y. Sato, A. Joshi, and R. E. Packard, Appl. Phys. Lett. **91**, 074107 (2007).
29. А. И. Головашкин и др., КЭ **36**, 1168 (2006).
30. A. I. Golovashkin et al., Eur. Phys. J. B **58**, 243 (2007).
31. A. I. Golovashkin et al., *Registration of Gravimagnetism by the* ^{4}He *Superfluid State*, PIRT-2006 Moscow, Liverpool, Sunderland (2006).
32. A. N. Vystavkin et al., Rev. Phys. Appl. **9**, 79 (1974).