

ФЛУКТУАЦИИ ЭНТРОПИИ ЗАПУТАННОСТИ В КВАНТОВЫХ ЦЕПОЧКАХ ИЗИНГА

*М. А. Юрицев**

*Институт проблем химической физики Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 25 февраля 2010 г.

Рассматриваются цепочки Изинга в поперечном магнитном поле постоянной напряженности ($h = 1$) и величиной межспиновых взаимодействий λ . В случае бесконечно длинной цепочки найдены точные аналитические формулы для второго центрального момента (дисперсии) оператора энтропии $\hat{S} = -\ln \rho$ с редуцированной матрицей плотности ρ , которая соответствует полубесконечной части модели, находящейся в основном состоянии. Показано, что в окрестности критической точки $\lambda_c = 1$ флуктуация энтропии запутанности ΔS (квадратный корень из дисперсии) расходится по закону $\Delta S \sim [\ln(1/|1 - \lambda|)]^{1/2}$. С учетом известного поведения самой запутанности S это приводит к тому, что в критической точке величина относительных флуктуаций энтропии запутанности $\delta S = \Delta S/S$ обращается в нуль, т. е. реализуется состояние, фактически, с нефлуктуирующей запутанностью.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовой запутанности (сцепленности) принадлежит ключевая роль в квантовой информатике, криптографии, телепортации. В настоящее время она заняла важное место также в квантовой теории поля, проблеме черных дыр, явлениях фазовых переходов и т. д. Существует несколько способов количественно охарактеризовать величину (меру) запутанности. Наиболее плодотворный подход связан с использованием энтропии редуцированной матрицы плотности. При этом энтропия запутанности может быть интерпретирована как количество информации, доступной наблюдателю, для которого часть переменных (степеней свободы) полной системы потеряна или недоступна при проведении измерений. По вопросам запутанности см., например, работы [1–8] и имеющиеся там многочисленные ссылки на литературу.

Матрицы плотности (статистические операторы) были введены в науку в 1927 г. Ландау [9] при изучении явлений затухания в волновой механике, а затем независимо и в более систематическом виде фон Нейманом [10, 11].

Простейшие редуцированные — одночастичные — матрицы плотности в явном виде появились

в квантовой теории в 1930 г. в работах Фока [12] и, несколько позднее, Дирака [13], которые занимались усовершенствованием методов, соответственно, Хартри и Томаса в модели атома.

В дальнейшем идея исключения излишней информации путем интегрирования (суммирования, свертывания) по большей части переменных матрицы плотности (или функции распределения) многочастичной системы и вывод уравнений для редуцированных матриц плотности низших порядков привлекли внимание многих исследователей [14–16]. Одним из важных достижений при этом стала иерархия, цепочка зацепляющихся уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ) [17, 18]. Обрыв бесконечной цепочки и замыкание ее в рамках того или иного приближения позволили получить решение ряда задач для умеренно плотных сред.

Другое направление использования редуцированных матриц плотности возникло в 1986 году, когда Бомбелли, Коул, Ли и Соркин [19] вычислили с их помощью энтропию для модели черной дыры. В результате они смогли объяснить закон площадей Бекенштейна – Хокинга, согласно которому энтропия черной дыры пропорциональна не объему, а лишь площади ее горизонта событий [20, 21]. В дальнейшем эти представления нашли применение в калибровочных теориях поля и теории струн [22–25].

*E-mail: yur@itp.ac.ru

В 1996 г. энтропия редуцированной матрицы плотности был придан следующий информационный смысл. Как оказалось, она равна относительному числу максимально запутанных пар, которые можно извлечь из большого числа копий исходной системы с помощью протокола очищения, включающего лишь только локальные операции и классическую коммуникацию (ЛОКК) [26, 27]. С тех пор запутанность двухсоставной системы, отождествляемая с энтропией матрицы плотности отдельной подсистемы, прочно вошла в оборот физики квантовой информации.

Однако, как хорошо известно из статистической физики, энтропия подвержена флуктуациям. Поэтому, вообще говоря, следует учитывать возможность флуктуаций и для запутанности [28–30]. Это тем более надо иметь в виду, поскольку, как показали уже первые расчеты двухкубитных систем, такие флуктуации способны достигать больших значений [28]. Причиной флуктуаций является наличие резервуара, который возникает для подсистемы после усреднения по степеням свободы остальной части системы.

В предлагаемой работе исследуются 1/2-спиновые квантовые модели Изинга на одномерных решетках со свободными граничными условиями. Цепочки мы разбиваем на две равные части, по одной из которых проводим редуцирование. Изучение начинаем с димера, а затем переходим к бесконечно протяженной решетке.

В пределе бесконечно длинной цепочки Изинга и, соответственно, полубесконечных подсистем энтропия запутанности была рассчитана Калабрезе и Карди [31, 32]. В своей работе мы вычисляем для этого случая модели дисперсию энтропии запутанности. Оказалось, что она, как и запутанность, логарифмически расходится в точке фазового перехода. В нашей статье найдено также, что в упорядоченной (ферромагнитной) фазе флуктуации запутанности всегда меньше самой запутанности. И наоборот, 99.995 % неупорядоченной (парамагнитной) области по λ занимает участок сильных флуктуаций, когда $\Delta S > S$.

После Введения в разд. 2 даны квантовомеханические определения для матрицы плотности, энтропии и величины ее флуктуаций. В разд. 3 сформулирована модель и рассмотрена система из двух кубитов. Раздел 4 посвящен выводу формул для флуктуаций запутанности цепочки Изинга в термодинамическом пределе. В разд. 5 представлено обсуждение полученных результатов. В заключительном разд. 6 кратко подведены итоги проделанной работы. Нако-

нец, в Приложении собраны полезные тождества из теории эллиптических функций, которые позволили нам представить формулы для флуктуаций энтропии запутанности в «квадратурах» (через полные эллиптические интегралы первого и второго рода).

2. ИСХОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ S И ΔS

Следуя общепринятым курсам квантовой механики и статистической физики (например, [33–35]), рассмотрим систему X , которая находится в окружении другой системы Q (резервуар), причем полная система $X \cup Q$ является замкнутой.

Если $|\psi\rangle$ — волновая функция (вектор) полной системы, то состояние выбранной системы X описывается матрицей плотности

$$\rho = \text{Tr}_Q |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (1)$$

где след взят по всем степеням свободы окружения Q . Безразмерный оператор энтропии выделенной системы есть

$$\hat{S} = -\ln \rho. \quad (2)$$

Соответственно, энтропия системы X равна

$$S = \text{Tr}(\rho \hat{S}) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (3)$$

Согласно работам [26, 27], это и есть энтропия запутанности (измеренная в натах).

Соотношение (3) представляет собой среднее значение, или первый момент оператора энтропии (2). Приведенный момент второго порядка будет давать дисперсию энтропии

$$D = \text{Tr}[\rho(\hat{S} - S)^2] = \text{Tr}[\rho(\hat{S}^2)] - [\text{Tr}(\rho \hat{S})]^2. \quad (4)$$

Квадратный корень из нее, согласно статистической механике, определяет среднюю квадратичную флуктуацию

$$\Delta S = \sqrt{D} = [(\langle \hat{S}^2 \rangle - \langle \hat{S} \rangle^2)]^{1/2}, \quad (5)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю с матрицей плотности ρ .

Отметим следующее. Согласно формуле (1), все матрицы плотности являются, в сущности, редуцированными за исключением разве что случая матрицы плотности $|\psi\rangle\langle\psi|$ для замкнутой системы. Далее, обычная статистическая энтропия (3) в квантовой теории информации выбрана в качестве меры запутанности. Но такой выбор меры имеет и обратную сторону: энтропия-запутанность подвержена флуктуациям, возможны «шумы» запутанности. Они обусловлены окружением, в котором пребывает исследуемая система.

3. МОДЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ЦЕПОЧЕК

Гамильтониан квантовой цепочки Изинга берем в виде

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^L \sigma_i^x - \lambda \sum_{i=1}^{L-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z. \quad (6)$$

Здесь λ — величина спин-спиновых взаимодействий, а σ_i^α — α -я компонента вектора матриц Паули в узле i .

При $\lambda = 1$ бесконечно длинная цепочка Изинга обладает фазовым переходом второго рода, который описывается конформной теорией поля с центральным зарядом $c = 1/2$. Однако мы начнем изучение с цепочек конечной длины.

Простейшей системой является, очевидно, димер (двухкубитная модель). При $L = 2$ гамильтониан (6) сводится к

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 &= -\sigma_1^x - \sigma_2^x - \lambda \sigma_1^z \sigma_2^z = \\ &= - \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда находим, что уровни энергии квантового димера Изинга равны

$$E_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda^2 + 4}, \quad E_{3,4} = \pm \lambda. \quad (8)$$

Как в ферромагнитном ($\lambda > 0$), так и в антиферромагнитном ($\lambda < 0$) случае основное состояние невырождено (синглет) и обладает одной и той же энергией $E_0 = -\sqrt{4 + \lambda^2}$. Основному состоянию отвечает собственный вектор

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4} \\ 2 \\ 2 \\ \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$d = 2[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4})^2 + 4]. \quad (10)$$

Как хорошо известно (см. [28, 36], [4, с. 32]), для двухкубитной системы с волновой функцией

$$|\psi\rangle = a_{1,1} |1, 1\rangle + a_{1,-1} |1, -1\rangle + a_{-1,1} |-1, 1\rangle + a_{-1,-1} |-1, -1\rangle, \quad (11)$$

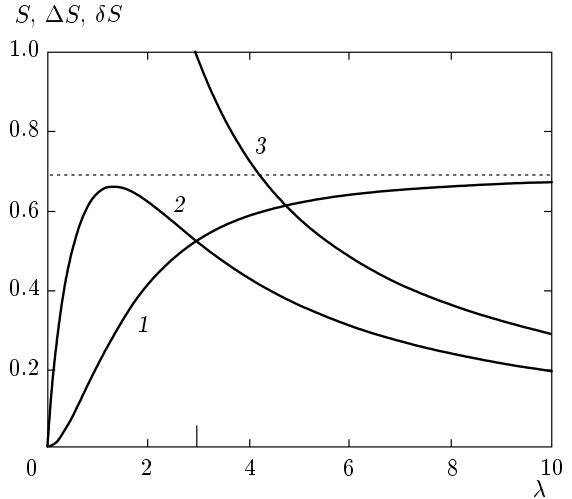


Рис. 1. Поведение запутанности S (кривая 1), абсолютной флуктуации ΔS (кривая 2) и относительной флуктуации δS (кривая 3) в двухкубитной системе Изинга в чистом состоянии с минимальной энергией. Пунктирная прямая — уровень $S = \ln 2 \approx 0.693$, а удлиненная риска по оси абсцисс соответствует значению $\lambda_f = 2.9447 \dots$

нормированной условием $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, согласованность равна

$$C = 2|a_{1,1}a_{-1,-1} - a_{1,-1}a_{-1,1}|. \quad (12)$$

Применяя эти формулы к вектору (9), находим величину согласованности в основном состоянии изинговского димера [36, 37]

$$C = [1 + (2/\lambda)^2]^{-1/2}. \quad (13)$$

Энтропия запутанности двухкубитной системы связана с согласованностью соотношением

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \right) - \\ &\quad - \frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

а величина флуктуаций равна [28]

$$\Delta S = C \ln \left[\frac{1}{C} \left(1 + \sqrt{1 - C^2} \right) \right]. \quad (15)$$

На рис. 1 показаны зависимости $S(\lambda)$, $\Delta S(\lambda)$ и $\delta S(\lambda) = \Delta S/S$ для квантового димера Изинга. На этом рисунке видно, что при $\lambda = 0$ (два несвязанных спина в магнитном поле) как запутанность S , так и

ее флуктуация ΔS равны нулю. С увеличением межспинового взаимодействия λ энтропия запутанности монотонно возрастает, достигая в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ значения $\ln 2$ (остаточная энтропия двукратно вырожденного полностью упорядоченного состояния). Флуктуации же запутанности проходят через максимум вблизи точки $\lambda = 1$, а затем монотонно уменьшаются до нуля. Величина относительных флуктуаций $\delta S(\lambda)$ представляет собой монотонно убывающую функцию (см. рис. 1).

Как видно на рис. 1, кривые $S(\lambda)$ и $\Delta S(\lambda)$ пересекаются. Пересечение происходит при $\lambda_f \approx 2.9447$. Когда $\lambda > \lambda_f$, флуктуации запутанности относительно слабы ($\Delta S < S$). Наоборот, при $0 < \lambda \leq \lambda_f$, запутанность испытывает сильные флуктуации: $\Delta S \geq S$. В этом случае простая картина флуктуаций как малых отклонений от равновесных значений теряет смысл. Необходимо принимать во внимание высшие моменты энтропии запутанности, учитывать «взаимодействие» флуктуаций.

Как показывают проведенные нами численные расчеты, с увеличением длины цепочки положение максимума приближается к $\lambda = 1$ — точке будущего фазового перехода. При этом высота максимума медленно, но возрастает. Из сходимости следует, что вдали от $\lambda = 1$ конечные цепочки качественно правильно передают поведение изучаемых величин для предела $L = \infty$.

4. БЕСКОНЕЧНО ДЛИННАЯ ЦЕПОЧКА

Энтропия полубесконечной части $(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$ линейной цепочки Изинга на прямой $(-\infty, +\infty)$ была рассчитана, как отмечено выше, в работах [31, 32]. Авторы данных работ для нахождения редуцированной матрицы плотности использовали известный прием, состоящий в отображении квантовой одномерной системы в классическую двумерную модель и расчете двумерной модели с помощью угловых трансфер-матриц.

Этот метод показывает, что редуцированная матрица плотности имеет «гиббсовский» вид

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\mathcal{H}'}. \quad (16)$$

В этом равенстве $Z = \text{Tr} [\exp(-\mathcal{H}')]$, а \mathcal{H}' — эффективный гамильтониан свободных фермионов

$$\mathcal{H}' = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j n_j, \quad (17)$$

где n_j — операторы чисел заполнения (их собственные значения равны нулю или единице), причем

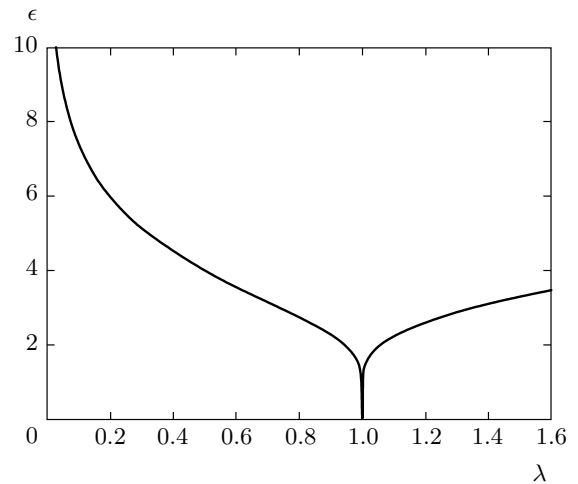


Рис. 2. Дистанция между уровнями возбуждений ε как функция λ

спектр возбуждений является эквидистантным и имеет форму

$$\varepsilon_j = \begin{cases} (2j + 1)\varepsilon, & \lambda < 1, \\ 2j\varepsilon, & \lambda > 1. \end{cases} \quad (18)$$

В последнем равенстве $j = 0, 1, 2, \dots$, а ε представляет собой расстояние между уровнями энергии

$$\varepsilon = \pi \frac{I(\sqrt{1 - k^2})}{I(k)}, \quad (19)$$

где модуль $k = \min\{\lambda, \lambda^{-1}\}$; величина I означает полный эллиптический интеграл первого рода

$$I(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (20)$$

На рис. 2 представлено поведение зависимости $\varepsilon(\lambda)$. На рисунке видно, что при стремлении λ к нулю или бесконечности спектр возбуждений разряжается. И наоборот, в окрестности критической точки $\lambda_c = 1$ уровни энергии сгущаются, происходит уплотнение эквидистантного спектра возбуждений.

Используя приведенные выше выражения для редуцированной матрицы плотности, нетрудно найти, что статистическая сумма

$$Z = \prod_{j=0}^{\infty} (1 + e^{-\varepsilon_j}) \quad (21)$$

и запутанность

$$S \equiv \langle \hat{S} \rangle = -\frac{\varepsilon}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon} + \ln Z. \quad (22)$$

Это позволяет выразить энтропию запутанности основного состояния квантовой цепочки Изинга в виде бесконечных сумм [31]:

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+1)\epsilon}{1 + \exp[(2j+1)\epsilon]} + \sum_{j=0}^{\infty} \ln(1 + e^{-(2j+1)\epsilon}), \quad \lambda < 1 \quad (23)$$

— в неупорядоченной (парамагнитной) фазе и

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j\epsilon}{1 + \exp(2j\epsilon)} + \sum_{j=0}^{\infty} \ln(1 + e^{-2j\epsilon}), \quad \lambda > 1 \quad (24)$$

— в упорядоченной (ферромагнитной) фазе. В первой сумме правой части (24) член с $j = 0$, вносящий нулевой вклад, оставлен для сохранения единообразия формул.

Используя известные тождества из теории эллиптических функций (см. равенства (A.1)–(A.4) в Приложении), Пешел [38] сумел представить бесконечные суммы, входящие в формулы (23) и (24), в замкнутом аналитическом виде. В результате для запутанности он получил (см. также [39–41])

$$S = \frac{1}{24} \left[\ln \left(\frac{16}{k^2 k'^2} \right) + \frac{4}{\pi} (k^2 - k'^2) I(k) I(k') \right], \quad \lambda < 1, \quad (25)$$

а для второй ветви

$$S = \frac{1}{12} \left[\ln \left(\frac{k^2}{16k'} \right) + \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) I(k) I(k') \right] + \ln 2, \quad \lambda > 1. \quad (26)$$

Здесь $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительный модуль.

Из выражений (25) и (26) следует, что в окрестности фазового перехода запутанность, как и предписывает конформная теория поля (см. работу [42] и приведенные там ссылки), расходится по закону [31, 32]

$$S(\lambda \rightarrow 1) = \frac{c}{6} \ln \frac{1}{|1 - \lambda|}, \quad (27)$$

где центральный заряд $c = 1/2$ определяет класс универсальности (1+1)-мерной модели Изинга.

Проведем теперь расчет интересующего нас второго момента энтропии. Для него мы имеем

$$\langle (\hat{S})^2 \rangle = \epsilon^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \epsilon^2} + \left(\epsilon \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon} - \ln Z \right)^2. \quad (28)$$

С учетом выражения (22) для дисперсии энтропии находим

$$D = \epsilon^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \epsilon^2}. \quad (29)$$

Проводя требуемые дифференцирования, приходим отсюда к выражению для флуктуаций запутанности в виде бесконечного ряда

$$\Delta S = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\epsilon_j/2)^2}{\text{ch}^2(\epsilon_j/2)} \right]^{1/2}, \quad (30)$$

где ϵ_j по-прежнему равно (18). Используя теперь тождества (A.5) и (A.6), выведенные нами в Приложении, получаем формулы для флуктуаций энтропии запутанности в замкнутом аналитическом виде:

$$\Delta S = \frac{1}{\pi} I(k') \sqrt{\frac{2}{3} I(k)} \times [k'^2 I(k) + (k^2 - k'^2) E(k)]^{1/2}, \quad \lambda < 1 \quad (31)$$

и

$$\Delta S = \frac{2}{\pi} I(k') \sqrt{\frac{1}{3} I(k)} \times \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) E(k) - (1 - k^2) I(k) \right]^{1/2}, \quad \lambda > 1. \quad (32)$$

В этих равенствах

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (33)$$

— полный эллиптический интеграл второго рода.

Из выражений (31) и (32) находим асимптотическое поведение квадрата флуктуаций запутанности в окрестности точки фазового перехода

$$(\Delta S)^2 = D \approx \frac{1}{12} \ln \frac{1}{|1 - \lambda|}, \quad \lambda \rightarrow 1. \quad (34)$$

Таким образом, дисперсия энтропии запутанности расходится и притом по тому же самому закону, что и запутанность (27).

Из формул (27) и (34) для второго момента оператора энтропии вблизи критической точки получаем скейлинговое разложение

$$\langle (\hat{S})^2 \rangle = \left(\frac{1}{12} \ln \frac{1}{|1 - \lambda|} \right)^2 + \frac{1}{12} \ln \frac{1}{|1 - \lambda|} + \dots \quad (35)$$

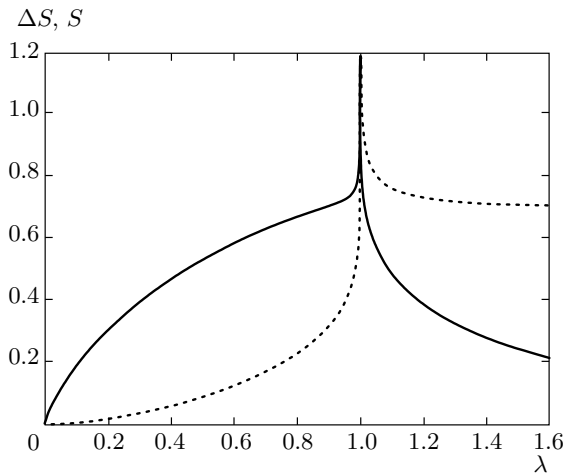


Рис. 3. Зависимости энтропии запутанности S (пунктирная кривая) и величины ее флуктуаций ΔS (сплошная кривая) в бесконечно длинной цепочке Изинга

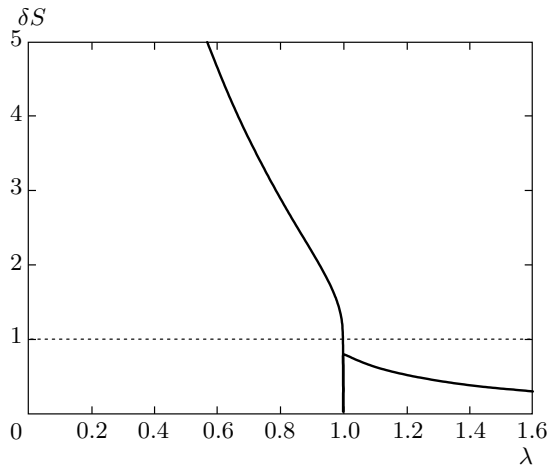


Рис. 4. Величина относительных флуктуаций энтропии запутанности $\delta S = \Delta S/S$ в бесконечно протяженной цепочке как функция λ . Пунктирная прямая соответствует уровню $\delta S = 1$

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Сплошная кривая на рис. 3 показывает ход флуктуаций энтропии запутанности ΔS в зависимости от λ для полубесконечной части квантовой цепочки Изинга, находящейся в основном состоянии. Пунктирной линией на этом рисунке мы воспроизвели также поведение запутанности $S(\lambda)$, полученное в работах [31, 32].

Энтропия запутанности бесконечной цепочки Изинга, как и конечных цепочек (см. рис. 1), не флуктуирует при $\lambda = 0$ (не взаимодействующие между собой спины) и при $\lambda = \infty$ (полностью упорядоченная двукратно вырожденная система). В точке фазового перехода энтропия полубесконечной части имеет разрыв. Это, видимо, можно интерпретировать как фазовый переход первого рода, обусловленный присутствием резервуара, который возникает из-за усреднения по состояниям второй полубесконечной части системы.

Интересно рассмотреть поведение относительных флуктуаций $\delta S = \Delta S/S$. Зависимость $\delta S(\lambda)$ при $L = \infty$ показана на рис. 4 и 5. Здесь, как и в конечных цепочках, $\delta S \rightarrow \infty$ при приближении к точке перехода системы из запутанного в сепарабельное (разделимое) состояние. Однако в самой точке $\lambda = 0$ запутанность и ее флуктуации отсутствуют. В пределе $\lambda \rightarrow \infty$ флуктуации запутанности тоже исчезают.

В разупорядоченной фазе, когда $0 < \lambda < 1$, функция $\delta S(\lambda)$ с увеличением λ монотонно убывает до нуля. При этом флуктуации запутанности всюду боль-

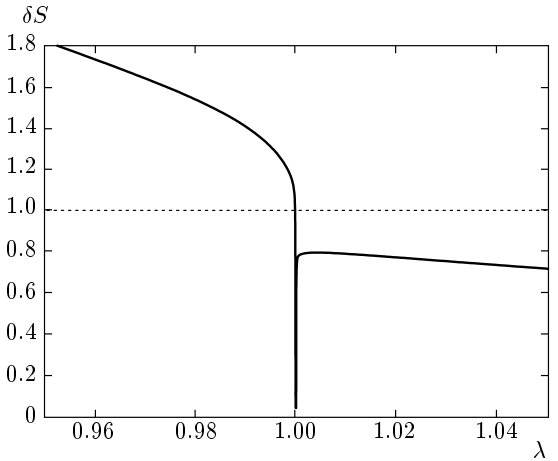


Рис. 5. Поведение $\delta S(\lambda)$ в окрестности точки фазового перехода

ше запутанности ($\Delta S > S$), за исключением узкой подобласти $\lambda_f < \lambda < 1$, где $\lambda_f = 0.999951\dots$; на этом участке $\Delta S < S$.

На кривой $\delta S(\lambda)$ выше $\lambda = 1$ наблюдается максимум с координатами $\lambda_m \approx 1.0044$, $\delta S_m \approx 0.7957$. Таким образом, в упорядоченной фазе ($1 < \lambda < \infty$), в которой спонтанная намагниченность $\langle \sigma^x \rangle \neq 0$, флуктуации запутанности не превышают 79.6% от величины запутанности. Это область умеренных и слабых флуктуаций.

В пределе бесконечно длинной цепочки возникает новый эффект. Он состоит в обращении в нуль

величины относительных флуктуаций при конечном значении λ ($= 1$). Данное обстоятельство сигнализирует о малой роли флуктуаций запутанности по сравнению с самой запутанностью вблизи точки квантового фазового перехода системы.

В последнее время в теории квантовой запутанности возник интерес к энтропиям Цаллиса и Реньи [31, 40]. Реньи ввел свое обобщение информационной энтропии Шеннона в 1960 г. [43]. В квантовомеханических обозначениях энтропия Реньи имеет вид

$$S_R^{(\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha} \ln [\text{Tr}(\rho^\alpha)]. \quad (36)$$

Энтропия Цаллиса появилась в 1988 г. как обобщение статистики Больцмана – Гиббса и привела к возникновению неэкстенсивной статистической механики [44]. В квантовом варианте энтропия Цаллиса есть

$$S_T^{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha-1} [1 - \text{Tr}(\rho^\alpha)]. \quad (37)$$

В пределе $\alpha \rightarrow 1$ обе эти энтропии переходят в энтропию фон Неймана (3). Энтропии Реньи и Цаллиса не независимы, они связаны соотношениями

$$S_R^{(\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha} \ln [1 + (1-\alpha)S_T^{(\alpha)}] \quad (38)$$

и, наоборот,

$$S_T^{(\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha} [\exp((1-\alpha)S_R^{(\alpha)}) - 1]. \quad (39)$$

В своей работе мы используем метод моментов для оператора энтропии. Из уравнения (37) следует разложение энтропии Цаллиса

$$S_T^{(\alpha)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)^{n-1}}{n!} \text{Tr}(\rho \ln^n \rho) = \langle \hat{S} \rangle - \frac{1}{2}(\alpha-1)\langle (\hat{S})^2 \rangle + \dots \quad (40)$$

Таким образом, зная моменты оператора энтропии, можно восстановить энтропию Цаллиса, а по ней найти энтропию Реньи.

Как показано в работах [31, 45], в силу конформной инвариантности моменты редуцированной матрицы плотности открытой квантовой цепочки вблизи критической точки должны иметь вид

$$\text{Tr} \rho^\alpha \approx c_\alpha \xi^{-c(\alpha-1/\alpha)/12}, \quad (41)$$

где ξ — корреляционная длина, измеренная в единицах постоянной решетки, и $c_1 = 1$. Более того, приближенно можно считать, что коэффициенты c_α не зависят от α [46]. Поскольку

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho^\alpha &= \langle \exp[(1-\alpha)(-\ln \rho)] \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^n}{n!} \langle (\hat{S})^n \rangle, \end{aligned} \quad (42)$$

то

$$\langle (\hat{S})^n \rangle = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \text{Tr} \rho^\alpha \Big|_{\alpha=1}. \quad (43)$$

Тогда из уравнения (41) для запутанности имеем

$$S = \langle \hat{S} \rangle \approx \frac{c}{6} \ln \xi, \quad (44)$$

а для второго момента оператора энтропии получаем

$$\langle (\hat{S})^2 \rangle \approx \left(\frac{c}{6} \ln \xi \right)^2 + \frac{c}{6} \ln \xi. \quad (45)$$

Оба этих выражения находятся в согласии, соответственно, с формулами (27) и (35), так как в квантовой цепочке Изинга $\xi \approx 1/|1-\lambda|$ и $c = 1/2$.

Для одномерной подсистемы, состоящей из нескольких длинных (порядка ξ) участков, разделенных большими расстояниями ($\gg \xi$), в работах [31, 45] предложено асимптотическое поведение

$$S \approx \mathcal{A} \frac{c}{6} \ln \xi, \quad (46)$$

где \mathcal{A} — число граничных (концевых) точек всех участков в подсистеме. Приведенное выражение следует из обобщения асимптотического соотношения (41):

$$\text{Tr} \rho^\alpha \approx c_\alpha \xi^{-\mathcal{A}c(\alpha-1/\alpha)/12}. \quad (47)$$

Равенство (46) является одномерным аналогом закона площадей.

Согласно выражению (46) энтропия запутанности в случае многосвязной разреженной подсистемы аддитивна, а S/\mathcal{A} дает нормированное значение (плотность) запутанности. Для флуктуаций же запутанности из формулы (47) имеем $\Delta S \sim \sqrt{\mathcal{A}}$ и $\delta S \sim 1/\sqrt{\mathcal{A}}$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучено поведение флуктуаций энтропии запутанности в квантовых цепочках Изинга, состоящих из двух отрезков, контактирующих в одной точке. Показано, что в пределах полностью упорядоченного и полностью разупорядоченного состояний абсолютные флуктуации запутанности равны

нулю. Однако подходу к точке полностью неупорядоченного состояния ($\lambda = 0$) предшествует область сильных флуктуаций, в которой $\Delta S > S$, и происходит неограниченный рост величины относительных флуктуаций запутанности.

В случае бесконечно длинной цепочки и, соответственно, полубесконечных двух ее подсистем, величина абсолютных флуктуаций энтропии запутанности расходится в точке квантового фазового перехода. Квадрат этих флуктуаций при приближении к критической точке стремится к бесконечности по логарифмическому закону, а амплитуда данной сингулярности контролируется конформной теорией поля. При этом отношение квадрата флуктуаций к энтропии в критической точке равно единице.

Район сильных флуктуаций на λ -шкале охватывает 99.995 % области неупорядоченного состояния системы. Лишь в непосредственной близости к критической точке относительные флуктуации ослабевают и в самой точке фазового перехода $\lambda_c = 1$ исчезают вовсе. В упорядоченной же фазе флуктуации запутанности, наоборот, всегда меньше самой запутанности. Это целиком область относительно слабых флуктуаций.

Автор благодарит за обсуждение работы участников семинара лаборатории «Спиновой динамики и спинового компьютинга» теоретического отдела ИПХФ РАН, а также признателен И. Пешелу за полезную переписку по электронной почте. Работа выполнена в рамках программ № 18 и 21 Президиума РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы выведем тождества, которые были использованы при преобразовании бесконечных сумм в выражениях для энтропии и флуктуаций запутанности.

Будем исходить из тождеств, которые доказываются в теории эллиптических функций ([47, гл. 21, Пример 10], [48, (16.37.2) и (16.37.3)]):

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 + q^{2j+1}) = \left(\frac{16q}{k^2 k'^2} \right)^{1/24} \tag{A.1}$$

и

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 + q^{2j}) = 2 \left(\frac{k^2}{16qk'} \right)^{1/12}, \tag{A.2}$$

где $q = \exp(-\pi I(k')/I(k))$ — параметр Якоби.

Продифференцировав логарифмы равенств (A.1) и (A.2) по k , после преобразований находим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (2j + 1) \frac{q^{2j+1}}{1 + q^{2j+1}} &= \\ &= \frac{1}{24} \left[1 - (1 - 2k^2) \left(\frac{2I}{\pi} \right)^2 \right] \end{aligned} \tag{A.3}$$

и

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2j \frac{q^{2j}}{1 + q^{2j}} = \frac{1}{12} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) \left(\frac{2I}{\pi} \right)^2 - 1 \right]. \tag{A.4}$$

Эти тождества следуют также из соотношений (16.23.11) и (16.23.12) «Справочника» [47].

Наконец, еще раз дифференцируя по k , но теперь уже равенства (A.3) и (A.4), приходим к новым тождествам

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (2j + 1)^2 \frac{q^{2j+1}}{(1 + q^{2j+1})^2} &= \\ &= \frac{2I^3}{3\pi^4} [(1 - k^2)I - (1 - 2k^2)E] \end{aligned} \tag{A.5}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (2j)^2 \frac{q^{2j}}{(1 + q^{2j})^2} &= \\ &= \frac{4I^3}{3\pi^4} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) E - (1 - k^2)I \right]. \end{aligned} \tag{A.6}$$

В приведенных выражениях $I = I(k)$ и $E = E(k)$ — полные эллиптические интегралы. При выводе тождеств (A.3)–(A.6) оказались полезными следующие соотношения:

$$\frac{dq}{dk} = \frac{\pi^2 q}{2kk'^2 I^2},$$

$$\frac{dI}{dk} = \frac{1}{k} \left(\frac{E}{k'^2} - I \right)$$

и, наконец,

$$IE' + I'E - II' = \frac{\pi}{2},$$

где $I' = I(k')$ и $E' = E(k')$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, МЦНМО, Москва (2002).
2. К. А. Валиев, А. А. Кокин, *Квантовые компьютеры: надежды и реальность*, НИЦ РХД, Москва — Ижевск (2002).

3. Сб.: *Физика квантовой информации*, под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цайлингера, Постмаркет, Москва (2002).
4. А. А. Кокин, *Твердотельные квантовые компьютеры на ядерных спицах*, Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск (2004).
5. К. А. Валиев, УФН **175**, 3 (2005).
6. М. Нильсен, И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, Мир, Москва (2006).
7. L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 517 (2008).
8. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
9. L. Landau, *Zs. Phys.* **45**, 430 (1927); Л. Д. Ландау, *Собрание трудов*, т. 1. Физматлит, Москва (2008), с. 39.
10. J. von Neumann, in *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen aus dem Jahre 1927. Mathematisch-Physikalische Klasse*. Weidmannsche Buchhandlung, Berlin (1928), s. 1, 246, 273.
11. J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932). [И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, Москва (1964).]
12. V. Fock, *Zs. Phys.* **61**, 126 (1930).
13. P. A. M. Dirac, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **26**, 376 (1930). [П. А. М. Дирак, *Собрание научных трудов*, т. II, Физматлит, Москва (2003), с. 268.]
14. Н. Н. Боголюбов, *Лекции по квантовой статистике*, Радянська школа, Киев (1949); Н. Н. Боголюбов, *Собрание научных трудов в 12 томах*, т. 5. Наука, Москва (2006).
15. Н. Марч, У. Янг и С. Сампантхар, *Проблема многих тел в квантовой механике*, Мир, Москва (1969).
16. Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, Москва (1984).
17. Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, в 2-х томах, Мир, Москва (1978).
18. Дж. Займан, *Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем*, Мир, Москва (1982).
19. L. Bombelli, R. K. Koul, J. Lee, and R. D. Sorkin, *Phys. Rev. D* **34**, 373 (1986).
20. D. V. Fursaev, *Phys. Rev. D* **73**, 124025 (2006).
21. J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 277 (2010); arXiv:quant-ph/0808.3773.
22. S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006).
23. A. Velytsky, *Phys. Rev. D* **77**, 085021 (2008).
24. P. V. Buividovich and M. I. Polikarpov, *Phys. Lett. B* **670**, 141 (2008); arXiv:hep-th/0806.3376.
25. P. V. Buividovich and M. I. Polikarpov, *J. Phys. A* **42**, 304005 (2009).
26. C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 722 (1996).
27. C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
28. Э. Б. Фельдман и М. А. Юрищев, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 75 (2009).
29. М. А. Yurishchev, in: *List of talks of Int. Conf. Conformal Field Theory, Integrable Models and Liouville Gravity*, Chernogolovka (2009), p. 11.
30. М. А. Yurishchev, in *Book of Abstracts, Int. Conf. «Micro- and Nanoelectronics — 2009»*, Moscow–Zvenigorod (2009), p. q3–05.
31. P. Calabrese and J. Cardy, *J. Stat. Mech.* P06002 (2004).
32. P. Calabrese and J. Cardy, *J. Quant. Inf.* **4**, 429 (2006).
33. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматлит, Москва (2008).
34. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Физматлит, Москва (2008).
35. Р. Фейнман, *Статистическая механика. Курс лекций*, Мир, Москва (1978).
36. D. Gunlyke, V. M. Kendon, V. Vedral, and S. Bose, *Phys. Rev. A* **64**, 042302 (2001).
37. A. F. Terzis and E. Paspalakis, *Phys. Lett. A* **333**, 438 (2004).
38. I. Peschel, *J. Stat. Mech.* P12005 (2004).
39. A. R. Its, B.-Q. Jin, and V. E. Korepin, *J. Phys. A* **38**, 2975 (2005).
40. F. Franchini, A. R. Its, and V. E. Korepin, *J. Phys. A* **41**, 025302 (2008).
41. I. Peschel and V. Eisler, *J. Phys. A* **42**, 504003 (2009).

-
42. G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico, and A. Kitaev, Phys. Rev. Lett. **90**, 227902 (2003).
43. A. Rényi, in *Proceed. of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability* (1960), p. 547.
44. C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
45. P. Calabrese and J. Cardy, J. Phys. A **42**, 504005 (2009).
46. V. Alba, L. Tagliacozzo, and P. Calabrese, arXiv:cond-mat/0910.0706.
47. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, в 2-х ч., Едиториал УРСС, Москва (2002).
48. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Наука, Москва (1979).