ЖЭТФ, 2010, том 138, вып. 4 (10), стр. 605–611

КОМПЛЕКСНЫЙ РЕЗОНАНС ПРИ ФРЕНЕЛЕВСКОМ ОТРАЖЕНИИ ИМПУЛЬСОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Н. Розанов *

Государственный оптический институт им. С. И. Вавилова
199034, Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 27 октября 2009 г.

Выполнен анализ френелевского отражения импульсов излучения с экспоненциальным временным профилем амплитуды. Указаны условия правомерности представления о коэффициенте отражения на комплексной частоте, мнимая часть которой определяет скорость временного изменения амплитуды. Для рассматриваемых импульсов продемонстрирован комплексный резонанс, т. е. возрастание модуля коэффициента отражения при приближении комплексной частоты падающего излучения (задний фронт импульса) к комплексной частоте собственных колебаний осцилляторов среды.

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление резонанса колебательных систем, заключающееся в возрастании амплитуды вынужденных колебаний системы при приближении частоты внешнего периодического воздействия к частоте собственных колебаний системы, имеет место как для микро-, так и для макрообъектов и играет большую роль в природе, науке и технике [1]. Рост амплитуды при приближении к резонансу ограничивается диссипацией (затуханием) в системе [2].

Поскольку колебания затухают, частота собственных колебаний комплексна, что означает экспоненциальное временное убывание амплитуды колебаний осцилляторов, отвечающих колебательной системе. Поэтому естественна возможность «комплексного резонанса», т. е. возрастания амплитуды вынужденных колебаний осциллятора, когда не только вещественная, но и мнимая части комплексной частоты внешнего воздействия приближаются соответственно к вещественной и мнимой частям собственной частоты осциллятора [3]. Достижение комплексного резонанса возможно для внешнего воздействия с варьируемым экспоненциальным временным убыванием амплитуды. Амплитуда отклика при комплексном резонансе уже не ограничивается скоростью затухания осцилляторов.

Экспериментально комплексный резонанс, видимо, несложно продемонстрировать в электрическом контуре, состоящем из последовательно соединенных емкости, индуктивности и сопротивления, при воздействии на контур импульса внешней электродвижущей силы (ЭДС) с контролируемыми (вещественной) частотой и скоростью экспоненциального временного убывания амплитуды на заднем фронте импульса. Физически более содержательна электродинамика сплошных сред, в рамках которой известны аналитические свойства диэлектрической проницаемости как функции комплексной частоты [4]. В работе [3] кратко анализировался комплексный резонанс применительно к отражению излучения от среды с частотной дисперсией лоренцевского типа. При этом возникает вопрос об условиях применимости таких понятий как коэффициент отражения излучения с комплексной частотой.

В настоящем сообщении, в отличие от [3], последовательно рассматривается отражение импульса излучения от границы однородной или слоистой среды с частотной дисперсией. В разд. 2 представлены общие соотношения для излучения, отраженного от такой среды, полученные классическим разложением импульсов в интеграл Фурье (по ве-

*E-mail: nrosanov@yahoo.com

щественным частотам). В исходной формулировке в выражении для отраженного излучения фигурируют значения коэффициента отражения только для вещественных частот. В разд. 3 показывается, каким образом и при каких условиях возникают значения коэффициента отражения для комплексных частот. Обсуждение результатов содержится в последнем разделе.

2. ФРЕНЕЛЕВСКОЕ ОТРАЖЕНИЕ ИМПУЛЬСА

Рассматриваем отражение импульса излучения при его нормальном падении из вакуума на границу однородного или слоистого немагнитного (магнитная проницаемость $\mu = 1$) диэлектрика. На границе раздела сред $z = 0$ напряженность электрического поля падающего излучения $E_i(t)$, где t — время. Соответствующий спектр Фурье имеет вид

$$F_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_i(t) \exp(i\omega t)\, dt. \qquad (1)$$

Отсюда находится спектр Фурье для отраженного излучения:

$$F_r(\omega) = \frac{r(\omega)}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_i(t) \exp(i\omega t)\, dt, \qquad (2)$$

где $r(\omega)$ — амплитудный (комплексный) коэффициент отражения, ω — частота. Временная зависимость напряженности электрического поля для отраженного излучения (также при $z = 0$) имеет вид

$$E_r(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_r(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, r(\omega) \exp(-i\omega t) \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_i(\tau) \exp(i\omega\tau)\, d\tau. \qquad (3)$$

Мы подразумеваем, что среда равновесная и при $t \to -\infty$ излучение, отвечающее ее свободным колебаниям (на частотах, отличающихся от частот падающего излучения), отсутствует. Выражение (3) справедливо для произвольной частотной зависимости коэффициента отражения $r(\omega)$, в том числе для среды с дисперсией и многослойных структур, и для произвольной формы импульса. Коэффициент отражения $r(\omega)$ определяется значениями диэлектрической проницаемости слоев диэлектрика ε и поэтому обладает рядом известных для ε аналитических свойств [4]. В соответствии с принципом причинности (отраженное излучение не возникает ранее прихода на границу импульса падающего излучения) функция $r(\omega)$ не имеет особенностей в верхней полуплоскости комплексной частоты $\omega = \omega' + i\omega''$. Поскольку при $|\omega| \to \infty$ диэлектрическая проницаемость любых сред приближается к единице, в этом пределе $r(\omega) \to 0$. Ввиду соотношения [4]

$$\varepsilon(-\omega^*) = \varepsilon^*(\omega) \qquad (4)$$

аналогичное правило симметрии должно выполняться и для коэффициента отражения:

$$r(-\omega^*) = r^*(\omega). \qquad (5)$$

Отметим также, что множитель $|\exp(-i\omega t)| = \exp(\omega'' t) \to 0$ при $\omega'' \to \infty$, если $t < 0$, и при $\omega'' \to -\infty$, если $t > 0$.

3. ИМПУЛЬСЫ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВРЕМЕННЫМ ПРОФИЛЕМ АМПЛИТУДЫ

Далее рассмотрим три вида профиля импульса падающего излучения при $z = 0$.

1. Импульс с экспоненциально растущей амплитудой и резким задним фронтом:

$$E_i(t) = \begin{cases} A\exp\left(\Gamma^{(-)} t\right) \sin(\Omega t) = i\dfrac{A}{2}\left[\exp\left(-i\omega_f^{(-)} t\right) - \exp\left(i\omega_f^{(-)*} t\right)\right], & t < 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Здесь

$$\omega_f^{(-)} = \Omega + i\Gamma^{(-)}, \quad \Gamma^{(-)} > 0. \qquad (7)$$

Подстановка выражения (6) в формулу (3) приводит к следующему интегралу:

$$E_r(t) = \frac{A}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, r(\omega) \times \exp(-i\omega t) \left(\frac{1}{\omega - \omega_f^{(-)}} - \frac{1}{\omega + \omega_f^{(-)*}}\right). \qquad (8)$$

При $t < 0$ интеграл (8) можно найти с помощью теории вычетов. Для этого рассмотрим интеграл от подынтегрального выражения (8) по контуру, состоящему из отрезка вещественной оси ($\omega'' = 0$, $-R < \omega' < R$) и полуокружности радиуса R с центром в начале координат, расположенной в верхней полуплоскости ($\omega'' = \sqrt{R^2 - \omega'^2}$). При $R \to \infty$ интеграл по полуокружности стремится к нулю, так что вклад дает только интегрирование по вещественной оси, как в формуле (8). Соответственно, значение (8) определяется вычетами двух полюсов в точках $\omega = \omega_f^{(-)}$ и $\omega = -\omega_f^{(-)^*}$:

$$E_r(t < 0) = -A \operatorname{Im} \left[r \left(\omega_f^{(-)} \right) \exp \left(-i\omega_f^{(-)} t \right) \right]. \quad (9)$$

Отметим, что амплитуда и форма импульса отраженного излучения получены здесь для произвольного вида коэффициента отражения. Физический смысл этого обстоятельства следующий. При монохроматическом падающем излучении с амплитудой, описываемой первым соотношением в формуле (6), амплитуда отраженного излучения получается из (6) домножением на коэффициент отражения при соответствующей комплексной частоте:

$$E_r(t) = i\frac{A}{2} \left[r \left(\omega_f^{(-)} \right) \exp \left(-i\omega_f^{(-)} t \right) - \right. \\ \left. - r \left(-\omega_f^{(-)^*} \right) \exp \left(i\omega_f^{(-)^*} t \right) \right]. \quad (10)$$

С учетом (5) из (10) следует (9). Это оправдывает понятие коэффициента отражения для комплексной частоты в указанных условиях. Если же падающее излучение состоит из суперпозиции полей с различными комплексными частотами:

$$E_i(t < 0) = -\operatorname{Im} \sum_n A_n \exp \left[-i\omega_{fn}^{(-)} t \right], \\ \operatorname{Im} \omega_{fn}^{(-)} > 0, \quad (11)$$

то ввиду линейности задачи амплитуда отраженного излучения равна

$$E_r(t < 0) = -\operatorname{Im} \sum_n r \left(\omega_{fn}^{(-)} \right) \times \\ \times A_n \exp \left[-i\omega_{fn}^{(-)} t \right]. \quad (12)$$

Выражение (11) может служить аппроксимацией формы переднего фронта реальных импульсов излучения.

Теперь проанализируем форму импульса отраженного излучения при $t > 0$. Хотя падающее излучение на этом временном интервале отсутствует, имеется затухающее излучение осцилляторов среды, возбужденных импульсом при $t < 0$. Для импульса вида (6) выражение (8) по-прежнему справедливо, но для вычисления интеграла (8) с помощью теории вычетов полуокружность радиуса $R \to \infty$ нужно располагать в нижней полуплоскости ($\omega'' = -\sqrt{R^2 - \omega'^2}$). Теперь интеграл будет определяться особенностями коэффициента отражения $r(\omega)$ (которые располагаются только в нижней полуплоскости). Соответственно, необходима конкретизация вида частотной зависимости коэффициента отражения. Прежде всего положим, что речь идет об отражении импульса от границы вакуума с разреженной средой, диэлектрическая проницаемость которой близка к единице:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \delta\varepsilon(\omega), \quad |\delta\varepsilon| \ll 1. \quad (13)$$

Тогда по формуле Френеля

$$r(\omega) = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{1 + \sqrt{\varepsilon(\omega)}} \approx -\frac{\delta\varepsilon(\omega)}{4} \quad (14)$$

и

$$E_r(t) = -\frac{A}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \delta\varepsilon(\omega) \exp(-i\omega t) \times \\ \times \left(\frac{1}{\omega - \omega_f^{(-)}} - \frac{1}{\omega + \omega_f^{(-)^*}} \right). \quad (15)$$

Далее, примем лоренцевскую модель частотной дисперсии среды [5]:

$$\delta\varepsilon(\omega) = \sum_m \frac{\omega_{pm}^2}{\omega_{0m}^2 - i\gamma_m\omega - \omega^2} = \\ = -\sum_m \frac{\omega_{pm}^2}{(\omega - \omega_m)(\omega + \omega_m^*)}. \quad (16)$$

Здесь индекс «m» указывает номер типа осцилляторов, характеризующихся плазменной частотой ω_{pm}, квадрат которой пропорционален парциальной концентрации осцилляторов, постоянными релаксации $\gamma_m > 0$ и частотами собственных колебаний (в пренебрежении релаксацией) ω_{0m}. Диэлектрическая проницаемость (16) обладает полюсами при $\omega = \omega_m$ и $\omega = -\omega_m^*$, где

$$\omega_m = \omega_m' - i\frac{\gamma_m}{2}, \quad \omega_m' = \sqrt{\omega_{0m}^2 - \frac{\gamma_m^2}{4}}. \quad (17)$$

Считаем, что затухание слабое, так что $\omega_m' \approx \omega_{m0} > 0$. В соответствии с соотношениями (17) полюсы располагаются в нижней полуплоскости комплексных частот парами с различающимися знаками вещественной части.

Интеграл (15) вычисляется по теории вычетов при замыкании контура интегрирования вдоль вещественной оси полуокружностью, расположенной в нижней полуплоскости, как указывалось выше. Ввиду этого полюсы, отвечающие дробям в круглых скобках в правой части (15), находятся вне контура интегрирования и не вносят вклад в интеграл. Поэтому

$$E_r(t>0) = \frac{A}{8}\sum_m \frac{\omega_{pm}^2}{\omega'_m} \times \\ \times \operatorname{Im}\left[\exp(-i\omega_m t)\left(\frac{1}{\omega_m-\omega_f^{(-)}} - \frac{1}{\omega_m+\omega_f^{(-)*}}\right)\right]. \quad (18)$$

Импульс излучения (18) представляет сумму затухающих со скоростью релаксации колебаний на собственных частотах осцилляторов среды. Дроби в круглых скобках в правой части (18) свидетельствуют о том, что при слабом затухании реализуется обычный («вещественный») резонанс, если частота падающего излучения Ω приближается к одной из собственных частот осцилляторов ω_{m0}. Однако «комплексный» резонанс (с точным обращением в нуль знаменателей дробей в (18)) в этом случае недостижим, так как мнимые части ω_m и $\omega_f^{(-)}$ имеют разные знаки.

2. Импульс с резким передним фронтом и экспоненциально убывающей амплитудой:

$$E_i(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ A\exp\left(-\Gamma^{(+)}t\right)\sin(\Omega t) = i\,\dfrac{A}{2}\left[\exp\left(-i\omega_f^{(+)}t\right) - \exp\left(i\omega_f^{(+)*}t\right)\right], & t>0. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь $\omega_f^{(+)} = \Omega - i\Gamma^{(+)}$, $\Gamma^{(+)} > 0$. При $t<0$, очевидно, отраженное излучение отсутствует, поэтому рассматриваем только интервал времен $t>0$. В этом случае из формулы (3) следует (ср. с (8)), что

$$E_r(t) = -\frac{A}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, r(\omega) \times \\ \times \exp(-i\omega t)\left(\frac{1}{\omega-\omega_f^{(+)}} - \frac{1}{\omega+\omega_f^{(+)*}}\right). \quad (20)$$

При вычислении интеграла (20) по теории вычетов контур интегрирования состоит из отрезка вещественной оси ($\omega''=0$, $-R<\omega'<R$) и полуокружности радиуса R с центром в начале координат, расположенной в нижней полуплоскости ($\omega'' = -\sqrt{R^2-\omega'^2}$), причем $R\to\infty$. Полюсы, отвечающие нулям знаменателей дробей в круглых скобках в правой части (20), теперь попадают внутрь контура интегрирования и их вклад

$$E_r^{(f)}(t) = -A\operatorname{Im}\left[r\left(\omega_f^{(+)}\right)\exp\left(-i\omega_f^{(+)}t\right)\right]. \quad (21)$$

Видно, что составляющая излучения (21) обладает точно такой же комплексной частотой, что и падающее излучение. Вклад других особых точек коэффициента отражения $r(\omega)$ приводит к излучению с отличающимися от $\omega_f^{(+)}$ частотами. Если можно каким-либо образом разделить вклад излучения на этих частотах (см. ниже), то резонансное возрастание $r(\omega)$ при приближении комплексной частоты падающего излучения к соответствующим комплексным частотам собственных колебаний осцилляторов среды и будет отвечать эффекту комплексного резонанса [3].

Для вычисления полного отраженного излучения снова примем упрощения (13), (14) и (16). Тогда

$$E_r(t) = -\frac{A}{16\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\exp(-i\omega t) \times \\ \times \sum_m \frac{\omega_{pm}^2}{(\omega-\omega_m)(\omega+\omega_m^*)}\left(\frac{1}{\omega-\omega_f^{(+)}} - \frac{1}{\omega+\omega_f^{(+)*}}\right) \quad (22)$$

и

$$E_r(t) = \frac{A}{4}\operatorname{Im}\left[\delta\varepsilon\left(\omega_f^{(+)}\right)\exp\left(-i\omega_f^{(+)}t\right)\right] - \\ - \frac{A}{8}\sum_m \frac{\omega_{pm}^2}{\omega'_m}\operatorname{Im}\left[\left(\frac{1}{\omega_m-\omega_f^{(+)}} - \frac{1}{\omega_m+\omega_f^{(+)*}}\right) \times \\ \times \exp(-i\omega_m t)\right]. \quad (23)$$

Первое слагаемое в правой части (23) отвечает вынужденным колебаниям на (комплексной) частоте падающего излучения и в принятом приближении совпадает с (21). Второе же слагаемое описывает вклад затухающих свободных колебаний осцилляторов среды. Заметим, что $E_r(0)=0$, так что в начальный момент времени $t=0$ амплитуда вынужденных колебаний совпадает по величине и противоположна по знаку суммарной амплитуде свободных колебаний. Возможность разделения этих колебаний обсуждается ниже.

Эти результаты также могут быть обобщены на случай отклонения формы импульса падающего излучения от чисто экспоненциальной (19). Так, при $t > 0$ можно аппроксимировать эту форму суперпозицией экспонент с комплексными частотами:

$$E_i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -\sum_n \operatorname{Im}\left[A_n \exp\left(-i\omega_{fn}^{(+)} t\right)\right], & t > 0. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда при $t > 0$ вместо (21) получим выражение

$$E_r^{(f)}(t) = -\operatorname{Im}\left[\sum_n r\left(\omega_{fn}^{(+)}\right) A_n \exp\left(-i\omega_{fn}^{(+)} t\right)\right], \tag{25}$$

а вместо (23) —

$$E_r(t) = \frac{1}{4}\sum_n \operatorname{Im}\left[\delta\varepsilon\left(\omega_{fn}^{(+)}\right) A_n \exp\left(-i\omega_{fn}^{(+)} t\right)\right] - \frac{1}{8}\sum_{m,n}\frac{\omega_{pm}^2}{\omega_m'}\operatorname{Im}\left[\left(\frac{1}{\omega_m-\omega_{fn}^{(+)}} - \frac{1}{\omega_m+\omega_{fn}^{(+)*}}\right) \times A_n \exp(-i\omega_m t)\right]. \tag{26}$$

Комплексный резонанс с ростом амплитуды вынужденных колебаний достигается, когда комплексная частота $\omega_{fn}^{(+)}$ какой-либо компоненты поля падающего излучения приближается к также комплексной частоте собственных колебаний осцилляторов среды, ω_m. При этом применимость формулы (26) ограничена условием $|r| \ll 1$ и приблизиться к комплексному резонансу можно только до некоторого расстояния. Но для (25) данное ограничение отсутствует, так что степень приближения к точному комплексному резонансу зависит от дополнительных факторов, в том числе в принятой модели среды от возможности разделения фигурирующих частот, определяемой практически уровнем шумов и погрешностями измерений.

3. Импульс с плавными передним и задним фронтами:

$$E_i(t) = \begin{cases} A\exp\left(\Gamma^{(-)} t\right)\sin(\Omega t) = i\,\dfrac{A}{2}\left[\exp\left(-i\omega_f^{(-)} t\right) - \exp\left(i\omega_f^{(-)*} t\right)\right], & t < 0, \\ A\exp\left(-\Gamma^{(+)} t\right)\sin(\Omega t) = i\,\dfrac{A}{2}\left[\exp\left(-i\omega_f^{(+)} t\right) - \exp\left(i\omega_f^{(+)*} t\right)\right], & t > 0. \end{cases} \tag{27}$$

Связь величин $\omega_f^{(\pm)}$ с $\Gamma^{(\pm)}$ и Ω прежняя, см. (7) и (19). Этот случай является общим в том смысле, что формула (27) при $\Gamma^{(+)} \to \infty$ переходит в (6), а при $\Gamma^{(-)} \to \infty$ — в (19). Если в вариантах (6) и (19) непрерывна напряженность электрического поля $E_i(t)$, а ее временная производная (или напряженность магнитного поля) имеет скачок при $t = 0$, то в варианте (27) непрерывны обе эти величины. Такая непрерывность в случае (27) достигается за счет того, что переход от возрастания амплитуды к ее убыванию происходит точно в тот момент, когда фаза высокочастотных колебаний обращается в нуль. В действительности это обременительное требование не является обязательным, а непрерывность напряженности электрического и магнитного полей обеспечивается за счет более сложного вида профиля импульса падающего излучения. Здесь мы не будем вводить соответствующие усложнения выкладок.

При $t < 0$ рассматриваемый вариант совпадает с (6), так что отраженное излучение описывается выражением (9) (или (12) в случае падающего излучения в форме суперпозиции гармоник (11)). Поэтому остановимся далее на случае $t > 0$. Из формул (3) и (27) следует, что

$$E_r(t) = \frac{A}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, r(\omega)\exp(-i\omega t)\left(\frac{1}{\omega-\omega_f^{(-)}} - \frac{1}{\omega+\omega_f^{(+)*}} - \frac{1}{\omega-\omega_f^{(+)}} + \frac{1}{\omega+\omega_f^{(+)*}}\right). \tag{28}$$

Контур интегрирования включает полуокружность радиуса $R \to \infty$, расположенную в нижней полуплоскости комплексных частот. Из четырех дробей в круглых скобках подынтегрального выражения (28) только две последние отвечают полюсам внутри контура интегрирования. Их вклад соответствует вынужденным колебаниям, т. е. с комплексной частотой, совпадающей с комплексной частотой падающего излучения, и этот вклад совпадает с (21).

Для вычисления полного профиля импульса отраженного излучения (28) снова используем приближение слабого отражения (13), (14) и (16). Тогда

$$E_r(t>0) = \frac{A}{4}\,\mathrm{Im}\left[\delta\varepsilon\left(\omega_f^{(+)}\right)\exp\left(-i\omega_f^{(+)}t\right)\right] + \\ + \frac{A}{8}\sum_m \frac{\omega_{pm}^2}{\omega_m'}\,\mathrm{Im}\left[\exp(-i\omega_m t)\left(\frac{1}{\omega_m - \omega_f^{(-)}} - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{1}{\omega_m + \omega_f^{(+)^*}} - \frac{1}{\omega_m - \omega_f^{(+)}} + \frac{1}{\omega_m + \omega_f^{(+)^*}}\right)\right]. \quad (29)$$

Первое слагаемое в правой части (29) отвечает «вынужденным» колебаниям на комплексной частоте падающего излучения $\omega = \omega_f^{(+)}$ (и, в силу симметрии, $\omega = -\omega_f^{(+)^*}$). Слагаемые под знаком суммы в формуле (29) представляют «свободные» колебания на комплексных частотах осцилляторов среды ω_m.

В условиях комплексного резонанса $\omega_f^{(+)} \to \omega_m$ или $\omega_f^{(+)} \to -\omega_m^*$ резонансно возрастают амплитуды как вынужденных, так и свободных колебаний; соответствующие численные примеры представлены в работе [3]. Вне точного комплексного резонанса эти частоты различаются, и поэтому такие колебания можно разделить. В качестве схемы эксперимента можно предложить следующую. Монохроматическое излучение с перестраиваемой (вещественной) частотой проходит через модулятор, коэффициент пропускания которого управляемым образом зависит от времени, и падает на границу исследуемого образца. Измеряется интенсивность либо отраженного импульса, либо его суперпозиции с исходным лазерным излучением. Затем временной профиль интенсивности подвергается компьютерной обработке. В обоих случаях выражение для интенсивности на заднем фронте импульса представляется в виде вещественной или мнимой части набора экспонент с комплексными частотами и амплитудами, резонансно возрастающими при приближении к комплексному резонансу. При этом ширина резонанса много меньше скоростей затухания. Напомним, что представление временного сигнала в виде суперпозиции экспоненциальных функций времени принадлежит к известным с XVIII века задачам теории обработки сигналов [6], и в настоящее время имеются эффективные методы решения этой задачи, в том числе с учетом шумов [7]. В методе Прони [6, 7] отсчеты проводятся в дискретные моменты времени с одинаковой длиной временного интервала. Более точный результат может быть получен для наиболее медленно убывающей гармоники за счет использования всего временного профиля и применения преобразования Лапласа [8].

Результат естественным образом обобщается на случай импульса, описываемого набором экспонент с комплексными показателями вида (11) при $t < 0$ и (24) при $t > 0$. Это позволяет аппроксимировать реальную форму и переднего, и заднего фронтов импульса. Мы не представляем здесь соответствующие громоздкие выражения, так как характер результата достаточно очевиден из уже приведенных формул.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, отражение импульсов излучения от границы однородного или слоистого диэлектрика правомерно описывать с помощью коэффициента отражения для комплексных частот, что отвечает экспоненциальному временному изменению амплитуды волн. Заметим, что исходное выражение для коэффициента отражения зависит от свойств среды только при вещественных частотах. Однако интегрирование по вещественной частоте в бесконечных пределах при должном замыкании контура интегрирования в комплексной области сводится к вычетам, в том числе к значению коэффициента отражения при комплексной частоте зондирующего излучения. Результат обобщается на случай суммы экспоненциальных по времени компонент, аппроксимирующей форму реальных импульсов.

Если экспоненциальное изменение амплитуды отвечает возрастанию (передний фронт импульса), то отраженное излучение полностью является «вынужденным», т. е. обладает точно такой же комплексной частотой, что и падающее излучение. При экспоненциальном убывании амплитуды (задний фронт импульса) уже существенную роль играет «собственное» излучение осцилляторов среды, раскачанных передним фронтом импульса. Частоты собственного излучения также являются комплексными ввиду релаксационного затухания. Комплексный резонанс отвечает резкому увеличению амплитуды поля как вынужденного, так и собственного излучения при сближении одновременно вещественных и мнимых частей частот этих двух типов излучения. Наблюдение комплексного резонанса возможно при разделении этих частот, что может быть достигнуто компьютерной обработкой регистрируемого сигнала.

Для анализа среды с неизвестным расположением резонансов в эксперименте следует варьировать с малым шагом вещественную и мнимую части частоты зондирующего образец излучения, получить профили интенсивности импульса отраженного излучения или его суперпозиции с зондирующим излучением на такой достаточно густой сетке, а затем компьютерной обработкой извлечь из этих данных резонансы в зависимости амплитуд гармоник сигнала на различных комплексных частотах от также комплексной частоты. Эти данные и будут служить сигнатурой исследуемой среды (образца), причем они содержат больший объем информации, чем при традиционном в спектроскопии изменении только вещественной частоты.

Предельная точность измерений ограничивается, помимо шумов, временем измерения. В «обычной» спектроскопии (со сканированием вещественной частоты) такое ограничение может быть неактуальным. Применительно к комплексному же резонансу сигнал неизбежно имеет форму импульса конечной длительности. Однако за длительное время измерения возможно многократное повторение таких импульсов с накоплением статистики, что уравнивает предельную точность этих двух подходов.

Предложенные исследования позволили бы впервые осуществить экспериментальную проверку изложенных в работе [4] аналитических свойств диэлектрической проницаемости на комплексной плоскости частот. При этом следует учитывать ограниченный смысл понятия полюсов (ввиду важности явлений пространственной дисперсии в их окрестности [3]). Кроме того, подход комплексных частот вряд ли применим для сред с выраженным неоднородным уширением. По-видимому, наиболее удобными для таких исследований объектами служат квантовые точки (из-за дискретного типа спектра в этих наноструктурах) и ультрахолодные атомарные газы (с подавленным доплеровским уширением). В данном варианте спектроскопии, в отличие от возбуждения исследуемого объекта коротким импульсом с широким спектром и наблюдением, соответственно, большого числа затухающих свободных колебаний осцилляторов, достигается эффективное возбуждение осцилляций в небольшой окрестности комплексных частот, что облегчает анализ спектров. Ширина комплексного резонанса не ограничена скоростью затухания осцилляторов. Наконец, представления о комплексном резонансе могут оказаться полезными не только в оптике, но и в других разделах науки и техники, в которых существенны резонансные явления.

Автор благодарен Т. А. Вартаняну за полезные обсуждения и советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-02-90112-Мол_а), гранта Министерства образования и науки РФ РНП 2.1.1/4694 и входит в план гранта РФФИ 10-02-01016-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Горелик, *Колебания и волны*, Физматлит, Москва (2008).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1988).
3. Н. Н. Розанов, Письма в ЖЭТФ **90**, 473 (2009).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
5. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Физматлит, Москва (1991).
6. G. R. de Proni, J. E. Polytech. **1**(2), 24 (1795).
7. С. Л. Марпл, *Цифровой спектральный анализ и его приложения*, Мир, Москва (1990).
8. Н. Н. Розанов, Опт. и спектр. **108**, 691 (2010).