ЖЭТФ, 2010, том 138, вып. 5 (11), стр. 881–891

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В СЖИМАЕМОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ: ГАМИЛЬТОНОВО ОПИСАНИЕ

В. П. Рубан *

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 апреля 2010 г.

Рассмотрены медленные в сравнении со скоростью звука движения идеальной сжимаемой жидкости (газа) в поле тяжести при наличии двух изэнтропических слоев с небольшой разницей удельной энтропии между ними. В предположении потенциальности течения в каждом из слоев ($\mathbf{v}_{1,2} = \nabla\varphi_{1,2}$) и в пренебрежении звуковыми степенями свободы ($\mathrm{div}(\bar\rho(z)\nabla\varphi_{1,2}) \approx 0$, где $\bar\rho(z)$ — средняя равновесная плотность) выведены уравнения движения границы раздела в терминах формы самой поверхности $z = \eta(x, y, t)$ и разности граничных значений двух потенциалов поля скорости: $\psi(x, y, t) = \psi_1 - \psi_2$. Доказана гамильтонова структура полученных уравнений, задаваемая лагранжианом вида $\mathcal{L} = \int \bar\rho(\eta)\eta_t\psi\, dx\, dy - \mathcal{H}\{\eta, \psi\}$. Рассматриваемая система является простейшей теоретической моделью для изучения внутренних волн в резко стратифицированной атмосфере, в которой существенно учитывается уменьшение равновесной плотности газа за счет его сжимаемости при увеличении высоты. Для плоских течений сделано обобщение на случай, когда в каждом из слоев имеется своя постоянная потенциальная завихренность. Исследована система с модельной зависимостью $\bar\rho(z) \propto e^{-2\alpha z}$, при которой гамильтониан $\mathcal{H}\{\eta, \psi\}$ удается представить в явном виде. Рассмотрен длинноволновый динамический режим с учетом дисперсионных поправок и выведено приближенное нелинейное уравнение вида $u_t + auu_x - b[-\hat\partial_x^2 + \alpha^2]^{1/2}u_x = 0$ (уравнение Смита) для медленной эволюции бегущей волны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Внутренние волны являются важной составляющей в динамике таких сложных систем, как атмосфера или океан (см., например, [1–10] и ссылки там). Как известно, эти волны распространяются в жидкой среде на фоне некоторой неоднородности внутренних свойств жидкости (газа). В океане определяющую роль играют концентрация солей и температура, а в атмосфере это, в основном, удельная энтропия, а также влажность воздуха. Сюда же можно условно отнести и неоднородности сдвиговых течений. Динамика внутренних волн существенным образом зависит от того, является ли стратификация плавной в достаточно широком диапазоне высот, либо изменение свойств жидкости происходит довольно резко вблизи некоторой поверхности. Последний случай, как правило, более удобен для теоретических исследований, поскольку пространственная размерность задачи эффективно понижается. Во многих работах поэтому рассматриваются упрощенные модели океана или атмосферы, где система состоит из нескольких слоев, в каждом из которых жидкость однородна, и затем изучается динамика границ раздела между слоями (см. [11–17] и ссылки там). Следует отметить, что до сих пор во всех таких конечно-слойных моделях жидкость предполагалась несжимаемой, даже при моделировании атмосферы.

В настоящей работе рассмотрена существенно сжимаемая двухслойная модель атмосферы. Здесь предполагается, что имеется резкая граница $z = \eta(x, y, t)$, разделяющая две области потенциального течения, в каждой из которых удельная энтропия принимает некоторое постоянное значение. При этом относительная разность удельных энтропий невелика, что обеспечивает медленность характерных скоростей течения по сравнению с локальной скоростью звука. Соответственно, акустические степени свободы можно эффективно «отфильтровать», наложив условия $\nabla \cdot (\bar\rho(z)\mathbf{v}) = 0$ в каждом из слоев ($\bar\rho(z)$ — равновесная плотность), вместо рассмотрения полного уравнения непрерывно-

*E-mail: ruban@itp.ac.ru

сти $\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$. Эта идея исключения звуковых волн использовалась ранее для получения упрощенных уравнений, описывающих конвекцию и внутренние волны в непрерывно стратифицированной сжимаемой жидкости [18–20], а также медленные изэнтропические завихренные течения в сжимаемой жидкости, находящейся в статическом внешнем поле [21, 22]. Отличие рассматриваемой здесь модели состоит в том, что условие потенциальности течения в каждом из слоев совместно с уравнением $\nabla \cdot (\bar\rho(z) \nabla \varphi) = 0$ для потенциала скорости позволяют представить уравнения движения в терминах самой формы поверхности раздела $z = \eta(x, y, t)$ и разности двух граничных значений потенциала скорости. Более того, удается доказать гамильтонову структуру полученных уравнений, которая является обобщением открытой В. Е. Захаровым канонической структуры в динамике волн на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости [23–25]. В двумерном случае можно рассматривать в рамках двухслойной модели также сдвиговые течения с постоянной потенциальной завихренностью в каждом из слоев. При этом гамильтонова теория естественным образом модифицируется. В качестве основных результатов настоящей работы следует еще назвать вывод закона дисперсии для внутренних волн в двухслойной сжимаемой атмосфере, а также вывод нелинейного уравнения, промежуточного между уравнением Кортевега–де Вриза и уравнением Бенджамина–Оно [26, 27]. Это уравнение определяет медленную эволюцию бегущей волны конечной амплитуды с учетом дисперсии специального вида, имеющей место в рассматриваемой модели. Впервые подобное уравнение было выведено в ином физическом контексте Р. Смитом [28], который теоретически исследовал континентально-шельфовые волны в океане.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 выводятся упрощенные уравнения двухслойной сжимаемой модели атмосферы и доказывается их гамильтонова структура. В разд. 3 проделаны конкретные вычисления для случая экспоненциального профиля равновесной плотности. В разд. 4 сделано обобщение модели на плоский случай с кусочно-постоянной потенциальной завихренностью. В разд. 5 кратко обсуждаются условия применимости модели, а также перспективы дальнейших исследований. Наконец, в Приложении выведена трехмерная функция Грина, определяющая гамильтониан системы с учетом плоской нижней границы атмосферы.

2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА

Пусть в равновесии первый слой газа занимает область $0 < z < h$ и имеет плотность $\bar\rho_1(z)$, а второй слой занимает область $z > h$ и имеет плотность $\bar\rho_2(z)$ (для простоты мы предположили, что нижняя твердая граница — «земная поверхность» — плоская, но и в случае нетривиальной топографии можно провести аналогичное рассмотрение). Разумеется, функции $\bar\rho_1(z)$ и $\bar\rho_2(z)$ не могут быть произвольными, так как фактически они определяются условием гидростатического баланса и уравнением состояния газа (см. ниже). Для дальнейшего вывода приближенных уравнений, описывающих медленные по сравнению со скоростью звука c потенциальные движения в такой системе, весьма существенным является условие

$$\bar\rho_1 - \bar\rho_2 \ll \bar\rho(z) = \frac{\bar\rho_1 + \bar\rho_2}{2}.$$

Исходными уравнениями потенциального изэнтропического течения газа в каждом из слоев являются нестационарное уравнение Бернулли и уравнение непрерывности,

$$\partial_t \varphi + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} = -w(\rho) - gz + \text{const}, \tag{1}$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \nabla \varphi) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал поля скорости $\mathbf{v}$, удовлетворяющий условию обращения в нуль нормальной производной на твердой границе, т. е. $\partial_z \varphi(x, y, 0) = 0$; $\rho(\mathbf{r}, t)$ — плотность, $w(\rho)$ — удельная энтальпия, определяемая формулой

$$w(\rho) = w_{1,2}(\rho) = \int\limits_0^\rho \frac{dp_{1,2}(\rho)}{\rho}, \tag{3}$$

где $p = p_{1,2}(\rho)$ — давление как функция плотности в каждом из слоев, причем

$$p_2(\rho) - p_1(\rho) \ll \frac{p_2(\rho) + p_1(\rho)}{2}.$$

В состоянии равновесия потенциал скорости $\varphi = 0$, энтальпия $w_{1,2}(\bar\rho_{1,2}(z)) = \text{const}_{1,2} - gz$, а давление связано с плотностью гидростатической формулой

$$\bar p_{1,2}(z) = p_0 - g \int\limits_h^z \bar\rho_{1,2}(z)\, dz. \tag{4}$$

Рассмотрим медленные течения, когда $p_{1,2} = \bar p_{1,2}(z) + \tilde p_{1,2}$ и $w_{1,2} \approx \text{const}_{1,2} - gz + \tilde p_{1,2}/\bar\rho(z)$, где

$\tilde{p}_{1,2}$ — относительно малые поправки к давлению за счет течения жидкости. Уравнения медленного движения в главном порядке по v/c принимают вид

$$\partial_t \varphi_{1,2} + \frac{(\nabla \varphi_{1,2})^2}{2} + \frac{\tilde{p}_{1,2}}{\bar{\rho}(z)} = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot (\bar{\rho}(z) \nabla \varphi_{1,2}) = 0. \tag{6}$$

Именно пренебрежение временной производной $\partial_t \rho$ в уравнении непрерывности позволяет исключить из рассмотрения звуковые степени свободы и оставить только интересующую нас медленную динамику внутренних волн, обусловленную относительно малой разностью равновесных профилей плотности. Сжимаемость среды в данной модели проявляется в том, что при медленном течении объем каждого жидкого элемента эффективно «подстраивается» под равновесную плотность $\bar{\rho}(z)$, расширяясь при движении вверх и сжимаясь при движении вниз (поскольку $\bar{\rho}'(z) < 0$).

Пусть форма возмущенной границы задается уравнением $z = \eta(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x} = (x, y)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости, и пусть граничные значения потенциалов скорости есть $\psi_{1,2}(\mathbf{x}, t) = \varphi_{1,2}(\mathbf{x}, \eta(x, y, t), t)$. На свободной границе раздела нормальная компонента поля скорости V_n обязана быть непрерывной, равно как и давление. Ясно также, что скорость движения самой границы вдоль нормали $\mathbf{n}$ (для определенности нормаль направлена от первой жидкости ко второй) равна V_n. Из этих соображений выводятся два кинематических условия и одно динамическое условие, которые определяют эволюцию системы:

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right|_{z=\eta} = \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right|_{z=\eta} \equiv V_n, \tag{7}$$

$$\eta_t = V_n \sqrt{1 + (\nabla \eta)^2}, \tag{8}$$

$$\left. \left\{ \bar{\rho}[\varphi_{1,t} - \varphi_{2,t}] + \frac{\bar{\rho}}{2}[(\nabla \varphi_1)^2 - (\nabla \varphi_2)^2] \right\} \right|_{z=\eta} + g \int\limits_h^\eta [\bar{\rho}_1(z) - \bar{\rho}_2(z)]\, dz = 0. \tag{9}$$

Из условия (7) следует, что ψ_1 и ψ_2 связаны линейной интегральной зависимостью, так что если задать их разницу $\psi(\mathbf{x}, t) \equiv \psi_1 - \psi_2$, то каждый из потенциалов определится однозначно. С учетом равенств

$$\frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial t} = \left. \left[\frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial z} \right) \eta_t \right] \right|_{z=\eta} \tag{10}$$

нетрудно проверить, что уравнения движения для двух основных неизвестных функций $\eta(\mathbf{x}, t)$ и $\psi(\mathbf{x}, t)$ имеют гамильтонову структуру:

$$\bar{\rho}(\eta) \eta_t = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi}, \quad -\bar{\rho}(\eta) \psi_t = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta}, \tag{11}$$

которой соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L} = \int \bar{\rho}(\eta) \eta_t \psi \, d^2x - \mathcal{H}\{\eta, \psi\}. \tag{12}$$

При этом гамильтонов функционал $\mathcal{H}\{\eta, \psi\}$ определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d^2x \int\limits_0^{\eta(\mathbf{x})} \bar{\rho}(z) \frac{(\nabla \varphi_1)^2}{2} dz + \\ &+ \int d^2x \int\limits_{\eta(\mathbf{x})}^{\infty} \bar{\rho}(z) \frac{(\nabla \varphi_2)^2}{2} dz + g \int W(\eta)\, d^2x = \\ &= \frac{1}{2} \int \bar{\rho}(\eta) \psi V_n d^2x + g \int W(\eta)\, d^2x, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$W'(\eta) = \int\limits_h^\eta [\bar{\rho}_1(z) - \bar{\rho}_2(z)]\, dz, \tag{14}$$

т. е. гамильтониан $\mathcal{H}$ представляет собой сумму кинетической энергии и эффективной потенциальной энергии. Докажем сделанные утверждения.

Действительно, вариация $\delta\psi$ влечет за собой некоторые вариации $\delta\varphi_{1,2}$ и, тем самым, — вариацию кинетической энергии. Соответствующая вариация гамильтониана после интегрирования по частям определяется интегралом по поверхности $z = \eta(\mathbf{x})$ и принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}\Big|_{\delta\psi} &= \int\limits_S \bar{\rho}(\nabla \varphi_1 \cdot \mathbf{n}) \delta \psi_1 dS - \int\limits_S \bar{\rho}(\nabla \varphi_2 \cdot \mathbf{n}) \delta \psi_2 dS = \\ &= \int \bar{\rho}(\eta) V_n \sqrt{1 + (\nabla \eta)^2} \delta \psi d^2x. \end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда имеем

$$\delta \mathcal{H} / \delta \psi = \bar{\rho}(\eta) V_n \sqrt{1 + (\nabla \eta)^2}$$

и, сравнивая с уравнением (8), доказываем первое из уравнений (11).

Вычисление вариационной производной $\delta\mathcal{H}/\delta\eta$ чуть менее просто, поскольку при варьировании области интегрирования необходимо еще следить за тем, чтобы после вариации границы раздела разность потенциалов $\psi_1-\psi_2$ принимала на новой границе то же самое значение $\psi(\mathbf{x})$, которое было до вариации на старой границе. Нетрудно понять, что в силу этого условия значения потенциалов на месте старой границы после варьирования $\delta\eta$ изменяются на малые величины $\delta\psi_{1,2}^{old}=-\delta\eta(\partial_z\varphi_{1,2})|_{z=\eta}$. Соответственно, вариация кинетической энергии в этом случае состоит из двух вкладов. Первый вклад возникает из изменения области интегрирования:

$$\delta\mathcal{K}^{(1)}\Big|_{\delta\eta}=\int\frac{\bar\rho}{2}[(\nabla\varphi_1)^2-(\nabla\varphi_2)^2]\Big|_{z=\eta}\delta\eta\,d^2x. \quad (16)$$

Второй вклад связан с изменениями потенциалов $\varphi_{1,2}$ в непроварьированных областях благодаря вариациям их граничных значений на величины $\delta\psi_{1,2}^{old}$. Легко понять, что этот вклад равен

$$\delta\mathcal{K}^{(2)}\Big|_{\delta\eta}=\int(\delta\mathcal{H}/\delta\psi)(\delta\psi_1^{old}-\delta\psi_2^{old})\,d^2x=$$
$$=-\int\bar\rho V_n\sqrt{1+(\nabla\eta)^2}[\partial_z\varphi_1-\partial_z\varphi_2]\Big|_{z=\eta}\delta\eta\,d^2x. \quad (17)$$

Принимая во внимание также вариацию эффективной потенциальной энергии, получаем в итоге

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\eta}=\frac{\bar\rho}{2}[(\nabla\varphi_1)^2-(\nabla\varphi_2)^2]\Big|_{z=\eta}-$$
$$-\bar\rho V_n\sqrt{1+(\nabla\eta)^2}[\partial_z\varphi_1-\partial_z\varphi_2]\Big|_{z=\eta}+$$
$$+g\int\limits_h^\eta[\bar\rho_1(z)-\bar\rho_2(z)]\,dz. \quad (18)$$

Учитывая уравнения (9) и (10), выводим отсюда второе из уравнений (11).

Гамильтоновость системы в принципе позволяет применить к ней набор стандартных методов исследования [25]. Однако техническая трудность состоит в том, что кинетическая энергия выражается непрямым образом — через решения уравнения (6) в частных производных с непостоянными коэффициентами, и к тому же в областях с искривленной границей $z=\eta(\mathbf{x})$. Допустим все же, что нам известны частные решения уравнения (6) в виде линейных комбинаций

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x},z)=[A\Phi_k^{(-)}(z)+B\Phi_k^{(+)}(z)]e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (19)$$

с убывающими по амплитуде при $z\to\infty$ функциями $\Phi_k^{(-)}(z)$ и с растущими по амплитуде при $z\to\infty$ функциями $\Phi_k^{(+)}(z)$. Другими словами, для любого k известно общее решение уравнения

$$\Phi''(z)+\frac{\bar\rho'(z)}{\bar\rho(z)}\Phi'(z)-k^2\Phi(z)=0. \quad (20)$$

Тогда для приближенного вычисления гамильтониана при малых отклонениях $\zeta(\mathbf{x},t)=\eta(\mathbf{x},t)-h$ с условием $|\nabla\zeta|\ll 1$ можно написать

$$\varphi_1(\mathbf{x},z)=$$
$$=\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2}[A_{\mathbf{k}}^{(1)}\Phi_k^{(-)}(z)+B_{\mathbf{k}}^{(1)}\Phi_k^{(+)}(z)]e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (21)$$

$$\varphi_2(\mathbf{x},z)=\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2}A_{\mathbf{k}}^{(2)}\Phi_k^{(-)}(z)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (22)$$

Затем из граничных условий

1) $\partial_z\varphi_1(\mathbf{x},0)=0$,
2) $\partial_n\varphi_1(\mathbf{x},h+\zeta(\mathbf{x}))=\partial_n\varphi_2(\mathbf{x},h+\zeta(\mathbf{x}))$,
3) $\varphi_1(\mathbf{x},h+\zeta(\mathbf{x}))-\varphi_2(\mathbf{x},h+\zeta(\mathbf{x}))=\psi(\mathbf{x})$

можно найти неизвестные функции $A_{\mathbf{k}}^{(1)}$, $B_{\mathbf{k}}^{(1)}$ и $A_{\mathbf{k}}^{(2)}$ (и, как следствие, искомую величину $V_n(\mathbf{x})$) в виде разложений по ζ. Такой метод разложения гамильтониана в интегростепенной ряд по малому параметру характерной крутизны является обычным в теории морских волн [23–25]. В частности, этим способом легко получить закон дисперсии для волн малой амплитуды:

$$\omega_k^2=\tilde g(h)\frac{D_1(h,k)D_2(h,k)}{D_2(h,k)+D_1(h,k)}, \quad (23)$$

где $\tilde g(h)$ — перенормированное ускорение свободного падения: $\tilde g(h)=g[\bar\rho_1(h)-\bar\rho_2(h)]/\bar\rho(h)$, и где использованы обозначения

$$D_1(h,k)=\frac{{\Phi'}_k^{(+)}(h){\Phi'}_k^{(-)}(0)-{\Phi'}_k^{(-)}(h){\Phi'}_k^{(+)}(0)}{\Phi_k^{(+)}(h){\Phi'}_k^{(-)}(0)-\Phi_k^{(-)}(h){\Phi'}_k^{(+)}(0)}, \quad (24)$$

$$D_2(h,k)=-\frac{{\Phi'}_k^{(-)}(h)}{\Phi_k^{(-)}(h)}. \quad (25)$$

Заметим, что $D_1(h,k)>0$, $D_2(h,k)>0$.

Что касается рассматриваемой нами системы, то здесь в некоторых случаях для вычисления гамильтонинана может оказаться удобным использование другого приема. Поскольку кинетическая энергия имеет вид

$$\mathcal{K}=\frac{1}{2}\int(\mathbf{j}\cdot\mathbf{v})\,d^2x\,dz,$$

где $\mathbf{j}=\bar\rho\mathbf{v}$ — бездивергентное поле плотности тока, мы вправе ввести для $\mathbf{j}$ векторный потенциал $\mathbf{A}$, удовлетворяющий уравнению

$$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\bar\rho(z)}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\mathbf{\Omega}\equiv\mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \quad (26)$$

с граничным условием

$$\partial_x A^{(y)}(x,y,0) - \partial_y A^{(x)}(x,y,0) = 0$$

и затем переписать интеграл кинетической энергии в виде

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\int \mathbf{A}\cdot\mathbf{\Omega}\, d^2x\, dz = \\ = \frac{1}{2}\int G_{ik}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\Omega_i(\mathbf{r}_1)\Omega_k(\mathbf{r}_2)\; d^3r_1 d^3r_2, \quad (27)$$

где $G_{ik}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ — функция Грина для уравнения (26). Сингулярное поле ротора скорости целиком сосредоточено на границе раздела $z=\eta(\mathbf{x})$ и линии его совпадают с линиями уровня функции $\psi(\mathbf{x})$ на этой поверхности, поэтому в результате интегрирование по полупространству сведется к интегрированию по поверхности $z=\eta(\mathbf{x})$ путем замены

$$(\Omega^{(x)},\Omega^{(y)},\Omega^{(z)})\, d\mathbf{r} \to \\ \to (\psi_y, -\psi_x, \psi_y\eta_x - \psi_x\eta_y)\, dx\, dy. \quad (28)$$

В качестве простейшего примера в данной работе будет рассмотрен экспоненциальный профиль равновесной плотности: $\bar\rho(z)=\rho_0 e^{-2\alpha z}$, когда уравнение (26) после подстановки $\mathbf{A}=\rho_0 e^{-2\alpha z}\mathbf{F}$ превращается в уравнение с постоянными коэффициентами. Разумеется, такая зависимость, вообще говоря, не согласуется с адиабатическими уравнениями состояния $p(\rho)$ реальных газов, для которых $p\approx C_1\rho^\gamma$, где γ — показатель адиабаты (для одноатомных газов $\gamma=5/3$, для газов из двухатомных молекул $\gamma=7/5$), и поэтому

$$\bar\rho(z)\approx C_2(z_0-z)^{1/(\gamma-1)},$$

где z_0 — высота, на которой равновесная плотность обращается в нуль (в этих случаях у атмосферы имеется верхняя граница). Однако локально по координате z вблизи $z=h$ любая реальная зависимость $\bar\rho(z)$ может быть аппроксимирована экспонентой, если рассматриваются не слишком длинные волны. Следует все же отметить, что случай $\bar\rho(z)\approx C_2(z_0-z)^{1/(\gamma-1)}$ также допускает аналитическое исследование, хотя и более трудоемкое, поскольку функции $\Phi_k^{(\pm)}(z)$ в частных решениях (19) уравнения (6) выражаются тогда через модифицированные функции Бесселя I_ν и K_ν с индексом $\nu=[(\gamma-1)^{-1}-1]/2$:

$$\Phi_k^{(-)}(z) = [k(z_0-z)]^{-\nu} I_\nu(k(z_0-z)), \quad (29)$$

$$\Phi_k^{(+)}(z) = [k(z_0-z)]^{-\nu} K_\nu(k(z_0-z)). \quad (30)$$

3. СЛУЧАЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ РАВНОВЕСНОЙ ПЛОТНОСТИ

Итак, найдем гамильтониан нашей системы в явном виде при $\bar\rho(z)=\rho_0\exp(-2\alpha z)$, для чего сначала будем решать уравнение (26). Рассмотрим здесь более простой случай $\alpha h\gg 1$, когда наличием плоской нижней границы при $z=0$ можно пренебречь, поскольку вклад от нее, как выяснится ниже, оказывается порядка $\exp(-2h\alpha)$. Более громоздкое трехмерное решение для векторного потенциала с учетом твердой границы $z=0$ дано в Приложении. Для решения уравнения (26) используем подстановку $\mathbf{A}=\rho_0 e^{-2\alpha z}\mathbf{F}$ и переписываем уравнение в фурье-представлении:

$$i\mathbf{k}\times[(i\mathbf{k}-2\alpha\mathbf{e}_z)\times\mathbf{F_k}] = \mathbf{\Omega_k}.$$

Раскрывая двойное векторное произведение и выбирая калибровку $\mathbf{k}\cdot\mathbf{F_k}=0$, получаем простое уравнение

$$[k^2 + 2i\alpha(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_z)]\mathbf{F_k} = \mathbf{\Omega_k}. \quad (31)$$

Записываем убывающее на бесконечности решение этого уравнения:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathbf{\Omega_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{[k^2+2i\alpha(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_z)]} = \\ = \int \frac{\exp[\alpha(z-z_1-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|)]}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1)\, d^3r_1. \quad (32)$$

Соответственно, кинетическая энергия трехмерной системы без учета твердой нижней границы дается следующим выражением:

$$\mathcal{K} = \frac{\rho_0}{8\pi}\int \frac{e^{-\alpha|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}\times \\ \times e^{-\alpha(z_2+z_1)}\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1)\, d^3r_1 d^3r_2. \quad (33)$$

Переходя с помощью формулы (28) от интегрирования по пространству к интегрированию по свободной поверхности, на которой распределено сингулярное поле завихренности, получим требуемое выражение в терминах η и ψ,

$$\mathcal{K} = \frac{\rho_0}{8\pi}\int \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^2+(\eta_1-\eta_2)^2}}\times \\ \times\left\{\exp[-\alpha\sqrt{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^2+(\eta_1-\eta_2)^2}-\alpha(\eta_1+\eta_2)]\right\}\times \\ \times\{\nabla\psi_1\cdot\nabla\psi_2 + [\nabla\psi_1\times\nabla\eta_1]\cdot[\nabla\psi_2\times\nabla\eta_2]\}\times \\ \times\, d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (34)$$

где $\nabla\eta$ и $\nabla\psi$ — двумерные градиенты. При необходимости рассмотрения слабонелинейного режима в динамике волн этот функционал может быть достаточно легко разложен в интегростепенной ряд по малым возмущениям ψ и ζ.

Обратимся теперь к плоским течениям. Заметим, что в двумерном случае $F_{\mathbf{k}}$ и $\Omega_{\mathbf{k}}$ представляют собой по сути (псевдо)скалярные величины. Наличие границы $z = 0$ может быть при этом учтено обобщенным методом изображений, в результате чего

$$F(x,z) = \frac{1}{2\pi} \times \int e^{\alpha(z-z_1)} \Big[K_0\left(\alpha\sqrt{(x-x_1)^2+(z-z_1)^2}\right) - K_0\left(\alpha\sqrt{(x-x_1)^2+(z+z_1)^2}\right)\Big] \times \Omega(x_1,z_1)\, dx_1 dz_1. \quad (35)$$

Здесь $K_0(r)$ — известная функция Макдоналда, для которой два из многих возможных интегральных представлений имеют вид

$$K_0(\sqrt{a^2+b^2}) = \int \frac{d^2k}{2\pi}\, \frac{e^{ik_1a+ik_2b}}{k_1^2+k_2^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ika-|b|\sqrt{k^2+1})}{2\sqrt{k^2+1}}\, dk. \quad (36)$$

Таким образом, функция Грина в рассматриваемом случае имеет вид

$$G(x_2-x_1,z_1,z_2) = \frac{\rho_0}{2\pi} \times \Big[K_0\left(\alpha\sqrt{(x_1-x_2)^2+(z_1-z_2)^2}\right) - K_0\left(\alpha\sqrt{(x_1-x_2)^2+(z_1+z_2)^2}\right)\Big] \times e^{-\alpha(z_1+z_2)}. \quad (37)$$

Выражение для кинетической энергии плоского двухслойного течения выглядит следующим образом:

$$\mathcal{K}_{2D} = \frac{\rho_0}{4\pi}\int e^{-\alpha(\eta_1+\eta_2)} \times \Big[K_0\left(\alpha\sqrt{(x_1-x_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2}\right) - K_0\left(\alpha\sqrt{(x_1-x_2)^2+(\eta_1+\eta_2)^2}\right)\Big] \times \psi_1'\psi_2' dx_1 dx_2, \quad (38)$$

где $\psi' = \partial\psi/\partial x$. Использование формул (36) позволяет представить этот функционал в несколько ином виде:

$$\mathcal{K}_{2D} = \frac{\rho_0}{2}\int dx_1 dx_2 \psi_1'\psi_2' e^{-\alpha(\eta_1+\eta_2)} e^{ik(x_1-x_2)} \times \int \frac{e^{-|\eta_1-\eta_2|\sqrt{k^2+\alpha^2}} - e^{-(\eta_1+\eta_2)\sqrt{k^2+\alpha^2}}}{2\sqrt{k^2+\alpha^2}}\frac{dk}{2\pi}. \quad (39)$$

Помимо того, что такое представление удобно для вычисления длинноволновой асимптотики в нелинейной динамике волн, о чем будет идти речь чуть ниже, оно также позволяет легко найти закон дисперсии для волн малой амплитуды. В самом деле, из уравнения (39) очевидно, что в квадратичном приближении гамильтониан дается формулой

$$\mathcal{H}^{[2]}_{2D} = \frac{\rho_0 e^{-2\alpha h}}{2} \times \int \left[\frac{1-e^{-2h\sqrt{k^2+\alpha^2}}}{2\sqrt{k^2+\alpha^2}}k^2\psi_{-k}\psi_k + \tilde g(h)\zeta_{-k}\zeta_k\right] \times \frac{dk}{2\pi}. \quad (40)$$

Решая соответствующие линеаризованные уравнения движения для фурье-компонент $\zeta_k(t)$ и $\psi_k(t)$, найдем достаточно нетривиальный закон дисперсии:

$$\omega_k^2 = \tilde g(h)k^2\frac{1-e^{-2h\sqrt{k^2+\alpha^2}}}{2\sqrt{k^2+\alpha^2}}. \quad (41)$$

Заметим, что этот же закон дисперсии имеет место и в трехмерном случае в силу изотропии системы в горизонтальной плоскости (что также подтверждается формулой (23)).

Рассмотрим теперь предельный случай $\alpha\eta \ll 1$ и характерные волновые числа k, удовлетворяющие условиям $\alpha\eta \lesssim k\eta \ll 1$. Раскладывая экспоненты в интеграле (39) по степеням малых аргументов, получим приближенный функционал кинетической энергии с учетом первой поправки по $\alpha\eta$,

$$\mathcal{K}_*\{\eta,\psi\} = \frac{\rho_0}{2}\int \eta(1-2\alpha\eta)(\psi')^2 dx - \frac{\rho_0}{2}\int (\psi'\eta)[-\hat\partial_x^2+\alpha^2]^{1/2}(\psi'\eta)\, dx. \quad (42)$$

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию $q = [1-\exp(-2\alpha\eta)]/2\alpha$, которая с точностью до постоянного множителя ρ_0 является канонически сопряженной по отношению к функции ψ, и перепишем приближенный гамильтониан в терминах q и ψ:

$$\mathcal{H}_*\{q,\psi\} = \frac{\rho_0}{2}\int q(1-\alpha q)(\psi')^2 dx - \frac{\rho_0}{2}\int (\psi' q)[-\hat\partial_x^2+\alpha^2]^{1/2}(\psi' q)\, dx + \rho_0\tilde g(0)\int\left[\frac{q^2}{2}+\alpha\beta\frac{q^3}{3}\right] dx. \quad (43)$$

Здесь β — безразмерный параметр, зависящий от поведения разности равновесных плотностей $\bar\rho_1(z)-\bar\rho_2(z)$ вблизи $z=0$. Рассматривая распространение относительно малых, хотя и конечных, возмущений $\tilde q(x,t)=q(x,t)-\bar q$, можно стандартным способом вывести слабонелинейное уравнение для $u(x,t)=\psi_x$, описывающее медленную эволюцию бегущей волны с учетом слабой дисперсии:

$$u_t+\bar c u_x+\bar a u u_x - \\ -\frac{\bar c\bar q}{2}\left\{[-\hat\partial_x^2+\alpha^2]^{1/2}-\alpha\right\}u_x=0, \quad (44)$$

где скорость распространения длинных линейных волн $\bar c \approx [\tilde g(0)\bar q]^{1/2}$ и коэффициент $\bar a \approx 3/2$. Уравнение такого вида иногда называют уравнением Смита, поскольку впервые подобное уравнение было получено в работе [28], где изучались так называемые континентально-шельфовые волны в океане. Интересно отметить, что своеобразный вид дисперсионной поправки делает это уравнение промежуточным между двумя знаменитыми интегрируемыми моделями — уравнением Кортевега–де Вриза и уравнением Бенджамина–Оно [26, 27]. В этом смысле уравнение Смита подобно уравнению ILW (intermediate long wave equation) (см., например, [11, 12, 13, 29, 30]), однако, как было выяснено в работе [31], уравнение Смита в отличие от уравнения ILW не является интегрируемым.

4. ПЛОСКИЕ ТЕЧЕНИЯ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

Сделаем одно важное обобщение гамильтоновой теории, возможное для двумерных изэнтропических течений (в плоскости xz), а именно учтем тот факт, что потенциальная завихренность $\tilde\gamma=-\Omega^{(y)}/\rho$ в двумерном случае подчиняется уравнению переноса

$$\tilde\gamma_t+\mathbf{v}\cdot\nabla\tilde\gamma=0. \quad (45)$$

Этот закон сохранения потенциальной завихренности вдоль траектории каждой жидкой частицы позволяет при рассмотрении плоских течений с кусочно-постоянной функцией $\tilde\gamma(x,z,t)$ следить только за движением границ, на которых $\tilde\gamma$ претерпевает разрыв. В данной статье для простоты будет предполагаться, что у $\tilde\gamma$ имеется только один скачок, и что он совпадает с границей между слоями $z=\eta(x,t)$, хотя в принципе такое совпадение не обязательно и можно рассматривать отдельную кривую $z=\eta_*(x,z,t)$, на которой происходит скачок.

Пусть (достаточно малые) потенциальные завихренности в обоих слоях равны $\gamma_{1,2}$, так что соответствующие стационарные горизонтальные сдвиговые течения $U_{1,2}(z)\ll c$ удовлетворяют условиям (разностью между $\bar\rho_{1,2}$ и $\bar\rho$ пренебрегаем)

$$-U'_{1,2}(z)=\gamma_{1,2}\bar\rho(z). \quad (46)$$

Будем предполагать, что в стационарном состоянии у профиля скорости имеется излом при $z=h$, т.е. $U_{1,2}(z)=-\gamma_{1,2}\mu(z)$, где

$$\mu(z)=\int_h^z\bar\rho(\xi)\,d\xi. \quad (47)$$

Двумерное поле скорости в каждом из слоев теперь имеет вид

$$\mathbf{v}_{1,2}(x,z,t)= \\ =(U_{1,2}(z)+\partial_x\varphi_{1,2}(x,z,t),\ \partial_z\varphi_{1,2}(x,z,t)), \quad (48)$$

причем потенциалы $\varphi_{1,2}$ удовлетворяют прежнему уравнению (6), $\nabla\cdot\bar\rho\nabla\varphi_{1,2}=0$, из которого следует существование соответствующих функций тока $\vartheta_{1,2}(x,z,t)$:

$$\bar\rho\partial_x\varphi_{1,2}=\partial_z\vartheta_{1,2}, \quad \bar\rho\partial_z\varphi_{1,2}=-\partial_x\vartheta_{1,2}. \quad (49)$$

Вместо уравнения (5) теперь мы должны иметь дело с его обобщением

$$\partial_t\varphi_{1,2}+\gamma_{1,2}\vartheta_{1,2}+U_{1,2}(z)\partial_x\varphi_{1,2}+ \\ +\frac{(\nabla\varphi_{1,2})^2}{2}+\frac{\tilde p_{1,2}}{\bar\rho(z)}=0, \quad (50)$$

которое обеспечивает выполнение двумерного уравнения Эйлера при постоянстве потенциальной завихренности и условии $\nabla\cdot(\bar\rho\mathbf{v})=0$. С учетом того факта, что полные функции тока рассматриваемых течений есть

$$\Theta_{1,2}(x,z,t)=\vartheta_{1,2}(x,z,t)-\frac{U_{1,2}^2(z)}{2\gamma_{1,2}}, \quad (51)$$

уравнение (50) может быть представлено также в виде

$$\partial_t\varphi_{1,2}+\gamma_{1,2}\Theta_{1,2}+\frac{(\mathbf{v}_{1,2})^2}{2}+\frac{\tilde p_{1,2}}{\bar\rho(z)}=0. \quad (52)$$

Заметим теперь, что на границе раздела $z=\eta(x,t)$ имеют место равенства

$$-\partial_x\Theta_1(x,\eta(x))=-\partial_x\Theta_2(x,\eta(x))= \\ =\bar\rho(\eta)\eta_t=\bar\rho(\eta)V_n\sqrt{1+\eta'^2}, \quad (53)$$

где $V_n = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}$. Приравнивая нулю разность давлений на границе раздела и рассуждая аналогично тому, как это было сделано в случае $\gamma_{1,2} = 0$, придем к выводу, что эволюционные уравнения для рассматриваемой системы имеют следующую структуру:

$$\bar\rho(\eta)\eta_t = \delta\mathcal{H}/\delta\psi, \tag{54}$$

$$-\bar\rho(\eta)\psi_t + \gamma\bar\rho(\eta)\partial_x^{-1}[\bar\rho(\eta)\eta_t] = \delta\mathcal{H}/\delta\eta, \tag{55}$$

где $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, а гамильтониан $\mathcal{H}$ равен сумме полной кинетической энергии и эффективной потенциальной энергии. Легко убедиться прямой проверкой, что этим уравнениям соответствует лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = \int \psi\mu_t\,dx + \frac{\gamma}{2}\int \mu\partial_x^{-1}\mu_t\,dx - \mathcal{H}\{\mu,\psi\}, \tag{56}$$

где $\mu = \mu(\eta)$ (см. уравнение (47)). Для внутренних волн в несжимаемой жидкости аналогичная структура была получена в работах [15, 17] с той разницей, что в нашем случае $\mu(\eta)$ — нелинейная функция (см. также статью [32] о волнах на свободной поверхности несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью).

Интересно отметить, что в квадратичном приближении лагранжиан (56) принимает вид

$$\mathcal{L}^{[2]} = \bar\rho(h)\int \psi\zeta_t\,dx + \\ + \frac{\gamma\bar\rho^2(h)}{2}\int \zeta\partial_x^{-1}\zeta_t\,dx - \mathcal{H}^{[2]}\{\zeta,\psi\}, \tag{57}$$

причем, как нетрудно показать, функционал $\mathcal{H}^{[2]}\{\zeta,\psi\}$ не зависит от γ_1 и γ_2 (зависимость от γ_1 и γ_2 появляется только в более высоких порядках):

$$\mathcal{H}^{[2]} = \frac{\bar\rho(h)}{2}\times \\ \times\int \left[N(h,k)k^2\psi_{-k}\psi_k + \tilde g(h)\zeta_{-k}\zeta_k\right]\frac{dk}{2\pi}. \tag{58}$$

Функция $N(h,k)$ выражается через функцию Грина $G[(x_2-x_1),z_1,z_2]$ следующим образом:

$$\bar\rho(h)N(h,k) = \int_{-\infty}^{\infty} G[x,h,h]e^{-ikx}dx. \tag{59}$$

При этом $\omega_0^2(k) = \tilde g(h)k^2N(h,k)$ — закон дисперсии в случае $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (ср. с (23)). Например, для экспоненциального профиля равновесной плотности квадратичный гамильтониан дается выражением (40). Решая соответствующие линейные уравнения

$$\dot\zeta_k = N(h,k)k^2\psi_k, \tag{60}$$

$$-\dot\psi_k + \gamma\bar\rho(h)\frac{\dot\zeta_k}{ik} = \tilde g(h)\zeta_k, \tag{61}$$

получим закон дисперсии линейных волн при $\gamma \neq 0$:

$$\omega_k = \frac{1}{2}\gamma\bar\rho(h)kN(h,k) + \\ + \sqrt{\frac{1}{4}\left[\gamma\bar\rho(h)kN(h,k)\right]^2 + \tilde g(h)k^2N(h,k)}. \tag{62}$$

Поскольку сингулярная часть поля завихренности (сосредоточенная на границе раздела) определяется соотношением

$$-\Omega_s = [\psi' - \gamma\mu(\eta)]\delta(z-\eta(x,t)),$$

где $\delta(z-\eta(x,t))$ — функция Дирака, удобно ввести новую переменную

$$p(x,t) = \psi - \gamma\partial_x^{-1}\mu. \tag{63}$$

В переменных $\{\mu,p\}$ лагранжиан имеет вид (изменился знак перед вторым слагаемым)

$$\mathcal{L} = \int p\mu_t\,dx - \frac{\gamma}{2}\int \mu\partial_x^{-1}\mu_t\,dx - \mathcal{H}\{\mu,p\}. \tag{64}$$

Теперь, кроме сингулярной части завихренности, имеется еще и распределенная кусочно-постоянная часть, так что полное поле завихренности дается формулой

$$-\Omega(x,z,t) = p'(x,t)\delta[z-\eta(x,t)] + \\ + \gamma_2\bar\rho(z) + \gamma\bar\rho(z)\theta[\eta(x,t)-z], \tag{65}$$

где $\theta[\eta(x,t)-z]$ — функция единичного скачка (функция Хевисайда). Гамильтониан двумерной системы определяется с помощью функции Грина $G[(x_2-x_1),z_1,z_2]$ следующим выражением:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int G[(x_2-x_1),z_1,z_2]\Omega(x_1,z_1)\times \\ \times\Omega(x_2,z_2)\,dx_1dz_1dx_2dz_2 + g\int W(\eta)\,dx, \tag{66}$$

куда следует подставить (65) и после всех интегрирований выразить η через μ. Напомним, что в случае, когда $\bar\rho(z) = \rho_0\exp(-2\alpha z)$, функция Грина дается формулой (37). Заметим также, что в отсутствие скачка плотности имеется класс течений с $p \equiv 0$. Тогда динамика волн завихренности определяется лагранжианом

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{\gamma}{2}\int \mu\,\partial_x^{-1}\mu_t\,dx - \mathcal{H}_\gamma\{\mu\},$$

а закон дисперсии таких волн выражается формулой (62), в которой следует положить $\tilde g(h) = 0$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

В этой работе предложена модель сжимаемой двухслойной атмосферы, предназначенная для теоретического изучения внутренних волн на границе раздела между двумя изэнтропическими слоями газа с близкими значениями удельной энтропии. При выводе приближенных уравнений предполагалось, что скорости течения малы в сравнении с локальной скоростью звука. Следует отметить, что такое требование фактически устанавливает нижний предел на характерные волновые числа: $k \gtrsim |\bar{\rho}'(h)|/\bar{\rho}(h)$, поскольку при больших длинах волн поле скорости проникает достаточно высоко в верхний слой, где в силу изэнтропичности температура сильно понижена и соответственно мала локальная скорость звука, что нарушает исходное предположение модели.

До некоторой степени указанное ограничение снимается, если где-то над вторым слоем имеется еще и третий слой, с очень большой температурой, и поэтому границу между вторым и третьим слоем можно эффективно считать «твердой крышкой». Однако следует помнить, что в длинноволновом пределе (в условиях Земли это сотни и тысячи километров) становятся важными неоднородные горизонтальные движения всей атмосферы как целого, приближенно описываемые теорией «мелкой воды» с учетом силы Кориолиса и приводящие к изменениям квазиравновесного профиля плотности. Кроме того, сила Кориолиса нарушает потенциальность течения. Таким образом, предложенная здесь теория может описывать волны длиной не больше нескольких километров.

В настоящей работе были сделаны лишь первые шаги в изучении внутренних волн в атмосфере в рамках сжимаемой двухслойной модели. Направления дальнейших исследований можно кратко обрисовать следующим образом. Во-первых, очевидна возможность обобщения модели на большее число слоев и переход к непрерывному пределу, что несомненно ее обогатит, поскольку взаимодействие между слоями во многих случаях способно привнести новые нетривиальные эффекты (неустойчивости и т. д.). Во-вторых, следует упомянуть широкий класс задач о взаимодействии внутренних волн в атмосфере с неоднородностями земной поверхности (горами), которые также могут быть исследованы с помощью предложенной модели. В-третьих, динамика нелинейных волн может быть просчитана численными методами. В-четвертых, аналогичную гамильтонову формулировку можно использовать и при рассмотрении осесимметричных течений с кусочно-постоянной обобщенной потенциальной завихренностью. В-пятых, по всей видимости, аналогичные сжимаемые конечно-слойные модели возможны не только в рамках эйлеровской гидродинамики, но и в более широком классе консервативных гидродинамических систем, например, в гидродинамике релятивистской жидкости, находящейся в сильном статическом гравитационном поле, описываемом метрическим 4-тензором. Соответственно, имеется перспектива приложения подобной теории к астрофизическим задачам, в которых равновесная плотность обладает, как правило, сферической симметрией.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 09-01-00631, 07-01-92165), программы «Ведущие научные школы России» НШ-6885.2010.2 и программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поправка к трехмерной функции Грина за счет плоской границы

Для выполнения граничного условия

$$\partial_x F^{(y)}(x,y,0) - \partial_y F^{(x)}(x,y,0) = 0,$$

которое обеспечит обращение в нуль нормальной компоненты поля скорости на твердой плоской границе, добавим к частному решению (32) неоднородного уравнения (31) некоторое специальным образом подобранное решение соответствующего однородного уравнения, убывающее при $z \to \infty$:

$$\mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{x},z) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\mathbf{f_k} \times \\ \times \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + z\left(\alpha - \sqrt{k^2+\alpha^2}\right)\right], \quad (67)$$

где $\mathbf{f_k} = (f^{(x)}_{\mathbf{k}}, f^{(y)}_{\mathbf{k}}, 0)$ удовлетворяет условию двумерной поперечной калибровки $\mathbf{k}\cdot\mathbf{f_k} = 0$. Нетрудно понять, что нужно взять $\mathbf{f_k}$ в следующем виде (здесь и далее κ и ν — тензорные индексы в горизонтальной плоскости):

$$f^{(\kappa)}_{\mathbf{k}} = -\left(\delta_{\kappa\nu} - \frac{k_\kappa k_\nu}{k^2}\right)\int \frac{d\xi}{2\pi}\,\frac{\Omega^{(\nu)}(\mathbf{k},\xi)}{k^2+\xi^2+2i\alpha\xi}, \quad (68)$$

где

$$\Omega^{(\nu)}(\mathbf{k},\xi) \equiv \int \Omega^{(\nu)}(\mathbf{x}_1,z_1)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - i\xi z_1}\,d^2x_1dz_1$$

— фурье-образ горизонтальной составляющей поля завихренности. Преобразуем интеграл (68):

$$\int \frac{d\xi}{2\pi} \frac{\Omega^{(\nu)}(\mathbf{x}_1, z_1) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - i\xi z_1}}{k^2 + \xi^2 + 2i\alpha\xi} d^2x_1 dz_1 =$$

$$= \int \frac{\Omega^{(\nu)}(\mathbf{x}_1, z_1) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1 - z_1(\alpha + \sqrt{k^2+\alpha^2})}}{2\sqrt{k^2+\alpha^2}} d^2x_1 dz_1. \quad (69)$$

При интегрировании по ξ мы воспользовались тем фактом, что функция $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}, z)$ отлична от нуля только при $z > 0$, и это позволило нам замкнуть контур интегрирования в нижней комплексной полуплоскости. Подставляем результат в уравнение (67) и видим, что обусловленная наличием плоской границы поправка $G^{(-)}_{\kappa\nu}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, z_1, z_2)$ к функции Грина зависит фактически от переменных $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ и $s = z_1 + z_2$:

$$G^{(-)}_{\kappa\nu}(\mathbf{x}, s) = \rho_0 e^{-\alpha s} \times$$

$$\times \int \left(\frac{k_\kappa k_\nu}{k^2} - \delta_{\kappa\nu}\right) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - s\sqrt{k^2+\alpha^2}}}{2\sqrt{k^2+\alpha^2}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} =$$

$$= -\rho_0 e^{-\alpha s}(\delta_{\kappa\nu} - \partial_\kappa\partial_\nu \hat{\Delta}^{-1}_{\mathbf{x}}) \frac{e^{-\alpha\sqrt{\mathbf{x}^2+s^2}}}{4\pi\sqrt{\mathbf{x}^2+s^2}}, \quad (70)$$

где $\hat{\Delta}^{-1}_{\mathbf{x}}$ — обратный двумерный оператор Лапласа. Введем обозначение

$$D(|\mathbf{x}|, s) = \Delta^{-1}_{\mathbf{x}} \frac{e^{-\alpha\sqrt{\mathbf{x}^2+s^2}}}{\sqrt{\mathbf{x}^2+s^2}}.$$

В силу своего определения, функция $D(r, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial D}{\partial r}\right) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{r^2+s^2}}}{\sqrt{r^2+s^2}}, \quad (71)$$

из которого однократным интегрированием получаем

$$\frac{r\,\partial D}{\partial r} = \frac{e^{-\alpha s} - e^{-\alpha\sqrt{r^2+s^2}}}{\alpha}. \quad (72)$$

Заметим далее, что вторые производные $\partial_\kappa\partial_\nu D(|\mathbf{x}|, s)$ выражаются через комбинацию $r^{-1}\partial D/\partial r$ как

$$\partial_\kappa\partial_\nu D(|\mathbf{x}|, s) = \frac{x_\kappa x_\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r}\right) + \delta_{\kappa\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r}. \quad (73)$$

Собирая полученные выражения, с учетом (72) записываем в окончательном виде поправку к трехмерной функции Грина:

$$G^{(-)}_{\kappa\nu}(\mathbf{x}, s) = \rho_0\left(\delta_{\kappa\nu} - 2\frac{x_\kappa x_\nu}{\mathbf{x}^2}\right) \times$$
$$\times \frac{e^{-2\alpha s} - e^{-\alpha s - \alpha\sqrt{\mathbf{x}^2+s^2}}}{4\pi\alpha\mathbf{x}^2} +$$
$$+ \rho_0\left(\frac{x_\kappa x_\nu}{\mathbf{x}^2} - \delta_{\kappa\nu}\right)\frac{e^{-\alpha s - \alpha\sqrt{\mathbf{x}^2+s^2}}}{4\pi\sqrt{\mathbf{x}^2+s^2}}. \quad (74)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. D. R. Christie, J. Atmosph. Sci. **46**, 1462 (1989).
2. J. W. Rottman and F. Einaudi, J. Atmosph. Sci. **50**, 2116 (1993).
3. M. G. Wurtele, R. D. Sharman, and A. Datta, Ann. Rev. Fluid Mech. **28**, 429 (1996).
4. T. Kataoka, M. Tsutahara, and T. Akuzawa, Phys. Rev. Lett. **84**, 1447 (2000).
5. Y. V. Lvov and E. G. Tabak, Phys. Rev. Lett. **87**, 168501 (2001).
6. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, and O. Poloukhina, Nonlin. Proc. Geophys. **9**, 221 (2002).
7. V. Vlasenko, P. Brandt, and A. Rubino, J. Phys. Oceanography **30**, 2172 (2000).
8. V. Vlasenko and K. Hutter, J. Phys. Oceanography **32**, 1779 (2002).
9. V. Vlasenko and N. Stashchuk, J. Phys. Oceanography **36**, 1959 (2006).
10. R. Grimshaw, E. Pelinovsky, and T. Talipova, Surv. Geophys. **27**, 273 (2007).
11. W. Choi and R. Camassa, J. Fluid Mech. **396**, 1 (1999).
12. W. Craig, P. Guyenne, and H. Kalisch, Comm. Pure Appl. Math. **58**, 1587 (2005).
13. A. R. de Zarate and A. Nachbin, Comm. Math. Sci. **6**, 385 (2008).
14. J. L. Bona, D. Lannes, and J.-C. Saut, J. Math. Pures Appl. **89**, 538 (2008).
15. Н. Н. Романова, И. Г. Якушкин, Изв. АН. Физика атмосферы и океана **43**, 579 (2007).
16. Н. Н. Романова, Изв. АН. Физика атмосферы и океана **44**, 56 (2008).
17. В. П. Гончаров, Изв. АН. Физика атмосферы и океана **22**, 468 (1986).

18. Y. Ogura and N. A. Phillips, J. Atmosph. Sci. **19**, 173 (1962).

19. D. R. Durran, J. Atmosph. Sci. **46**, 1453 (1989).

20. P. R. Bannon, J. Atmosph. Sci. **53**, 3618 (1996).

21. V. P. Ruban, Phys. Rev. D **62**, 127504 (2000).

22. V. P. Ruban, Phys. Rev. E **64**, 036305 (2001).

23. V. E. Zakharov, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **9**, 190 (1968).

24. V. E. Zakharov, Europ. J. Mech. B/Fluids **18**, 327 (1999).

25. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).

26. T. B. Benjamin, J. Fluid Mech. **29**, 559 (1967).

27. H. Ono, J. Phys. Soc. Jpn. **39**, 1082 (1975).

28. R. Smith, J. Fluid Mech. **52**, 379 (1972).

29. R. J. Joseph, J. Phys. A **10**, L225 (1977).

30. H. H. Chen and Y. C. Lee, Phys. Rev. Lett. **43**, 264 (1979).

31. L. Abdelouhab, J. L. Bona, M. Felland, and J.-C. Saut, Physica D **40**, 360 (1989).

32. E. Wahlen, Lett. Math. Phys. **79**, 303 (2007).