

ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА МЕЖДУ ГРАНУЛАМИ В НАНОДИАПАЗОНЕ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСА

Ю. Н. Овчинников^{a,b*}, В. З. Кресин^{c**}

^a *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117334, Москва, Россия*

^b *Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems
D-01187, Dresden, Germany*

^c *Lawrence Berkeley Laboratory University of California, Berkeley
California 94720, USA*

Поступила в редакцию 4 февраля 2010 г.

Получено общее выражение для величины джозефсоновского тока между нанокластерами. Показано, что в условиях резонанса между электронными уровнями кластеров выражение для тока, полученное в модели туннельного гамильтониана, перестает быть справедливым. В случае вырождения или почти вырождения электронных уровней в изолированных кластерах величина критического тока Джозефсона может превышать значение, полученное в модели туннельного гамильтониана, по большому параметру — отношению величины параметра порядка $|\Delta|$ к расстоянию между резонансным и ближайшим к нему уровнями.

1. ВВЕДЕНИЕ

Статический эффект Джозефсона между массивными сверхпроводниками хорошо изучен. Выражение для плотности тока при произвольной температуре было получено в приближении туннельного гамильтониана в работе [1]. В этом же приближении дискретность уровней для систем конечного размера была учтена в работе [2]. Полученное в работе [2] выражение для плотности тока соответствует замене интеграла по плотности состояний на сумму по дискретным уровням и не содержит никаких следов возможных резонансных явлений. Такой результат связан с неприменимостью в общем случае метода туннельного гамильтониана в следующих (за главным) приближениях теории возмущений по прозрачности барьера. Интуитивно понятно, что резонансные явления должны существовать и в статическом случае подобно тому, как это имеет место в нестационарном случае [3–5]. В связи с этим имеет смысл получить и исследовать общее выражение для плотно-

сти джозефсоновского тока с учетом дискретности уровней в сверхпроводящих гранулах, возможного резонанса между уровнями и без использования туннельного гамильтониана. Ниже будет развит метод, позволяющий выполнить указанную выше программу. В условиях резонанса плотность джозефсоновского тока перестает иметь простую синусоидальную зависимость от разности фаз сверхпроводящих гранул. Более того, если хотя бы один из резонансных уровней сам почти вырожден, то величина критического тока Джозефсона может превышать ее значение в нерезонансном случае по большому параметру — отношению параметра порядка Δ к расстоянию от резонансного уровня до ближайшего соседнего уровня в кластере. Наиболее перспективны в этом отношении магические или околomagические кластеры, в которых степень вырождения из-за оболочечной структуры велика. Предельное значение такого усиления порядка $|\Delta|/|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|$, где $\{\nu, \nu_1(\nu)\}$ — резонансные уровни, $\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}$ — матричный элемент перехода между ними (см. формулу (2)).

*E-mail: ovc@itp.ac.ru

**V. Z. Kresin

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ГРАНУЛ

Рассмотрим две сверхпроводящие гранулы, помещенные в матрицу из окисла. Уравнение для функции Грина такой системы можно записать в виде [6]

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} + \hat{L}; & \Delta \\ \Delta^*; & \frac{\partial}{\partial \tau} - \hat{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G; & F \\ F^+; & \tilde{G} \end{pmatrix} = \delta(\tau - \tau') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{1}, \quad (1)$$

где $\Delta(\mathbf{r})$ — параметр порядка в гранулах,

$$\hat{L} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + U(\mathbf{r}) - \mu, \quad (2)$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} -G; & F \\ F^+; & \tilde{G} \end{pmatrix}.$$

В формуле (2) μ — химический потенциал, значение которого следует определять из уравнения для числа частиц в кластерах $\{1, 2\}$. Это уравнение будет приведено ниже.

Функция Грина \hat{G} может быть разложена по собственным функциям \hat{f} оператора \hat{K} , стоящего в левой части системы уравнений (1):

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{L}; & \Delta \\ \Delta^*; & -\hat{L} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\hat{K} \hat{f} = E \hat{f}, \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{pmatrix}.$$

Это разложение дается выражением

$$\hat{G} = T \sum_{\omega} \sum_E \frac{\exp(-i\omega(\tau - \tau'))}{-i\omega + E} \hat{f}_E(\mathbf{r}) \hat{f}_E^+(\mathbf{r}'), \quad (4)$$

где $\hat{f}_E(\mathbf{r}) \hat{f}_E^+(\mathbf{r}')$ — матричное произведение (матрица (2×2)).

Функция \hat{f} в формуле (4) предполагается нормированной, т. е.

$$\int d\mathbf{r} (\hat{f}_E^+(\mathbf{r}) \cdot \hat{f}_E(\mathbf{r})) = 1. \quad (5)$$

В формуле (5) величина $(\hat{f}_E^+(\mathbf{r}) \cdot \hat{f}_E(\mathbf{r}))$ — скалярное произведение.

Согласно работе [6] число частиц в системе из двух кластеров

$$N = 2T \sum_{\omega} \sum_E \int d\mathbf{r} \frac{1}{-i\omega + E} \times \left(\hat{f}_E(\mathbf{r}) \cdot \hat{f}_E^+(\mathbf{r}) \right)_{1,1} \exp(i\omega\tau) \Big|_{\tau \rightarrow +0}, \quad (6)$$

где $N = N_1 + N_2$ и $N_{1,2}$ — числа частиц в изолированных кластерах $\{1, 2\}$. Строго говоря, одно уравнение (6) не может обеспечить точного равенства числа частиц в каждом из кластеров в системе двух кластеров их значениям в изолированных кластерах. В результате возникает, хотя и небольшое, перераспределение заряда между кластерами, зависящее от температуры и положения электронных уровней дискретного спектра вблизи поверхности Ферми в кластерах.

Плотность тока j выражается через функцию Грина G [6] и равна

$$\mathbf{j} = 2\hbar \left\{ \frac{ie}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) G - \frac{e^2 \mathbf{A}}{m} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\}_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}, \tau'=\tau+0}. \quad (7)$$

Используя формулу (7), получим следующее выражение для полного тока J между двумя кластерами:

$$J = -\frac{ie\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum_E \frac{\exp(i\omega\delta)}{-i\omega + E} \times \int_S d^2 \mathbf{S} \mathbf{n} \left[\hat{f}_1 \frac{\partial \hat{f}_1^*}{\partial \mathbf{r}} - \hat{f}_1^* \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \mathbf{r}} \right] \Big|_{\delta \rightarrow +0}, \quad (8)$$

где поверхность S проведена по диэлектрику между гранулами, \mathbf{n} — направление нормали к поверхности S .

Собственные функции оператора \hat{K} будем искать в виде разложения по собственным функциям оператора \hat{L} , действующего в изолированном левом (правом) кластере $\{f_{\nu}^L, f_{\nu_1}^R\}$. Индексы $\{\nu, \nu_1\}$ нумеруют электронные состояния в левом (правом) кластере в нормальном состоянии. Собственные функции $\{\hat{f}_L, \hat{f}_R\}$ оператора \hat{K} в изолированных кластерах в сверхпроводящем состоянии равны

$$\hat{f}_L = \frac{f_{\nu}^L}{g_L} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta_L^*}{E_L - (\mu - E_{\nu}^L)} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\hat{f}_R = \frac{f_{\nu_1}^R}{g_R} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\Delta_R^*}{E_R - (\mu - E_{\nu_1}^R)} \end{pmatrix},$$

где $\{g_L, g_R\}$ — нормировочные факторы:

$$g_L^2 \equiv g_L^2(\nu, \pm) = \left(1 + \frac{|\Delta_L|^2}{(E_L - (\mu - E_\nu^L))^2}\right) \times \int_V d\mathbf{r} |f_\nu^L|^2, \quad (10)$$

$$g_R^2 \equiv g_L^2(\nu_1, \pm) = \left(1 + \frac{|\Delta_R|^2}{(E_R - (\mu - E_{\nu_1}^R))^2}\right) \times \int_V d\mathbf{r} |f_{\nu_1}^R|^2.$$

Величины $E_L = E_L(\nu)$, $E_R = E_R(\nu_1)$ — значения энергии в сверхпроводящем состоянии:

$$E_L = \pm \sqrt{|\Delta_L|^2 + (\mu - E_\nu^L)^2}, \quad (11)$$

$$E_R = \pm \sqrt{|\Delta_R|^2 + (\mu - E_{\nu_1}^R)^2}.$$

Суммирование по энергиям означает также суммирование по обоим знакам $\{\pm\}$. Ниже мы предположим, что часть уровней в левом (правом) кластере близка к вырождению. Более того, мы предположим, что в случае вырождения уровней в изолированных кластерах можно тем не менее выбрать базисы так, что матричные элементы переходов $\gamma_{\nu\nu_1}$, связанные с образованием системы из двух кластеров, окажутся отличными от нуля лишь для пар уровней. Матричные элементы $\gamma_{\nu\nu_1}$ возникают естественным образом при решении задачи (3) на собственные значения с помощью разложения по базису из невозможных функций (9):

$$\gamma_{\nu\nu_1} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_S d^2 S \mathbf{n} \frac{1}{g_R(\nu_1)g_L(\nu)} \times \left\{ \left[1 - \Delta_R \Delta_L^* (E_R(\nu_1) - (\mu - E_{\nu_1}^R))^{-1} (E_L - (\mu - E_\nu^L))^{-1} \right] \times \left[(f_{\nu_1}^R)^* \frac{\partial f_\nu^L}{\partial \mathbf{r}} - f_\nu^L \frac{\partial (f_{\nu_1}^R)^*}{\partial \mathbf{r}} \right] \right\}. \quad (12)$$

Эти матричные элементы возникают при умножении уравнения (3) на функцию нулевого приближения (9) (левую, правую) и интегрировании по полупространству (левому, правому) (см. также [7]). В результате такой процедуры возникают уравнение для спектра и выражение для собственных функций оператора \hat{K} . Предположим, что индексы $\{\nu, \nu_1(\nu)\}$ и знаки $\{\pm\}$ таковы, что уровни $\{E_L(\nu), E_R(\nu_1(\nu))\}$ почти вырождены. Тогда такая пара уровней преобразуется в две собственные функции оператора \hat{K} с собственными значениями $E_{1,2}(\nu, \nu_1(\nu))$, равными

$$E_{1,2}(\nu, \nu_1(\nu)) = \frac{E_L(\nu) + E_R(\nu_1(\nu))}{2} \pm \frac{E_L(\nu) - E_R(\nu_1(\nu))}{2} \times \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{((E_L(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))/2)^2}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

Соответствующие собственные функции оператора \hat{K} равны

$$\hat{\psi}_1(\nu) = \frac{f_\nu^L}{g_L(\nu)} \left(\frac{1}{E_L(\nu) - (\mu - E_\nu^L)} \right) + \frac{\gamma_{\nu\nu_1(\nu)} f_{\nu_1}^R}{g_R(\nu_1(\nu))(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))} \times \left(\frac{1}{E_R(\nu_1(\nu)) - (\mu - E_{\nu_1}^R)} \right) + \sum'_{\pm, \nu_1} \frac{f_{\nu_1}^R}{g_R} \times \frac{\gamma_{\nu\nu_1}}{E_L(\nu) - E_R(\nu_1)} \left(\frac{1}{E_R(\nu) - (\mu - E_{\nu_1}^R)} \right) + \sum'_{\pm, \tilde{\nu}} \frac{\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}}{E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu))} \frac{\gamma_{\tilde{\nu}\nu_1(\nu)}^*}{E_R(\nu_1(\nu)) - E_L(\tilde{\nu})} \times \frac{f_{\tilde{\nu}}^L}{g_L(\tilde{\nu})} \left(\frac{1}{E_L(\tilde{\nu}) - (\mu - E_{\tilde{\nu}}^L)} \right), \quad (14)$$

$$\hat{\psi}_2(\nu_1) = \frac{f_{\nu_1}^R}{g_R(\nu_1)} \left(\frac{1}{E_R(\nu_1) - (\mu - E_{\nu_1}^R)} \right) + \frac{\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}^* f_\nu^L}{g_L(\nu(\nu_1))(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))} \times \left(\frac{1}{E_L(\nu(\nu_1)) - (\mu - E_{\nu(\nu_1)}^L)} \right) + \sum'_{\pm, \nu} \frac{f_\nu^L}{g_L} \times \frac{\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}^*}{E_R(\nu_1) - E_L(\nu)} \left(\frac{1}{E_L(\nu) - (\mu - E_\nu^L)} \right) + \sum'_{\pm, \tilde{\nu}_1} \frac{\gamma_{\nu(\nu_1)\tilde{\nu}_1}}{E_L(\nu(\nu_1)) - E_R(\tilde{\nu}_1)} \times \frac{\gamma_{\tilde{\nu}_1(\nu_1)\nu_1}^*}{E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1))} \frac{f_{\tilde{\nu}_1}^R}{g_R(\tilde{\nu}_1)} \times \left(\frac{1}{E_R(\tilde{\nu}_1) - (\mu - E_{\tilde{\nu}_1}^R)} \right).$$

Знак « \prime » над символом Σ в первом уравнении формулы (14) означает, что суммирование ведется по

состояниям $\{\pm, \nu_1\}$ (или $\{\pm, \tilde{\nu}\}$), не входящим в резонансную пару $\{\nu, \nu_1(\nu)\}$. Аналогично знак «/» во втором члене формулы (14) означает, что суммирование ведется по состояниям $\{\pm, \nu\}$ (или $\{\pm, \tilde{\nu}_1\}$), не входящим в резонансную пару $\{\nu(\nu_1), \nu_1\}$. В случае, если у состояния с индексами « ν », « ν_1 » нет резонансной пары, в формулах (14) следует сохранить лишь первый и третий члены.

3. ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ ТОК МЕЖДУ ГРАНУЛАМИ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСА

Из формулы (14) находим нормированные собственные функции \hat{f} оператора \hat{K}

$$\hat{f} = \left\{ \hat{\psi}_1(\nu) \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2} \right)^{-1/2}; \right. \\ \left. \hat{\psi}_2(\nu_1) \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2} \right)^{-1/2} \right\}. \quad (15)$$

Ниже нам понадобятся следующие три важных соотношения, являющихся прямым следствием уравнений (11), (13):

$$E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)) = -(E_2(\nu_1(\nu)) - E_L(\nu)), \\ \left(1 + \frac{|\Delta_L|^2}{(E_L(\nu) - (\mu - E_\nu^L))^2} \right)^{-1} \times \\ \times (E_L(\nu) - (\mu - E_\nu^L))^{-1} = \frac{1}{2E_L(\nu)} \quad (L \rightarrow R), \\ \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2} \right)^{-1} \times \\ \times \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{[(E_L(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))/2]^2} \right)^{1/2} \times \\ \times \left[1 + |\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}| \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{[(E_L(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))/2]^2} \right)^{-1/2} \right]^{-1} = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Выражение для тока (8) разбивается на сумму двух слагаемых,

$$J = J_1 + J_2, \quad (17)$$

где величины $J_{1,2}$ равны частичным суммам в формуле (8) по состояниям $\hat{\psi}_{1,2}$. Отметим еще раз, что сумма в формуле (8) ведется по всем уровням энергии, что означает суммирование по индексам $\{\nu\nu_1\}$ и двум возможным значениям знака $\{\pm\}$ в формуле (11). Выражение для каждой из величин $\{J, J_1, J_2\}$ довольно громоздко. Поэтому здесь мы

приведем лишь выражение для величины полного тока J , а выражения для величин $\{J_1, J_2\}$ приведем в Приложении. Отметим, что сокращение резонансных вкладов в выражении (8) для полного тока J происходит при суммировании по индексам $\{1, 2\}$. Это означает, что резонансный канал сохраняется для перехода неравновесного возбуждения, созданного в одном из кластеров, в соседний кластер.

Если к системе из двух кластеров приложить внешнее напряжение, то резонансные явления возникнут в одночастичном токе при пересечении электронных уровней в системе из двух кластеров, подобно тому, как это имеет место в явлении туннелирования в джозефсоновском контакте [5].

Используя формулы (16) и формулы (A.5), (B.1) из Приложения, получим для полного тока J между кластерами следующее выражение:

$$J = \frac{e\hbar^3}{m^2} \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*) T \sum_{\omega} \sum_{\substack{\nu, \nu_1 \\ \nu_1 \neq \nu_1(\nu)}} T_{\nu\nu_1} \times \\ \times (\omega^2 + E_L^2(\nu))^{-1} (\omega^2 + E_R^2(\nu_1))^{-1} \times \\ \times \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2} \right)^{-1} + \\ + \frac{e\hbar^3}{m^2} \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*) T \sum_{\omega} \sum_{\{\nu, \nu_1(\nu)\}} T_{\nu\nu_1(\nu)} \times \\ \times (\omega^2 + E_L^2(\nu))^{-1} (\omega^2 + E_R^2(\nu_1(\nu)))^{-1} - \\ - \frac{e\hbar^3}{m^2} \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*) T \sum_{\omega} \sum_{\{\nu \neq \tilde{\nu}\}} T_{\tilde{\nu}\nu_1(\nu)} |\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2 \times \\ \times (\omega^2 + E_1^2(\nu))^{-1} (E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^{-2} \times \\ \times (E_R^2(\nu_1(\nu)) - E_L^2(\tilde{\nu}))^{-1} \times \\ \times \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2} \right)^{-1} - \\ - \frac{e\hbar^3}{m^2} \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*) T \sum_{\omega} \sum_{\{\nu_1 \neq \tilde{\nu}_1\}} T_{\nu(\nu_1)\tilde{\nu}_1} |\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2 \times \\ \times (\omega^2 + E_2^2(\nu_1))^{-1} (E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^{-2} \times \\ \times (E_L^2(\nu(\nu_1)) - E_R^2(\tilde{\nu}_1))^{-1} \times \\ \times \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2} \right)^{-1} + \\ + \frac{e\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum_{\nu \neq \tilde{\nu}} \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*) \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \times \\ \times E_1(\nu) Q_{\nu, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}}^{\nu_1(\nu), \nu_1(\nu), \nu} (E_\nu^L - E_{\tilde{\nu}}^L) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times (\omega^2 + E_1^2(\nu))^{-1} (E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^{-1} \times \\
& \quad \times (E_R^2(\nu_1(\nu) - E_L^2(\tilde{\nu}_1)))^{-1} \times \\
& \quad \times \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right)^{-1} \times \\
& \quad \times E_L^{-1}(\nu) E_R^{-1}(\nu_1(\nu)) - \\
& \quad - \frac{e\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum_{\nu_1 \neq \tilde{\nu}_1} \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*) \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \times \\
& \quad \times E_2(\nu_1) Q_{\nu(\nu_1), \nu(\nu_1), \tilde{\nu}_1}^{\nu_1, \nu_1, \nu_1} (E_{\nu_1}^R - E_{\tilde{\nu}_1}^R) \times \\
& \times (\omega^2 + E_2^2(\nu_1))^{-1} (E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^{-1} \times \\
& \quad \times (E_L^2(\nu(\nu_1) - E_R^2(\tilde{\nu}_1)))^{-1} \times \\
& \quad \times \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu_1)}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2}\right)^{-1} \times \\
& \quad \times E_R^{-1}(\nu_1) E_L^{-1}(\nu(\nu_1)) - \\
& \quad - \frac{e\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum_{\nu_1 \neq \nu_1(\nu)} \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*) \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \times \\
& \quad \times E_1(\nu) Q_{\nu, \nu, \nu_1}^{\nu_1, \nu_1(\nu), \nu_1(\nu)} (E_{\nu_1}^R - E_{\nu_1}^R) \times \\
& \times (\omega^2 + E_1^2(\nu))^{-1} (E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^{-1} \times \\
& \quad \times (E_L^2(\nu) - E_R^2(\nu_1))^{-1} \times \\
& \quad \times \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right)^{-1} \times \\
& \quad \times E_L^{-1}(\nu) E_R^{-1}(\nu_1(\nu)) + \\
& \quad + \frac{e\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum_{\nu \neq \nu(\nu_1)} \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*) \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \times \\
& \quad \times Q_{\nu(\nu_1), \nu, \nu}^{\nu_1, \nu_1, \nu(\nu_1)} E_2(\nu_1) (E_{\nu(\nu_1)}^L - E_{\nu}^L) \times \\
& \times (\omega^2 + E_2^2(\nu_1))^{-1} (E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^{-1} \times \\
& \quad \times (E_R^2(\nu_1) - E_L^2(\nu))^{-1} \times \\
& \quad \times \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2}\right)^{-1} \times \\
& \quad \times E_R^{-1}(\nu_1) E_L^{-1}(\nu(\nu_1)), \quad (18)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
T_{\nu\nu_1} &= \\
&= \left| \int d^2 S \mathbf{n} \left(f_{\nu}^L \frac{\partial (f_{\nu_1}^R)^*}{\partial \mathbf{r}} - (f_{\nu_1}^R)^* \frac{\partial f_{\nu}^L}{\partial \mathbf{r}} \right) \right|^2 \times \\
& \times \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu}^L|^2 \right)^{-1} \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu_1}^R|^2 \right)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\nu, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}}^{\nu_1(\nu), \nu_1(\nu), \nu} &= \left[\int d^2 S \mathbf{n} \left(f_{\nu}^L \frac{\partial (f_{\nu_1(\nu)}^R)^*}{\partial \mathbf{r}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - (f_{\nu_1(\nu)}^R)^* \frac{\partial f_{\nu}^L}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu}^L|^2 \right)^{-1} \times \\
& \times \left[\int d^2 S \mathbf{n} \left((f_{\tilde{\nu}}^L)^* \frac{\partial f_{\nu_1(\nu)}^R}{\partial \mathbf{r}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - f_{\nu_1(\nu)}^R \frac{\partial (f_{\tilde{\nu}}^L)^*}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \times \\
& \times \left(\int d\mathbf{r} |f_{\tilde{\nu}}^L|^2 \right)^{-1} \left[\int d^2 S \mathbf{n} \left(f_{\tilde{\nu}}^L \frac{\partial (f_{\nu_1(\nu)}^R)^*}{\partial \mathbf{r}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - (f_{\nu_1(\nu)}^R)^* \frac{\partial f_{\tilde{\nu}}^L}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu_1(\nu)}^R|^2 \right)^{-1}, \quad (19) \\
Q_{\nu(\nu_1), \nu(\nu_1), \tilde{\nu}_1}^{\nu_1, \nu_1, \nu_1} &= \left[\int d^2 S \mathbf{n} \left(f_{\nu(\nu_1)}^L \frac{\partial (f_{\nu_1}^R)^*}{\partial \mathbf{r}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - (f_{\nu_1}^R)^* \frac{\partial f_{\nu(\nu_1)}^L}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu(\nu_1)}^L|^2 \right)^{-1} \times \\
& \times \left[\int d^2 S \mathbf{n} \left((f_{\nu(\nu_1)}^L)^* \frac{\partial f_{\nu_1}^R}{\partial \mathbf{r}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - f_{\nu_1}^R \frac{\partial (f_{\nu(\nu_1)}^L)^*}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \times \\
& \times \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu_1}^R|^2 \right)^{-1} \left[\int d^2 S \mathbf{n} \left(f_{\tilde{\nu}_1}^R \frac{\partial (f_{\nu_1}^R)^*}{\partial \mathbf{r}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - (f_{\nu_1}^R)^* \frac{\partial f_{\tilde{\nu}_1}^R}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu_1}^R|^2 \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

В формуле (18) суммирование идет только по индексам $\{\nu, \nu_1, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}_1\}$. Суммирование по возможным комбинациям знаков $\{\pm\}$ выполнено в Приложении. Выражение для тока (18) является общим, учитывающим возможные резонансные уровни. Вблизи резонанса малость величин $T_{\nu\nu_1}$ компенсируется резонансным знаменателем и все члены оказываются одного порядка, если нет дополнительного вырождения резонансного уровня хотя бы в одной из гранул. Отметим, что в методе туннельного гамильтониана члены нечетного порядка по прозрачности отсутствуют.

Туннелирование идет по узкому каналу между гранулами. По этой причине все величины Q_{\dots} в формуле (18) вещественны. Это обстоятельство было использовано при получении формулы (18).

При наличии резонансных уровней и выполнении условия близости хотя бы одного из резонансных уровней к вырождению третий и четвертый члены в формуле (18) могут стать аномально большими: много большими первого

и второго членов, не проявляющих резонансных свойств. Этот эффект связан с наличием трех резонансных знаменателей в третьем и четвертом членах в формуле (18). В точке точного резонанса малость множителей $\{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2, |\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2\}$ полностью компенсируется резонансным знаменателем $\{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2, (E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2\}$. Аномальный рост величины критического тока Джозефсона обеспечивается множителями $\{E_R^2(\nu_1(\nu)) - E_L^2(\tilde{\nu}), E_L^2(\nu(\nu_1)) - E_R^2(\tilde{\nu}_1)\}$. С учетом сделанных предположений, увеличение тока может достигать величины $\{|\Delta|/|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|\}$. По этой причине наиболее перспективными с точки зрения получения больших значений критического тока Джозефсона являются магические или околомagicеские нанокластеры [8, 9]. В качестве примера, демонстрирующего эффект усиления джозефсоновского тока, рассмотрим ниже систему из двух магических слабо деформированных нанокластеров.

4. ДЖОЗЕФСОНОВСКАЯ СИСТЕМА ИЗ ДВУХ МАГИЧЕСКИХ НАНОКЛАСТЕРОВ

Предположим, что $\{l_H, l_L\}$ — орбитальные моменты верхней заполненной и нижней незаполненной оболочек каждого из нанокластеров. Предположим, что нанокластеры слабо деформированы и параметр эллипсоидальной деформации A ($|A| \ll 1$), так что полуоси эллипсоидов равны

$$b(1 - A, 1 - A, 1 + 2A). \quad (20)$$

В нормированном состоянии такая деформация ведет к расщеплению уровней со сдвигом $\delta E_{L_1}^M$, зависящим от величины орбитального момента L_1 и его проекции M на ось z :

$$\delta E_{L_1}^M = -4E_{L_1}^{(0)} A \frac{L_1(L_1 + 1) - 3M^2}{(2L_1 + 3)(2L_1 + 1)}, \quad (21)$$

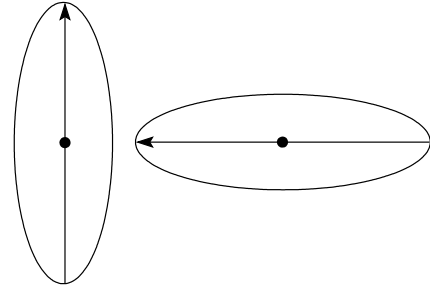
где $E_{L_1}^{(0)}$ — значение энергии уровня в недеформированном кластере.

В рассматриваемой системе химический потенциал μ расположен между уровнями $\{E_{l_H}^{(0)}, E_{l_L}^{(0)}\}$ и может быть найден с помощью уравнения (6). Его значение зависит от величины деформации A и температуры T [8, 9]. Представим химический потенциал μ в виде

$$\mu = E_{l_H} + \tilde{\mu}(E_{l_L} - E_{l_H}), \quad (22)$$

где

$$\tilde{\mu} \equiv \tilde{\mu}(A), \quad \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 + A\tilde{\tilde{\mu}}. \quad (23)$$



Взаимное расположение кластеров. Стрелки направлены вдоль осей деформации

При точном резонансе из формулы (13) находим, что

$$|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2 = [E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu))]^2. \quad (24)$$

В рассматриваемой модели сумма по состояниям ν заменяется суммой по трем квантовым числам,

$$\nu \rightarrow \{l, M, n\}, \quad (25)$$

где l, M — орбитальный момент и его проекция, n — квантовое число, нумерующее состояния при заданном l .

Используя формулы (11), (21), найдем значение энергии $E_L(\nu)$:

$$E_L^2(\nu) \equiv E_L^2(l, M, n) = |\Delta|^2 + (\tilde{\mu}_0 - E_l^{(0)}(n))^2 + 2(\tilde{\mu}_0 - E_l^{(0)}(n))(A\tilde{\tilde{\mu}} - \delta E_l^M(n)), \quad (26)$$

где $E_l^{(0)}(n)$ — уровни энергии в нормальном состоянии недеформированного кластера.

Для того чтобы избежать обращения в нуль резонансных третьего и четвертого членов в формуле (18) по симметричным соображениям, необходимо внести асимметрию в их относительное расположение с учетом того, что оба кластера одинаковые. Будем предполагать, что положение кластеров соответствует рисунку.

В нулевом приближении по деформации волновые функции $\{f_\nu^L, f_{\nu_1}^R\}$ можно выбрать в виде

$$f_\nu^L = Y_l^M(\theta, \varphi) R_{l,n}(|\mathbf{r}|), \quad f_{\nu_1}^R = Y_l^M(\theta', \varphi') R_{l,n}(|\mathbf{r}'|) \quad (27)$$

с осями $\{z, z'\}$, ориентированными вдоль осей деформации. Учитывая, что туннелирование идет по узкому каналу вдоль кратчайшего пути, соединяющему гранулы, а функции

$$Y_l^M(\theta', \varphi') \sim (1 - \cos^2(\theta'))^{|M|/2}, \quad (28)$$

считаем отличными от нуля лишь матричные элементы

$$T\{l, M, n; l, 0, n\}. \quad (29)$$

Используя формулы (18), (26), (29), получим следующее выражение для резонансного вклада J_{res} в величину джозефсоновского тока:

$$J_{res} = -\frac{e\hbar^3}{24m^2} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{A} T \sum_{\omega} \sum_{l,n} \sum_{M=1}^l \frac{(2l+3)(2l+1)T(l, M, n; l, 0, n)}{M^2 E_l^{(0)}(n)(\omega^2 + |\Delta|^2 + (\tilde{\mu}_0 - E_l^{(0)}(n))^2)(\tilde{\mu}_0 - E_l^{(0)}(n))}. \quad (30)$$

Выражение (30) превышает нерезонансный вклад (первые и вторые члены в формуле (18)) по большому параметру — отношению параметра порядка Δ к величине расщепления уровней на поверхности Ферми за счет деформации.

5. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПЕРЕХОДА $T_{\nu\nu_1}$ В СИСТЕМЕ ИЗ ПОЧТИ СФЕРИЧЕСКИХ КЛАСТЕРОВ

В нулевом приближении слабо несферический кластер можно рассматривать как сферический с заданным направлением оси z , фиксируемым слабой несферичностью. В этом приближении волновые функции (левого, правого) кластеров можно выбрать в виде

$$f_{\nu} = Y_l^M \begin{cases} J_{l+1/2} \left(\frac{\sqrt{2mE_0}}{\hbar} r \right) \left(\frac{\sqrt{2mE_0}}{\hbar} r \right)^{-1/2}, & r < a, \\ CK_{l+1/2} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} r \right) \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} r \right)^{-1/2}, & r > a, \end{cases} \quad (31)$$

где a — радиус сферического кластера, δU_0 — высота потенциального барьера, $J_{l+1/2}, K_{l+1/2}$ — функции Бесселя [10]. Условия непрерывности функции f и ее производной от r при $r = a$ определяют значение константы C и сдвиг уровня δE_0 , связанный с конечным значением величины δU_0 :

$$C = -\left(\frac{E_0}{\delta U_0}\right)^{1/4} \frac{J_{l-1/2} \left(\frac{\sqrt{2mE_0}}{\hbar} a \right)}{K_{l-1/2} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} a \right) + \frac{(l+1)\hbar}{a\sqrt{2m\delta U_0}} K_{l+1/2} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} a \right)}, \quad (32)$$

$$\delta E_0 = -\frac{2\hbar E_0}{a\sqrt{2m\delta U_0}} \left\{ \frac{(l+1)\hbar}{a\sqrt{2m\delta U_0}} + \frac{K_{l-1/2}(a\sqrt{2m\delta U_0}/\hbar)}{K_{l+1/2}(a\sqrt{2m\delta U_0}/\hbar)} \right\}^{-1}.$$

В главном приближении нормировочный коэффициент для функции f_{ν} равен [10]

$$\int_0^a dr r^2 \frac{J_{l+1/2}^2 \left(\frac{\sqrt{2mE_0}}{\hbar} r \right)}{\frac{\sqrt{2mE_0}}{\hbar} r} = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2mE_0}} \right)^3 \int_0^{Z_0} dy y J_{l+1/2}^2(y) = \frac{a^3}{2Z_0} J_{l-1/2}^2(Z_0), \quad (33)$$

где $Z_0 \equiv Z_0(n)$ — n -й корень функции Бесселя $J_{l+1/2}$.

В случае, когда оба кластера почти эквивалент-

ны, матричный элемент $T_{\nu\nu_1}$ (см. уравнение (19)) равен

$$T_{\nu\nu_1} = \frac{D^2}{4} \frac{\left| \int d\phi f_{\nu}^L (f_{\nu_1}^R)^* \right|_{r=D/2}^2}{\left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu}^L|^2 \right) \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu_1}^R|^2 \right)}. \quad (34)$$

В формуле (34) $\int d\phi$ означает интегрирование по азимутальному углу в плоскости S с центром в точке пересечения плоскости S с линией, соединяющей центры кластеров. Из формул (31)–(34) находим значение матричного элемента $T\{l, M, n; l, 0, n\}$, определяющего величину тока (30):

$$\begin{aligned}
T\{l, M, n; l, 0, n\} &= 8\pi^2 \hbar^2 E_0 Z_0^2 \times \\
&\times |Y_l^M(\theta_0, \phi_0) Y_l^0(\pi)|^2 K_{l+1/2}^4 \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0} D}{\hbar} \right) \times \\
&\times \left[ma^6 (\delta U_0)^2 \left(\frac{(l+1)\hbar}{a\sqrt{2m\delta U_0}} + \right. \right. \\
&+ K_{l-1/2} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} a \right) K_{l+1/2}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} a \right) \left. \right)^4 \times \\
&\times K_{l+1/2}^4 \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} a \right) \left. \right]^{-1}, \quad (35)
\end{aligned}$$

где θ_0 — угол между осями деформации кластеров (L, R). Шаровые функции Y_l^M выражаются через полином Лежандра $P_l^M(\cos \theta)$ [7]:

$$\begin{aligned}
Y_l^M &= \chi_l^M \frac{e^{iM\phi}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2l+1}{2} \frac{(l-M)!}{(l+M)!} \right)^{1/2} \times \\
&\times P_l^M(\cos \theta), \quad M \geq 0, \quad (36)
\end{aligned}$$

где фазовый множитель $\chi_l^M = (-)^M \exp(i\pi l/2)$, $M > 0$.

При $M < 0$

$$Y_L^{-M} = (Y_l^M)^* (-)^{l-M}. \quad (37)$$

Формулы (30), (35)–(37) позволяют найти резонансный вклад в величину джозефсоновского тока. В нерезонансном случае амплитуда джозефсоновского тока J_c дается формулой [1]

$$J_c = \frac{\pi \Delta}{2eR_N} \operatorname{th} \left(\frac{\Delta}{2T} \right), \quad (38)$$

где R_N — сопротивление контакта в нормальном состоянии.

Величину сопротивления R_N между двумя сферическими кластерами радиуса a с расстоянием D между их центрами найдем в квазиклассическом приближении. Используя выражение для коэффициента туннельного прохождения электрона $|B|^2$ через пластину толщиной d , падающего под малым углом θ к нормали,

$$\begin{aligned}
|B|^2 &= \frac{16E_0\delta U_0 \cos^2 \theta}{(\delta U_0 + E_0)^2} \times \\
&\times \exp \left(-\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(\delta U_0 + E_0 \sin^2 \theta)} \right), \quad (39)
\end{aligned}$$

получим для величины R_N значение

$$\begin{aligned}
R_N^{-1} &= \frac{16E_0\delta U_0}{(\delta U_0 + E_0)^2} a^2 e^2 \nu v_F \int \sin \theta d\theta \times \\
&\times \int \sin \theta_1 d\theta_1 \cos^3 \theta_1 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \times \\
&\times \exp \left(\frac{-2\tilde{t}}{\hbar} \sqrt{2m\delta U_0} \right), \quad (40)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{t}(\theta, \theta_1, \phi_1) &= t \left(\theta, \theta_1 \sqrt{\frac{E_0}{\delta U_0}}, \phi_1 \right); \quad \nu = \frac{mp_0}{2\pi^2 \hbar^3}, \\
t(\theta, \theta_1, \phi_1) &= (D-2a) + \frac{D(D-a)}{2a} \theta^2 + \\
&+ \frac{(D-2a)(D-a)}{2a} \theta_1^2 + \frac{D(D-2a)}{a} \theta \theta_1 \sin \phi_1. \quad (41)
\end{aligned}$$

Основной вклад в величину R_N^{-1} дает узкая область по ϕ вблизи точки $\phi = 3\pi/2$. Вычисляя интеграл в формуле (40) по $\{\theta, \phi\}$, получим

$$\begin{aligned}
R_N^{-1} &= \frac{4\pi e^2 a^2 \nu v_F \delta U_0 E_0}{(\delta U_0 + E_0)^2} \left(\frac{\sqrt{2mE_0}}{\hbar a} D(D-2a) \right)^{-1/2} \times \\
&\times \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar a} \right)^{-3/2} \times \\
&\times \exp \left(-\frac{2\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} (D-2a) \right) \times \\
&\times \int_0^\infty dx \sqrt{x} \left(D(D-a) + \frac{(D-2a)(D-a)E_0}{\delta U_0} x^2 - \right. \\
&\left. - 2D(D-2a) \sqrt{\frac{E_0}{\delta U_0}} x \right)^{-3/2}. \quad (42)
\end{aligned}$$

Формулы (30), (35) определяют зависимость резонансного вклада в величину джозефсоновского тока, его зависимость от параметров кластера и геометрии.

Формулы (38), (40), (42) позволяют найти в квазиклассическом приближении ожидаемую величину джозефсоновского тока в отсутствие резонанса.

6. ЭФФЕКТ РЕЗОНАНСНОГО УСИЛЕНИЯ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ТОКА В МАГИЧЕСКИХ КЛАСТЕРАХ

В качестве примера рассмотрим магический кластер Al_{56} ($Ne = 168$).

Магический кластер Al_{56} имеет следующие параметры:

$$\begin{aligned} \text{радиус кластера } a &= 6.07 \cdot 10^{-8} \text{ см,} \\ E_0 &= 1.467 \cdot 10^{-11} \text{ эрг;} \\ \text{NOS-состояние : } l &= 7, \quad Z_0(7) = 11.657; \\ \text{LUS-состояние : } l &= 4, \quad Z_0(4) = 11.7049. \end{aligned} \quad (43)$$

Выберем расстояние между центрами кластеров $D = 17 \cdot 10^{-8}$ см, величину потенциального барьера $\delta U_0 = 5$ эВ $= 8 \cdot 10^{-12}$ эрг.

Положим угол θ между осями деформации кластеров равными $\theta = \pi/2$. В этом случае

$$\begin{aligned} \sum_{M=1}^7 |Y_7^M \left(\frac{\pi}{2}, \phi_0 \right) Y_7^0(\pi)|^2 / M^2 &= 0.14888, \\ \sum_{M=1}^4 |Y_4^M \left(\frac{\pi}{2}, \phi_0 \right) Y_4^0(\pi)|^2 / M^2 &= 0.0288. \end{aligned} \quad (44)$$

Используя формулу (43), получим для функций Бесселя, входящих в формулу (35), следующие значения:

$$\begin{aligned} K_{13/2} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} a \right) &= 2.764 \cdot 10^{-3}; \\ K_{15/2} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} a \right) &= 6.1158 \cdot 10^{-3}; \\ K_{15/2} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} D/2 \right) &= 1.0526 \cdot 10^{-4}; \\ K_{7/2} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} a \right) &= 4.73996 \cdot 10^{-4}; \\ K_{9/2} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} a \right) &= 7.657 \cdot 10^{-4}; \\ K_{9/2} \left(\frac{\sqrt{2m\delta U_0}}{\hbar} D/2 \right) &= 2.228 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (45)$$

Для рассматриваемых кластеров величина сопротивления R_N , определяемая формулой (42), равна

$$R_N^{-1} = 1.19 \cdot 10^{-7} e^2 a^2 \nu v_F. \quad (46)$$

Используя формулы (30), (35), (44), (45), (46), получим для отношения J_{res}/J_c следующее значение при $T \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{J_{res}}{J_c} &= \frac{2\pi^3 \hbar^8 \cdot 10^3}{3m^4 a^8 (\delta U_0)^2 E_0 |\Delta_\infty| A} T \times \\ &\times \sum_{\omega} \left\{ \frac{0.7423 |\Delta|^2}{(\omega^2 + |\Delta|^2 + (\tilde{\mu}_0 - E_l^0)^2) (\tilde{\mu}_0 - E_l^0)} \Big|_{l=7} + \right. \\ &\left. + \frac{0.88569 \cdot |\Delta|^2}{(\omega^2 + |\Delta|^2 + (\tilde{\mu}_0 - E_l^0)^2) (\tilde{\mu}_0 - E_l^0)} \Big|_{l=4} \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

В магических кластерах возможно сильное увеличение критической температуры сверхпроводящего перехода по сравнению с ее значением в массивных сверхпроводниках [8, 9]. В этих случаях приближение слабой связи неприменимо и уравнение для параметра порядка Δ следует писать в приближении сильной связи [8, 9]. Такая ситуация возникает для кластера Al_{56} .

В области низких температур находим [8, 9]

$$\begin{aligned} \Delta \equiv \Delta(\omega) &= \frac{B \langle \Omega^2 \rangle^{1/2}}{1 + \frac{c\omega^2}{\langle \Omega^2 \rangle}}, \quad \langle \Omega^2 \rangle^{1/2} = 350 \text{ К,} \\ B &= 0.455, \quad c = 0.065, \\ \tilde{\mu} - E_{l=7}^0 &= E_{l=7}^0 \left\{ 0.72 \left(\left(\frac{Z_{(l=4)}}{Z_{(l=7)}} \right)^2 - 1 \right) \right\}, \\ \tilde{\mu} - E_{l=4}^0 &= -E_{l=7}^0 \left\{ 0.28 \left(\left(\frac{Z_{(l=4)}}{Z_{(l=7)}} \right)^2 - 1 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Подставляя это значение для параметра порядка Δ в формулу (47), получим при $T \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} 2\pi T \sum_{\omega} |\Delta|^2 / [(\omega^2 + |\Delta|^2 + (\tilde{\mu} - E_l^0)^2) \times \\ \times (\tilde{\mu} - E_l^0)] \Big|_{l=7} &= \frac{B^2}{1.8} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + cx^2)^{-2} \times \\ &\times \left(x^2 + \left(\frac{B}{1 + cx^2} \right)^2 + 1.8^2 \right)^{-1} dx = \\ &= 0.13988, \\ 2\pi T \sum_{\omega} |\Delta|^2 / [(\omega^2 + |\Delta|^2 + (\tilde{\mu} - E_l^0)^2) \times \\ \times (\tilde{\mu} - E_l^0)] \Big|_{l=4} &= -\frac{B^2}{0.7} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + cx^2)^{-2} \times \\ &\times \left(x^2 + \left(\frac{B}{1 + cx^2} \right)^2 + 0.7^2 \right)^{-1} dx = \\ &= -0.92395. \end{aligned} \quad (49)$$

Подставляя численные значения параметров кластера Al_{56} (формулы (43), (44), (45), (48)) и значения сумм по частотам (49) в уравнение (47), получим

$$\frac{J_{res}}{J_c} = \frac{17}{(\Delta_\infty)_K} \frac{1}{|A|}. \quad (50)$$

Формула (50) справедлива при выполнении условия малости величины расщепления уровней δE_{tun} , связанной с туннелированием, по сравнению с расщеплением δE_l^M (21), вызванным деформацией A . Величина расщепления δE_{tun} определяется формулой (13) и в резонансе, в точке максимального значения тока, равна

$$(\delta E_{tun})^2 = |\gamma_{\nu\nu_1}|^2 = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 T_{\nu\nu_1}. \quad (51)$$

Используя формулу (35), для состояния $\{l = 4, M = 2\}$ получим

$$T\{l, M, n; l; 0, n\}|_{l=4, M=2} = 1.462 \cdot 10^{-5} \frac{E_0 \hbar^2}{ma^6 (\delta U_0)^2}. \quad (52)$$

Из формул (21), (52) находим область применимости формулы (50):

$$|A| > 2.745 \cdot 10^{-3} \frac{\hbar^3}{(\delta U_0) a^3 m^{3/2} E^{1/2}} = 1.3 \cdot 10^{-5}. \quad (53)$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выражение для величины джозефсоновского тока, полученное методом туннельного гамильтониана [1], становится неприменимым при наличии резонансных уровней в системе из двух кластеров. Более того, метод туннельного гамильтониана неприменим в следующих (за главным) приближениях. В частности, общее выражение для джозефсоновского тока содержит члены третьего порядка, отсутствующие в методе туннельного гамильтониана.

В условиях резонанса и при наличии вырождения уровней энергии в изолированных кластерах величина джозефсоновского тока может превышать

значение тока, предсказываемое в работе [1] по большому параметру — отношению параметра порядка $|\Delta|$ к величине туннельного расщепления уровней в резонансе $|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|$.

Изменяя внешние условия, геометрию контакта, можно менять направление тока Джозефсона (знак параметра A в формуле (30)), создавая тем самым как обычный контакт, так и π -контакт.

Кластеры с резонансными, почти вырожденными уровнями — перспективный объект для создания джозефсоновских цепочек (сетей). Критические токи в таких цепях (сетях) могут существенно превышать критические токи цепочек (сетей) в отсутствие резонансов.

Из формул (A.2) следует, что возбуждение, создаваемое в одном из кластеров, переходит в соседний кластер в условиях резонанса за малое время, пропорциональное $|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^{-1}$.

Рассмотрение магических или околomagических кластеров перспективно также с точки зрения получения высоких значений T_c [8, 9] в отличие от структур, изготовленных из нитей, приготовленных из тех же материалов.

Исследование В. З. Кресина выполнено при финансовой поддержке DARPA (№ 05U716), исследование Ю. Н. Овчинникова — РФФИ и International Science and Technology Center (№ 097006).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Подставляя в формулу (8) выражения (14), (15) для собственных функций оператора \hat{K} и используя соотношения (16), получим значения величины токов J_1, J_2 . Каждый из них удобно записать в виде суммы пяти членов:

$$\begin{aligned} J_1 &= J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + J_1^{(3)} + J_1^{(4)} + J_1^{(5)}, \\ J_2 &= J_2^{(1)} + J_2^{(2)} + J_2^{(3)} + J_2^{(4)} + J_2^{(5)}, \end{aligned} \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} J_1^{(1)} &= -\frac{e\hbar^3}{4m^2} T \sum_{\omega} \sum'_{\{\pm\nu, \nu_1\}} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(-i\omega + E_1(\nu))(E_L(\nu) - E_R(\nu_1))E_L(\nu)E_R(\nu_1)} \frac{T_{\nu\nu_1}}{\left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right)}, \\ J_1^{(2)} &= -\frac{e\hbar^3}{4m^2} T \sum_{\omega} \sum''_{\{\pm\nu, \nu_1(\nu)\}} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(-i\omega + E_1(\nu))(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))E_L(\nu)E_R(\nu_1(\nu))} \times \\ &\quad \times \frac{T_{\nu\nu_1(\nu)}}{\left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1^{(3)} = & -\frac{i\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum'_{\{\pm, \nu, \tilde{\nu}\}} \frac{(\hbar^2/2m)^2}{(-i\omega + E_1(\nu)) \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right)} \times \\
& \times \frac{\left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu}^L|^2\right) \left(\int d\mathbf{r} |f_{\tilde{\nu}}^L|^2\right) \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu_1(\nu)}^R|^2\right)}{g_L^2(\nu) g_L^2(\tilde{\nu}) g_R^2(\nu_1(\nu)) (E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu))) (E_R(\nu_1(\nu)) - E_L(\tilde{\nu}))} \times \\
& \times \left\{ \left[1 - \frac{1}{E_R(\nu_1(\nu)) - (\mu - E_{\nu_1(\nu)}^R)} \left(\frac{\Delta_R \Delta_L^*}{E_L(\nu) - (\mu - E_{\nu}^L)} + \frac{\Delta_R^* \Delta_L}{E_L(\tilde{\nu}) - (\mu - E_{\tilde{\nu}}^L)} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{|\Delta_R \Delta_L^*|^2}{(E_R(\nu_1(\nu)) - (\mu - E_{\nu_1(\nu)}^R))^2 (E_L(\nu) - (\mu - E_{\nu}^L)) (E_L(\tilde{\nu}) - (\mu - E_{\tilde{\nu}}^L))} \right] Q_{\nu, \tilde{\nu}, \nu_1}^{\nu_1(\nu), \nu_1(\nu), \nu} - * \right\}, \\
J_1^{(4)} = & -\frac{i\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum'_{\{\pm, \nu, \nu_1\}} \frac{(\hbar^2/2m)^2 \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu}^L|^2\right)}{(-i\omega + E_1(\nu)) \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right)} \times \\
& \times \frac{\left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu_1(\nu)}^R|^2\right) \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu_1(\nu)}^R|^2\right)}{g_L^2(\nu) g_R^2(\nu_1) g_R^2(\nu_1(\nu)) (E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu))) (E_L(\nu) - E_R(\nu_1))} \times \\
& \times \left\{ \left[1 - \frac{1}{E_L(\nu) - (\mu - E_{\nu}^L)} \left(\frac{\Delta_R \Delta_L^*}{E_R(\nu_1) - (\mu - E_{\nu_1}^R)} + \frac{\Delta_R^* \Delta_L}{E_R(\nu_1(\nu)) - (\mu - E_{\nu_1(\nu)}^R)} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{|\Delta_R \Delta_L|^2}{(E_R(\nu_1) - (\mu - E_{\nu_1}^R)) (E_R(\nu_1(\nu)) - (\mu - E_{\nu_1(\nu)}^R)) (E_L(\nu) - (\mu - E_{\nu}^L))^2} \right] Q_{\nu, \nu, \nu_1}^{\nu_1, \nu_1(\nu), \nu_1(\nu)} - * \right\}, \quad (\text{A.2}) \\
J_1^{(5)} = & -\frac{e\hbar^3}{4m^2} T \sum_{\omega} \sum'_{\{\pm, \nu, \tilde{\nu}\}} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(-i\omega + E_1(\nu)) \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right)} \times \\
& \times \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2 T_{\tilde{\nu}\nu_1(\nu)}}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2 (E_R(\nu_1(\nu)) - E_L(\tilde{\nu})) E_L(\tilde{\nu}) E_R(\nu_1(\nu))}, \\
J_2^{(1)} = & -\frac{e\hbar^3}{4m^2} T \sum_{\omega} \sum'_{\{\pm, \nu, \nu_1\}} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(-i\omega + E_2(\nu_1)) (E_R(\nu_1) - E_L(\nu))} \times \\
& \times \frac{T_{\nu\nu_1}}{\left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2}\right) E_L(\nu) E_R(\nu_1)}, \\
J_2^{(2)} = & -\frac{e\hbar^3}{4m^2} T \sum_{\omega} \sum''_{\{\pm, \nu(\nu_1), \nu_1\}} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(-i\omega + E_2(\nu_1)) (E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))} \times \\
& \times \frac{T_{\nu(\nu_1)\nu_1}}{\left(1 + \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2}\right) E_L(\nu(\nu_1)) E_R(\nu_1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2^{(3)} &= -\frac{i\hbar}{m}T \sum_{\omega} \sum'_{\{\pm, \nu_1, \tilde{\nu}_1\}} \frac{(\hbar^2/2m)^2}{(-i\omega + E_2(\nu_1)) \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2}\right)} \times \\
 &\quad \times \frac{\left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu(\nu_1)}^L|^2\right) \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu_1}^R|^2\right) \left(\int d\mathbf{r} |f_{\tilde{\nu}_1}^R|^2\right)}{g_L^2(\nu(\nu_1))g_R^2(\tilde{\nu}_1)g_R^2(\nu_1) \left(E_L(\nu(\nu_1)) - E_R(\tilde{\nu}_1)\right) \left(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1))\right)} \times \\
 &\quad \times \left\{ \left[1 - \frac{1}{E_L(\nu(\nu_1)) - (\mu - E_{\nu(\nu_1)}^L)} \left(\frac{\Delta_R \Delta_L^*}{E_R(\tilde{\nu}_1) - (\mu - E_{\tilde{\nu}_1}^R)} + \frac{\Delta_R^* \Delta_L}{E_R(\nu_1) - (\mu - E_{\nu_1}^R)} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{|\Delta_R \Delta_L|^2}{\left(E_L(\nu(\nu_1)) - (\mu - E_{\nu(\nu_1)}^L)\right)^2 \left(E_R(\tilde{\nu}_1) - (\mu - E_{\tilde{\nu}_1}^R)\right) \left(E_R(\nu_1) - (\mu - E_{\nu_1}^R)\right)} \right] Q_{\nu(\nu_1), \nu(\nu_1), \tilde{\nu}_1}^{\tilde{\nu}_1, \nu_1, \nu_1} - * \right\}, \\
 J_2^{(4)} &= -\frac{i\hbar}{m}T \sum_{\omega} \sum'_{\{\pm, \nu, \nu_1\}} \frac{(\hbar^2/2m)^2}{(-i\omega + E_2(\nu_1)) \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2}\right)} \times \\
 &\quad \times \frac{\left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu}^L|^2\right) \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu(\nu_1)}^L|^2\right) \left(\int d\mathbf{r} |f_{\nu_1}^R|^2\right)}{g_R^2(\nu_1)g_L^2(\nu)g_L^2(\nu(\nu_1)) \left(E_R(\nu_1) - E_L(\nu)\right) \left(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1))\right)} \times \\
 &\quad \times \left\{ \left[1 - \frac{1}{E_R(\nu_1) - (\mu - E_{\nu_1}^R)} \left(\frac{\Delta_R^* \Delta_L}{E_L(\nu) - (\mu - E_{\nu}^L)} + \frac{\Delta_R \Delta_L^*}{E_L(\nu(\nu_1)) - (\mu - E_{\nu(\nu_1)}^L)} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{|\Delta_R \Delta_L|^2}{\left(E_R(\nu_1) - (\mu - E_{\nu_1}^R)\right)^2 \left(E_L(\nu) - (\mu - E_{\nu}^L)\right) \left(E_L(\nu(\nu_1)) - (\mu - E_{\nu(\nu_1)}^L)\right)} \right] Q_{\nu(\nu_1), \nu, \nu}^{\nu_1, \nu_1, \nu(\nu_1)} - * \right\}, \\
 J_2^{(5)} &= -\frac{e\hbar^3}{4m^2}T \sum_{\omega} \sum'_{\{\pm, \tilde{\nu}_1, \nu_1\}} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(-i\omega + E_2(\nu_1)) \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2}\right)} \times \\
 &\quad \times \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2 T_{\nu(\nu_1)\tilde{\nu}_1}}{\left(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1))\right)^2 \left(E_L(\nu(\nu_1)) - E_R(\tilde{\nu}_1)\right) E_L(\nu(\nu_1)) E_R(\tilde{\nu}_1)}.
 \end{aligned}$$

В формулах (А.2) символ $\sum'_{\{\pm, \nu, \nu_1\}}$ означает, что резонансная комбинация, связанная с набором символов $\{\pm\}$ и индексов $\{\nu, \nu_1\}$, опущена, т. е.

$$\sum'_{\{\pm, \nu, \nu_1\}} = \sum_{\{\pm, \nu, \nu_1; \nu_1 \neq \nu(\nu)\}} + \sum_{\left\{ \begin{smallmatrix} (+), \nu; (-), \nu_1(\nu) \\ (-), \nu; (+), \nu_1(\nu) \end{smallmatrix} \right\}}. \tag{А.3}$$

В этих же формулах символ $\sum''_{\{\pm, \nu, \nu_1(\nu)\}}$ означает, что в сумме оставлены только члены с резонансным набором символов $\{\pm\}$ и индексов $\{\nu, \nu_1(\nu)\}$:

$$\sum''_{\{\pm, \nu, \nu_1(\nu)\}} = \sum_{\left\{ \begin{smallmatrix} (+), \nu; (+), \nu_1(\nu) \\ (-), \nu; (-), \nu_1(\nu) \end{smallmatrix} \right\}}. \tag{А.4}$$

Формулы (А.2) являются точными в том смысле, что пока никаких приближений при вычислении величин Q_{\dots} не сделано.

Проводя суммирование по знакам $\{\pm\}$ в формулах (А.2) с учетом формул (А.3) и (А.4), получим

$$\begin{aligned}
& J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + J_1^{(5)} + J_2^{(1)} + J_2^{(2)} + J_2^{(5)} = \\
& = \frac{e\hbar^3}{m^2} T \sum_{\omega} \sum_{\{\nu_1 \neq \nu_1(\nu)\}} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*) T_{\nu\nu_1}}{(\omega^2 + E_1^2(\nu)) (\omega^2 + E_2^2(\nu_1)) \left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right)} + \\
& \quad + \frac{e\hbar^3}{m^2} T \sum_{\omega} \sum_{\{\nu, \nu_1(\nu)\}} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*) T_{\nu\nu_1(\nu)}}{(\omega^2 + E_1^2(\nu)) (\omega^2 + E_2^2(\nu_1(\nu)))} - \\
& - \frac{e\hbar^3}{m^2} T \sum_{\omega} \sum_{\nu \neq \tilde{\nu}} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(\omega^2 + E_1^2(\nu)) (E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2 (E_R^2(\nu_1(\nu)) - E_L^2(\tilde{\nu}))} \times \\
& \quad \times \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2 T_{\tilde{\nu}\nu_1(\nu)}}{\left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right)} - \\
& - \frac{e\hbar^3}{m^2} T \sum_{\omega} \sum_{\nu_1 \neq \tilde{\nu}_1} \frac{\text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(\omega^2 + E_2^2(\nu_1)) (E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2 (E_L^2(\nu(\nu_1)) - E_R^2(\tilde{\nu}_1))} \times \\
& \quad \times \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2 T_{\nu(\nu_1)\tilde{\nu}_1}}{\left(1 + \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2}\right)}. \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

Вычисление токов $\{J_1^{(3)}, J_1^{(4)}, J_2^{(3)}, J_2^{(4)}\}$, в которые входят величины Q_{\dots} , проведем в Приложении В.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Величины Q_{\dots} в формулах (А.2) в общем случае комплексные. Однако из-за узости канала туннелирования между гранулами в главном приближении величины Q_{\dots} являются вещественными. Ниже ограничимся именно этим приближением при вычислении величин $\{J_1^{(3)}, J_1^{(4)}, J_2^{(3)}, J_2^{(4)}\}$. Из формул (А.1), суммируя по знакам $\{\pm\}$, находим

$$\begin{aligned}
J_1^{(3)} &= \frac{e\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum_{\{\substack{\nu, \tilde{\nu} \\ \nu \neq \tilde{\nu}}\}} \frac{(\hbar^2/2m)^2 \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(\omega^2 + E_1^2(\nu)) (E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu))) (E_R^2(\nu_1(\nu)) - E_L^2(\tilde{\nu}))} \times \\
& \quad \times \frac{E_1(\nu) (E_{\nu}^L - E_{\tilde{\nu}}^L) Q_{\nu, \tilde{\nu}}^{\nu_1(\nu), \nu_1(\nu), \nu}}{\left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right) E_L(\nu) E_R(\nu_1(\nu))}, \\
J_1^{(4)} &= -\frac{e\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum_{\{\substack{\nu, \nu_1 \\ \nu_1 \neq \nu_1(\nu)\}}\}} \frac{(\hbar^2/2m)^2 \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(\omega^2 + E_1^2(\nu)) (E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu))) (E_L^2(\nu) - E_R^2(\nu_1))} \times \\
& \quad \times \frac{E_1(\nu) (E_{\nu_1(\nu)}^R - E_{\nu_1}^R) Q_{\nu, \nu, \nu_1}^{\nu_1, \nu_1(\nu), \nu_1(\nu)}}{\left(1 + \frac{|\gamma_{\nu\nu_1(\nu)}|^2}{(E_1(\nu) - E_R(\nu_1(\nu)))^2}\right) E_L(\nu) E_R(\nu_1(\nu))}, \\
J_2^{(3)} &= -\frac{e\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum_{\{\substack{\nu_1, \tilde{\nu}_1 \\ \nu_1 \neq \tilde{\nu}_1}\}} \frac{(\hbar^2/2m)^2 \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(\omega^2 + E_2^2(\nu_1)) (E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1))) (E_L^2(\nu(\nu_1)) - E_R^2(\tilde{\nu}_1))} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{E_2(\nu_1)(E_{\nu_1}^R - E_{\nu_1}^R)Q_{\nu(\nu_1),\nu(\nu_1),\bar{\nu}_1}^{\nu_1,\nu_1,\nu_1}}{\left(1 + \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2}\right) E_L(\nu(\nu_1))E_R(\nu_1)}, \\
J_2^{(4)} = & \frac{e\hbar}{m} T \sum_{\omega} \sum_{\substack{\nu,\nu_1 \\ \nu \neq \nu(\nu_1)}} \frac{(\hbar^2/2m)^2 \text{Im}(\Delta_R \Delta_L^*)}{(\omega^2 + E_2^2(\nu_1))(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))(E_R^2(\nu_1) - E_L^2(\nu))} \times \\
& \times \frac{E_2(\nu_1)(E_{\nu(\nu_1)}^L - E_{\nu}^L)Q_{\nu(\nu_1),\nu,\nu}^{\nu_1,\nu_1,\nu(\nu_1)}}{\left(1 + \frac{|\gamma_{\nu(\nu_1)\nu_1}|^2}{(E_2(\nu_1) - E_L(\nu(\nu_1)))^2}\right) E_L(\nu(\nu_1))E_R(\nu_1)}. \tag{B.1}
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Ambegaokar and A. Baratoff, Phys. Rev. Lett. **10**, 486 (1963).
2. D. Cobert, U. Schoolwock, and J. von Delft, Europhys. J. B **38**, 501 (2004).
3. Yu. N. Ovchinnikov, S. Rombetto, B. Ruggiero, V. Corato, and P. Silvestrini, Phys. Lett. A **372**, 904 (2008).
4. Yu. N. Ovchinnikov, P. Silvestrini, V. Corato, and S. Rombetto, Phys. Rev. B **71**, 024529 (2005).
5. Yu. N. Ovchinnikov and A. Schmid, Phys. Rev. B **50**, 6332 (1994).
6. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, Москва (1963).
8. Yu. N. Ovchinnikov and V. Z. Kresin, Eur. Phys. J. B **45**, 5 (2005).
9. V. Z. Kresin and Yu. N. Ovchinnikov, Phys. Rev. B **74**, 024514 (1-11) (2006).
10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).