

# ГЕНЕРАЦИЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ БИХРОМАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ КАК ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

*А. В. Шорохов*<sup>a\*</sup>, *Н. Н. Хвастунов*<sup>a,b</sup>, *Т. Хъярт*<sup>c\*\*</sup>, *К. Н. Алексеев*<sup>c,d\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева  
430005, Саранск, Россия*

<sup>b</sup> *Мордовский государственный педагогический институт им. М. Е. Евсевьева  
430007, Саранск, Россия*

<sup>c</sup> *Department of Physics, University of Oulu  
90014, Oulu, Finland*

<sup>d</sup> *Department of Physics, Loughborough University  
Loughborough, United Kingdom*

Поступила в редакцию 16 марта 2010 г.

Рассмотрена генерация постоянного тока в полупроводниковой сверхрешетке под действием переменного бихроматического поля в наиболее общем случае произвольного соотношения частот смешиваемых полей. Показано, что этот эффект имеет параметрическую природу, связанную с осцилляцией электронной эффективной массы в минизоне сверхрешетки.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект генерации постоянного тока в результате когерентного смешивания электромагнитных волн с соизмеримыми частотами (как правило, кратными) в различных полупроводниковых структурах известен с 60-х годов прошлого столетия [1, 2]. Физической причиной данного эффекта является существование различного вида нелинейностей, возникающих в полупроводниках, как правило, из-за разогрева носителей тока [2] или (и) непараболичности зоны проводимости [3]. Полупроводниковая сверхрешетка с непараболическим законом дисперсии является сильно нелинейной средой [4, 5], что потенциально обуславливает широкие возможности для наблюдения в ней эффекта генерации постоянного тока, который, как будет показано в данной работе, имеет в сверхрешетке параметрическую природу, связанную с осцилляциями эффективной

электронной массой. Однако даже в условиях параметрического резонанса генерация постоянного тока была бы невозможна в случае наличия в системе полной пространственной и временной симметрии. Отсутствие в системе центра инверсии на микроскопическом уровне приводит к эффекту возникновения постоянного тока, хорошо известного как ratchet-эффект [6]. Идеальная сверхрешетка является симметричной структурой с центром инверсии, поэтому возникновение постоянного тока в ней должно быть связано с нарушением временной симметрии вида  $E(t) = -E(t + T/2)$  (здесь  $E$  — напряженность электрического поля,  $T$  — общий период смешиваемых полей). Заметим, что нарушение временной симметрии возникает не при всех отношениях частот смешиваемых полей, что будет показано ниже.

Как известно, параметрический резонанс является эффектом, непосредственно связанным с нестационарностью системы. Для возникновения параметрических колебаний необходим начальный толчок, начальная флуктуация. И такой флуктуацией в на-

\*E-mail: alex.shorokhov@mail.ru

\*\*Т. Hyart

\*\*\*К. N. Alekseev

шем случае является флуктуация внутреннего поля в сверхрешетке, предсказать направление которой нельзя в идеальной теоретической ситуации. Поэтому, если рассматривать нашу систему с чисто теоретической точки зрения как идеальную и симметричную структуру, то предсказать направление выпрямленного тока невозможно — оно будет обусловлено случайными причинами. Если рассматривать реальную сверхрешетку, то направление тока будет всегда фиксировано и обусловлено неполной симметрией полупроводниковой гетероструктуры и контактов, которая всегда имеет место в реальных сверхрешетках. Чаще всего выбор направления тока обусловлен возникновением асимметричных барьеров Шоттки.

Важно отметить, что, если в объемных полупроводниках эффект генерации постоянного тока наблюдается, в основном, при смешивании гармоник микроволнового излучения, то в полупроводниковых сверхрешетках наибольший интерес представляет собой смешивание терагерцевых волн. Интерес к эффекту выпрямления терагерцевого излучения в сверхрешетке обусловлен, прежде всего, его непосредственной связью с детектированием, генерацией и усилением терагерцевого излучения, которые в настоящее время являются актуальными научными и техническими проблемами [7–9]. Одним из наиболее перспективных и интенсивно разрабатываемых предложений по использованию сверхрешетки в качестве рабочей среды компактного, работающего при комнатной температуре усилителя терагерцевого излучения является использование сильного микроволнового поля накачки (в том числе и полихроматического), действующего на сверхрешетку, и получение усиления на частоте пробного поля как соизмеримого с полем накачки, так и несоизмеримого с ним [10–22]. (Под соизмеримыми мы понимаем такие частоты, отношение которых выражается несократимой рациональной дробью.) Параметрический эффект усиления четных гармоник поля накачки сопровождается в этом случае возникновением постоянной составляющей поля. Впервые возможность выпрямления электромагнитной волны, смешивающейся с ее второй гармоникой в сверхрешетке, была теоретически показана в работах [23–25]. Заметим, что, насколько нам известно, до настоящего времени этот эффект экспериментально не наблюдался.

В данной работе мы анализируем возможность выпрямления электромагнитных волн сверхрешеткой в случае как соизмеримых, так и несоизмеримых частот смешиваемых волн, принимая во внимание относительный сдвиг фаз между ними, а так-

же демонстрируем параметрическую природу данного эффекта в случае баллистического и диссипативного транспортных режимов. В разд. 2 выводим общую формулу для выпрямленного тока в диссипативном транспортном режиме при произвольном соотношении частот смешиваемых полей. В разд. 3 рассматриваем важные частные случаи соотношения частот, в том числе и смешивание поля накачки с его гармониками. В разд. 4 рассмотрен эффект выпрямления тока при баллистическом транспортном режиме. Наконец, в разд. 5 показана параметрическая природа выпрямленного тока как при баллистическом, так и при диссипативном транспорте.

## 2. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫПРЯМЛЕННОГО ТОКА

Рассмотрим сверхрешетку, на которую действует поле накачки  $E_p = E_0 + E_1 \cos(\omega_1 t)$ , где  $E_0$  — постоянная составляющая поля, и пробное поле  $E_{pr} = E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_0)$ , где  $\varphi_0$  — сдвиг фаз между полем накачки и пробным полем. Заметим, что в слабосигнальном пределе, который мы подробно рассматриваем ниже, в выражение для тока входит только относительная фаза полей, поэтому удобно изначально ввести фазу только у пробного поля.

Пусть частоты пробного поля и поля накачки соизмеримы:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}, \quad (1)$$

где  $n$  и  $m$  — целые числа, а  $n/m$  — несократимая дробь.

Динамика электронов, принадлежащих одной минизоне, хорошо описывается в рамках квазиклассического приближения с использованием кинетического уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} - eE(t) \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{f - f^{eq}}{\tau} \quad (2)$$

и закона дисперсии электронов в приближении сильной связи

$$\varepsilon(p) = \frac{\Delta}{2} \left( 1 - \cos \frac{pd}{\hbar} \right), \quad (3)$$

где

$$f^{eq} = \frac{d}{2\pi\hbar I_0} \exp \left[ \frac{\Delta}{2k_B T} \cos \frac{pd}{\hbar} \right]$$

— равновесная функция распределения электронов [26],  $\Delta$  — ширина минизоны,  $d$  — период сверхрешетки,  $p$  — квазиимпульс,  $\tau$  — постоянная времени

релаксации,  $I_m$  — модифицированная функция Бесселя  $m$ -го порядка аргумента  $\Delta/2k_B T$ .

Электронная скорость  $V(t)$ , усредненная по функции распределения  $f(p, t)$ , была вычислена нами для данного случая в работе [27]. Подставляя полученное в работе [27] выражение для  $V(t)$  в определение постоянного тока

$$j_{dc} = en_0 \langle V(t) \rangle_t, \quad (4)$$

и усредняя по общему периоду поля накачки и пробного поля  $T = 2\pi n/\omega_1 = 2\pi m/\omega_2$ , получим по аналогии с [27] следующую формулу для тока:

$$j_{dc} = \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{j = -\infty}^{\infty} J_{l_1}(\beta_1) J_{l_2}(\beta_2) \times \\ \times J_{l_1 - jm}(\beta_1) J_{l_2 + jn}(\beta_2) \times \\ \times \frac{(\Omega_0 + l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2) \tau \cos(jn\varphi_0) + \sin(jn\varphi_0)}{1 + (\Omega_0 + l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2)^2 \tau^2}, \quad (5)$$

где  $J_n(x)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка,  $\Omega_i = e d E_i / \hbar$  ( $i = 0, 1, 2$ ) и  $\beta_i = \Omega_i / \omega_i$  ( $i = 1, 2$ ). Здесь и далее ток записывается в единицах  $j_0 = 2j_p = en_0 V_0 I_1 / I_0$ , где  $V_0 = \Delta d / 2\hbar$  — максимальная электронная скорость в минизоне,  $n_0$  — концентрация электронов,  $j_p$  — пиковый ток, соответствующий критическому полю  $E_{cr} = \hbar / e d \tau$  Эсаки–Тсу вольт-амперной характеристики [4].

В случае смешивания чисто переменных полей ( $E_0 = 0$ ) выражение для  $j_{dc}$  имеет вид

$$j_{dc} = \sum_{l_1, l_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{j = -\infty}^{\infty} J_{l_1}(\beta_1) J_{l_2}(\beta_2) \times \\ \times J_{l_1 - jm}(\beta_1) J_{l_2 + jn}(\beta_2) \times \\ \times \frac{(l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2) \tau \cos(jn\varphi_0)}{1 + (l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2)^2 \tau^2}. \quad (6)$$

Заметим, что в этом случае в выражении для тока отсутствует слагаемое, пропорциональное синусу фазы.

Из формулы (6) следует интересный факт тождественного обращения в нуль тока в случае, когда сумма  $n + m$  является четным числом. В частности, тока не будет в случае, если смешиваются основная частота и ее нечетная гармоника, и в случае, когда  $m$  и  $n$  являются нечетными числами. Такое свойство выпрямленного тока имеет ясный физический смысл. Возникновение постоянного тока в системе объясняется тем или иным нарушением симметрии в системе. Как правило, это асимметричная

пространственная структура с нарушенной симметрией относительно отражения. В нашем случае периодический пространственный потенциал абсолютно симметричен и возникновение постоянного тока происходит только из-за нарушения временной симметрии:

$$E(t) = -E \left( t + \frac{T}{2} \right). \quad (7)$$

В рассматриваемом случае общий период поля накачки и пробного поля имеет вид  $T = 2\pi n/\omega_1 = 2\pi m/\omega_2$ , поэтому

$$E = E_1 \cos[\omega_1(t + T/2)] + E_2 \cos[\omega_2(t + T/2) + \varphi_0] = \\ = E_1 \cos(\omega_1 t + \pi n) + E_2 \cos(\omega_2 t + \pi m + \varphi_0).$$

Следовательно, если  $n$  и  $m$  — нечетные (или  $n + m$  — четное), то выполняется условие (7). В частном случае смешивания поля накачки и его гармоник ( $n = 1$ ) симметрия (7) нарушается, если  $m$  — четное и, следовательно, в этом случае в сверхрешетке возникает постоянный ток, выражение для которого будет приведено ниже (разд. 3.1).

### 3. СЛУЧАЙ СЛАБОГО ПРОБНОГО ПОЛЯ

В дальнейшем ограничимся важным случаем слабого пробного поля  $E_2 \ll E_1$ , позволяющим более ясно выявить характерные особенности выпрямления тока в зависимости от соотношения частот смешиваемых полей и прояснить физическую природу данного эффекта. В слабосигнальном пределе в выражении для тока (5) необходимо ограничиться только определенными комбинациями функций Бесселя в зависимости от соотношения частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Рассмотрим наиболее важные соотношения частот.

#### 3.1. Смешивание поля накачки и его гармоники ( $\omega_2 = m\omega_1$ )

В этом случае в пределе слабого пробного поля  $\beta_2 \ll 1$  необходимо учитывать только следующие комбинации индексов функций Бесселя в формуле (5): ( $l_2 = 0, j = \pm 1$ ), ( $l_2 = \pm 1, j = \mp 1$ ), ( $l_2 = 0, j = 0$ ). В результате получим выражение для тока в виде суммы двух слагаемых:

$$j_{dc} = j_{dc}^{stat} + j_{dc}^{coh} + O(\beta_2^2). \quad (8)$$

Здесь

$$j_{dc}^{stat} = \sum_{l = -\infty}^{\infty} J_l^2(\beta_1) \frac{(\Omega_0 + l\omega_1)\tau}{1 + (\Omega_0 + l\omega_1)^2 \tau^2} \quad (9)$$

является постоянным током, модифицированным сильным полем накачки, и по сути представляет собой сумму постоянных токов, сдвинутых энергией, кратной энергии фотона поля накачки [5]. В этом случае на ВАХ возникают дополнительные максимумы, которые приводят к возникновению на ней областей положительной дифференциальной проводимости. Данное обстоятельство позволяет выбрать рабочую точку на участке положительной дифференциальной проводимости в условиях отсутствия разрушающих усиление нестабильностей [5, 22].

В пределе  $E_1 \rightarrow 0$  выражение для тока  $j_{dc}^{stat}$  переходит в обычную формулу Эсаки–Тсу для сверхрешетки, находящейся в постоянном электрическом поле [4]:

$$j_{dc}^{stat} = \frac{\Omega_0 \tau}{1 + \Omega_0^2 \tau^2} = \frac{E_0/E_{cr}}{1 + (E_0/E_{cr})^2}. \quad (10)$$

Второе слагаемое в правой части (8)

$$j_{dc}^{coh} = \beta_2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) [J_{l-m}(\beta_1) - J_{l+m}(\beta_1)] \times \frac{(\Omega_0 + l\omega_1)\tau \cos \varphi_0}{1 + (\Omega_0 + l\omega_1)^2 \tau^2}, \quad (11)$$

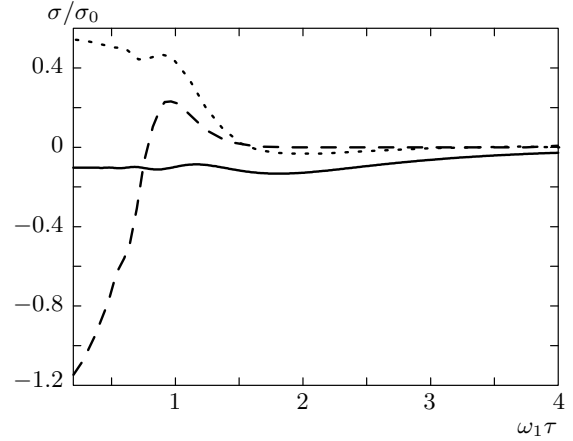
как будет показано ниже, имеет параметрическую природу, вызванную осцилляцией энергии минизонных электронов.

Рассмотрим интересующий нас случай отсутствия постоянного поля накачки  $E_0 = 0$ . В этом случае  $j_{dc}^{stat} = 0$  и суммарный ток (8) равен когерентному:

$$j_{dc} = j_{dc}^{coh} = [1 + (-1)^m] \beta_2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) J_{l-m}(\beta_1) \times \frac{l\omega_1 \tau \cos \varphi_0}{1 + l^2 \omega_1^2 \tau^2}. \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что в случае смешивания поля накачки с его нечетной гармоникой в системе не будет возникать постоянного тока, тогда как в случае четных гармоник такой ток всегда будет существовать. Отметим, что именно четные гармоники наиболее перспективно использовать для усиления терагерцевого излучения, поскольку параметрический эффект усиления в данном случае не разрушается генерацией гармоник поля накачки.

На примере смешивания гармоник удобно проиллюстрировать зависимость направления и величины выпрямленного тока от относительной фазы  $\varphi_0$ . Как видно из выражения (12), зависимость от фазы определяется только множителем  $\cos \varphi_0$ . Следовательно, выпрямленный ток достигает своего наи-



Проводимость сверхрешетки в случае смешивания поля накачки с его различными гармониками. Сплошная линия соответствует смешиванию со второй гармоникой, пунктирная — с четвертой гармоникой, штриховая — с шестой гармоникой. Амплитуда поля накачки  $\Omega_1 \tau = 5.3$

большого значения при нулевой разности фаз и обращается в нуль, когда разность фаз равна  $\pi/2$ . Соответственно, меняя фазу, можно менять не только величину, но и направление выпрямленного тока. В частности, при переходе разности фаз между полями через значения  $\pi/2$  и  $3\pi/2$  направление тока меняет знак. Подобная зависимость характерна и для других отношений частот смешиваемых полей. Отметим, что для экспериментального наблюдения важно поддерживать постоянной разность фаз смешиваемых полей. Экспериментальные методы реализации постоянной разности фаз микроволновых полей обсуждались в работе [24].

Перепишем выражение для  $j_{dc}$  для случая четных гармоник в следующем виде:

$$j_{dc} = \sigma E_2 \cos \varphi_0. \quad (13)$$

Здесь проводимость  $\sigma$  определяется формулой

$$\sigma = \sigma_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) J_{l-m}(\beta_1) \frac{l/m}{1 + l^2 \omega_1^2 \tau^2}, \quad (14)$$

где  $\sigma_0 = 2j_0/E_{cr} = 2e^2 n_0 \tau I_1 / m_0 I_0$  — статическая проводимость сверхрешетки,  $m_0 = 2\hbar^2 / \Delta d^2$  — эффективная масса электрона на дне минизоны. Зависимости проводимости от частоты поля накачки для разных гармоник показаны на рисунке. Из рисунка следует, что проводимость сверхрешетки сильно зависит от частоты поля накачки, при этом при переходе в высокочастотный предел  $\omega \tau \gg 1$  проводимость стремится к нулю для любой гармоники.

**3.2. Смешивание поля накачки и его полувцелой гармоники ( $\omega_2 = m\omega_1/2$ )**

По аналогии с предыдущим случаем в пределе  $\beta_2 \ll 1$  необходимо учесть только определенные комбинации функций Бесселя в формуле (5): ( $l_2 = 0, j = \pm 1$ ), ( $l_2 = \pm 1, j = \mp 1$ ), ( $l_2 = \pm 1, j = 0$ ), ( $l_2 = \pm 2, j = \mp 1$ ). В результате получим следующую формулу для тока:

$$j_{dc} = j_{dc}^{stat} + \frac{\beta_2^2}{2} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) [J_{l+m}(\beta_1) + J_{l-m}(\beta_1)] \times \frac{(\Omega_0 + l\omega_1)\tau \cos(2\varphi_0)}{1 + (\Omega_0 + l\omega_1)^2\tau^2} - \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) \left[ J_{l+m}(\beta_1) \frac{(\Omega_0 + l\omega_1 + \omega_2)\tau}{1 + (\Omega_0 + l\omega_1 + \omega_2)^2\tau^2} + J_{l-m}(\beta_1) \frac{(\Omega_0 + l\omega_1 - \omega_2)\tau}{1 + (\Omega_0 + l\omega_1 - \omega_2)^2\tau^2} \right] \cos(2\varphi_0) + \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\beta_1) \left[ \frac{(\Omega_0 + l\omega_1 + \omega_2)\tau}{1 + (\Omega_0 + l\omega_1 + \omega_2)^2\tau^2} + \frac{(\Omega_0 + l\omega_1 - \omega_2)\tau}{1 + (\Omega_0 + l\omega_1 - \omega_2)^2\tau^2} \right] \right\} + O(\beta_2^3). \quad (15)$$

Рассмотрим смешивание чисто переменных полей  $E_0 = 0$ . В этом случае последнее слагаемое в формуле (15) обратится в нуль (как и статическое слагаемое), и мы получим

$$j_{dc} = \frac{\beta_2^2}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) J_{l-m}(\beta_1) \times \left[ \frac{2l\omega_1\tau}{1 + l^2\omega_1^2\tau^2} - \frac{(l\omega_1 - \omega_2)\tau}{1 + (l\omega_1 - \omega_2)^2\tau^2} \right] \cos(2\varphi_0). \quad (16)$$

**3.3. Смешивание поля накачки и пробного поля в случае  $\omega_2 = m\omega_1/n$  ( $n > 2$ )**

Рассмотрим вначале случай  $n = 3$ . Аналогично предыдущим случаям, в пределе  $\beta_2 \ll 1$  необходимо учитывать только следующие комбинации функций Бесселя в формуле (5): ( $l_2 = 0, j = \pm 1$ ), ( $l_2 = \pm 1, j = \mp 1$ ), ( $l_2 = \pm 2, j = \mp 1$ ), ( $l_2 = \pm 3, j = \mp 1$ ). В результате получим следующую формулу для тока:

$$j_{dc} = j_{dc}^{stat} + \frac{\beta_2^3}{4} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) [J_{l-m}(\beta_1) - J_{l+m}(\beta_1)] \times \frac{(\Omega_0 + l\omega_1)\tau}{1 + (\Omega_0 + l\omega_1)^2\tau^2} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) \left[ J_{l+m}(\beta_1) \frac{(\Omega_0 + l\omega_1 + \omega_2)\tau}{1 + (\Omega_0 + l\omega_1 + \omega_2)^2\tau^2} - J_{l-m}(\beta_1) \frac{(\Omega_0 + l\omega_1 - \omega_2)\tau}{1 + (\Omega_0 + l\omega_1 - \omega_2)^2\tau^2} \right] \right\} \cos(3\varphi_0). \quad (17)$$

Рассмотрим случай  $E_0 = 0$ . Тогда выражение для  $j_{dc}$  примет вид

$$j_{dc} = \frac{\beta_2^3}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) J_{l-m}(\beta_1) \times \left[ \frac{l\omega_1\tau}{1 + l^2\omega_1^2\tau^2} - \frac{(l\omega_1 - \omega_2)\tau}{1 + (l\omega_1 - \omega_2)^2\tau^2} \right] \cos(3\varphi_0). \quad (18)$$

Из общих соображений, как показано во втором разделе данной работы, можно сделать заключение, что в случае, когда  $m$  является нечетным числом, в системе не будет возникать выпрямленного тока, поскольку в этом случае сумма  $m + 3$  является четным числом. Аналогично, в случае произвольного  $n$  выпрямленный ток будет пропорционален  $\beta_2^n$ . В частности, при  $n = 4$  в случае  $E_{dc} = 0$  выпрямленный ток определяется формулой

$$j_{dc} = \frac{\beta_2^4}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) J_{l-m}(\beta_1) \times \left[ \frac{l\omega_1\tau}{1 + l^2\omega_1^2\tau^2} - \frac{(l\omega_1 - \omega_2)\tau}{1 + (l\omega_1 - \omega_2)^2\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{(l\omega_1 - 2\omega_2)\tau}{1 + (l\omega_1 - 2\omega_2)^2\tau^2} \right] \cos(4\varphi_0). \quad (19)$$

Таким образом, так как  $\beta_2 \ll 1$ , то при  $n > 3$  можно пренебречь возникающим в системе постоянным током при смешивании чисто переменных полей. В случае, когда частоты смешиваемых полей несоизмеримы, выпрямленный ток не будет возникать ни в каком случае.

**4. БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ ТРАНСПОРТНЫЙ РЕЖИМ**

Рассмотрим подробно важный случай баллистического транспортного режима. В этом случае удобно описывать динамику электронов, принадлежащих одной минизоне, в рамках балансных уравнений [28], эквивалентных кинетическому уравнению Больцмана в случае равных времен релаксации энергии и скорости:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= eE(t)m^{-1}(\varepsilon) - V\tau^{-1}, \\ \dot{\varepsilon}(t) &= eE(t)V - (\varepsilon - \varepsilon_0)\tau^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $\varepsilon$  — средняя энергия электрона,

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta}{2} \left[ 1 - \frac{I_1(\Delta/2k_B T)}{I_0(\Delta/2k_B T)} \right]$$

— энергия электрона в состоянии термического равновесия,  $m(\varepsilon) = m_0/(1 - 2\varepsilon/\Delta)$  — зависящая от энергии эффективная масса электрона,  $m_0 = 2\hbar^2/\Delta d^2$  — эффективная масса электрона на дне минизоны.

Используя приближение сильной связи (3) и принимая во внимание, что в случае баллистического транспорта  $\tau \rightarrow \infty$ , балансные уравнения (20) можно преобразовать в уравнения Блоха–Зенера

$$V(t) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = V_0 \sin \frac{p(t)d}{\hbar}, \quad (21)$$

$$\dot{p}(t) = eE(t). \quad (22)$$

Заметим, что выбор начальных условий (в нашем случае  $p(0) = 0$ ) не так однозначен. В частности, начальные условия могут определяться квантовыми эффектами, не учтенными в рамках этой модели [29, 30].

Используя определение тока (4) и хорошо известную формулу производящей функции для функций Бесселя [31]

$$\exp(\pm i\beta \sin \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta) \exp(\pm il\theta), \quad (23)$$

получим

$$\begin{aligned} j_{dc} &= eV_0 \operatorname{Im} \sum_{l_1, l_2, l_3=-\infty}^{\infty} J_{l_1}(\beta_1) J_{l_2}(\beta_2) J_{l_3}(\beta_2) \times \\ &\times e^{il_2\varphi} e^{-il_3\varphi} \left\langle e^{i(l_1\omega_1 + l_2\omega_2)t} \right\rangle_t. \end{aligned} \quad (24)$$

Ограничимся рассмотрением наиболее важного случая, когда смешивается поле накачки и его гармоника,  $\omega_2 = m\omega_1$ . В этом случае усреднение по общему периоду пробного поля и поля накачки дает условие  $l_1 = -ml_2$ . В результате получим

$$\begin{aligned} j_{dc} &= eV_0 \operatorname{Im} \sum_{l_2, l_3=-\infty}^{\infty} J_{-ml_2}(\beta_1) J_{l_2}(\beta_2) \times \\ &\times J_{l_3}(\beta_2) e^{il_2\varphi} e^{-il_3\varphi}. \end{aligned} \quad (25)$$

В случае, когда  $E_2 \ll E_1$ , в формуле (25) необходимо учитывать только определенные комбинации индексов функций Бесселя:  $(l_2 = 0, l_3 = 0)$ ,  $(l_2 = 1, l_3 = 0)$ ,

$(l_2 = -1, l_3 = 0)$ ,  $(l_2 = 0, l_3 = 1)$ ,  $(l_2 = 0, l_3 = -1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} j_{dc} &= eV_0 \operatorname{Im} [J_0(\beta_1) + J_{-m}(\beta_1) J_1(\beta_2) e^{i\varphi} + \\ &+ J_m(\beta_1) J_{-1}(\beta_2) e^{-i\varphi} + \\ &+ J_0(\beta_1) J_1(\beta_2) e^{-i\varphi} + J_0(\beta_1) J_{-1}(\beta_2) e^{i\varphi}]. \end{aligned} \quad (26)$$

В результате получим следующую формулу для выпрямленного тока:

$$\begin{aligned} j_{dc} &= -eV_0\beta_2 \times \\ &\times \sin \varphi \{2J_0(\beta_1) - J_m(\beta_1) [(-1)^m + 1]\}. \end{aligned} \quad (27)$$

При этом для нечетных гармоник

$$j_{dc} = -2eV_0\beta_2 \sin \varphi J_0(\beta_1), \quad (28)$$

а для четных

$$j_{dc} = 2eV_0\beta_2 \sin \varphi \{J_m(\beta_1) - J_0(\beta_1)\}. \quad (29)$$

Из последней формулы непосредственно следует, что в случае баллистического транспорта существуют две основные причины, ведущие к генерации постоянного тока в сверхрешетке. Первая причина тривиальна: постоянный ток возникает, когда пробное поле содержит начальную фазу. Это соответствует первому слагаемому в правой части (27). При этом второе слагаемое возникает благодаря параметрическим эффектам, вызванным осцилляцией эффективной массы электрона. Покажем справедливость первого утверждения. Параметрическая природа второго слагаемого будет показана в следующем разделе.

Рассмотрим систему, управляемую внешней гармонической силой

$$\ddot{x}(t) = E \cos(\omega t + \varphi). \quad (30)$$

В этом случае

$$V(t) = \dot{x}(t) = \frac{E}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{E}{\omega} \sin \varphi. \quad (31)$$

Усредняя скорость  $V(t)$  по периоду накачки, получим

$$\langle V(t) \rangle = -\frac{E}{\omega} \sin \varphi. \quad (32)$$

Таким образом, мы имеем постоянный ток в случае ненулевой фазы поля накачки даже в случае чисто синусоидальной внешней силы.

Теперь предположим, что на сверхрешетку действует только пробное поле с ненулевой начальной фазой. Тогда из формулы (27) следует, что

$$j_{dc} = -2eV_0\beta_2 \sin \varphi. \quad (33)$$

Это выражение соответствует (32), что доказывает наше утверждение.

Заметим, что в настоящее время измерение токов (как постоянных [32, 33], так и осциллирующих [29, 30, 34]) почти баллистических носителей в переходном режиме вызывает большой интерес в связи с проблемой генерации терагерцевого излучения в сверхрешетках.

### 5. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ВЫПРЯМЛЕННОГО ТОКА

Прежде всего рассмотрим баллистический случай и покажем, что второе слагаемое в правой части (27) имеет параметрическую природу. Для этого вычислим гармоники энергии электрона, принадлежащего одной минизоне.

Объединяя закон дисперсии (3) и вторую формулу Блоха–Зенера (22), а затем усредняя по общему периоду пробного поля и поля накачки, получим следующую формулу для косинус-компоненты энергии:

$$w_m^{cos} = \langle \varepsilon(t) \cos(m\omega_1 t) \rangle_t = -\frac{\Delta}{4} J_m(\beta_1) [(-1)^m + 1]. \quad (34)$$

Из данной формулы следует, что энергия меняется с изменением частоты, являющейся четной гармоникой поля накачки  $\omega_\varepsilon = s\omega_1$  ( $s = 2, 4, 6, \dots$ ). Поскольку энергия электрона непосредственно связана с его эффективной массой  $m(\varepsilon) = m_0/(1 - 2\varepsilon/\Delta)$ , частота осцилляций эффективной массы будет такой же, как и энергии [13, 14]. В этом случае в системе может возникать параметрический резонанс, если выполняется хорошо известное условие  $\omega_\varepsilon = l\omega_2$  ( $l = 2, 3, \dots$ ). Наиболее сильный резонанс возникает, если  $l = 2$ , т. е. при выполнении условия  $\omega_\varepsilon/2 = \omega_2$  [14].

Сравнивая выражение для фурье-гармоники энергии (34) с формулой (27), можно видеть, что второе слагаемое выпрямленного тока пропорционально  $m$ -й гармонике энергии. Из теории параметрических систем, в частности из анализа уравнения Хилла, известно, что в областях неустойчивости четного порядка обычно содержится неосциллирующий член [35]. В нашем случае мы имеем подтверждение этой закономерности для случая параметрического резонанса в сверхрешетке:  $m$ -й зоне неустойчивости

(где  $m$  — четное число) соответствует генерация постоянного тока, пропорционального  $m$ -й четной гармонике энергии.

С другой стороны, можно сказать, что параметрические эффекты обусловлены осцилляцией индуктивности, вызванной осцилляцией электронной эффективной массы электронов. Из формулы (21) следует (с учетом того, что  $p(0) = 0$ ) выражение

$$\frac{pd}{\hbar} = \beta_1 \sin(\omega_1 t) + \beta_2 [\sin(\omega_2 t + \varphi) - \sin \varphi]. \quad (35)$$

В слабосигнальном приближении мы можем разложить скорость в ряд:

$$V(t) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \Big|_{pd/\hbar = \beta_1 \sin(\omega_1 t)} + \frac{\beta_2 \hbar}{d} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p^2} \Big|_{pd/\hbar = \beta_1 \sin(\omega_1 t)} \times [\sin(\omega_2 t + \varphi) - \sin \varphi] = V_{pump}(t) + m_{pump}^{-1}(t) \frac{\beta_2 \hbar}{d} [\sin(\omega_2 t + \varphi) - \sin \varphi]. \quad (36)$$

Здесь  $m_{pump}(t)$  — эффективная масса электрона в присутствии только поля накачки. Из формулы (36) непосредственно следует выражение для тока:

$$I(t) = I_{pump}(t) + L^{-1}(t) \int_0^t dt' E_2 d \cos(\omega_2 t' + \varphi_0), \quad (37)$$

где  $L(t) = dm \omega_2 / e^2$  — дифференциальная индуктивность, соответствующая одному периоду сверхрешетки. Таким образом, осцилляции индуктивности непосредственно связаны с осцилляциями электронной эффективной массы.

Теперь рассмотрим случай диссипативного транспорта. Чтобы показать параметрическую природу выпрямленного тока, необходимо, как и в случае баллистического транспорта, показать его связь с гармониками энергии. Усредняя энергию (3) путем интегрирования по квазиимпульсу внутри зоны Бриллюэна,

$$\varepsilon(t) = \int \varepsilon(p) f(p, t) dp, \quad (38)$$

где  $f(p, t)$  — функция распределения, вычисленная в работе [27], получим

$$\varepsilon(t) = \frac{\pi \hbar \Delta}{2d} \left[ f_0 - \frac{1}{2}(f_1 + f_1^*) \right]. \quad (39)$$

Здесь  $f_m$  — фурье-компоненты функции распределения [27]. Усредняя (39) по времени, получим следующую формулу для синус-компоненты энергии (в

единицах  $n_0 \Delta I_1 / 2I_0$ ) в малосигнальном приближении при  $E_0 = 0$ :

$$w_m^{sin} = \langle \varepsilon(t) \sin(m\omega_1 t) \rangle_t = -[1 + (-1)^m] \times \\ \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta_1) J_{l-m}(\beta_1) \frac{l\omega_1 \tau}{1 + l^2 \omega_1^2 \tau^2}. \quad (40)$$

Видно, что для нечетных гармоник синус-компонента энергии равна нулю (заметим, что в данном случае равна нулю и косинус-компонента). Следовательно, и в случае диссипативного транспорта энергия меняется с частотой, являющейся четной гармоникой поля накачки. Поэтому все утверждения о параметрической природе выпрямленного тока, сделанные выше относительно баллистического транспорта, будут справедливы и в диссипативном случае, для которого имеет место следующая связь между гармониками энергии и выпрямленным током:

$$j_{dc} = \beta_2 w_m^{sin} \cos \varphi_0, \quad (41)$$

выведенная из сравнения формул (12) и (40).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы изучили эффект возникновения постоянного тока в полупроводниковой сверхрешетке, находящейся под действием переменного бихроматического поля в случаях как соизмеримого, так и несоизмеримого соотношений частот пробного поля и поля накачки. Данный эффект имеет параметрическую природу и непосредственно связан с осцилляциями внутризонной энергии электрона. Подробно рассмотрены случаи баллистического и диссипативного транспорта. Установлено соответствие между выпрямленным током и гармониками энергии. Показано, что, изменяя относительную разность фаз смешиваемых полей, можно менять величину и направление выпрямленного тока. Возникновение постоянного тока соответствует четным зонам неустойчивостей параметрического резонанса, что является типичным для параметрических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)». Часть данной работы была сделана во время пребывания А. Ш. в университетах Оулу (Финляндия) и Локборо (Великобритания). Он благодарит факультеты физики данных университетов за гостеприимство. Авторы также благодарят профессора Ф. В. Кусмарцева за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. K. Pozhela and H. J. Karlin, Proc. IEEE **53**, 1788 (1965).
2. W. Schneider and K. Seeger, Appl. Phys. Lett. **8**, 133 (1966).
3. Ю. А. Романов, Опт. и спектр. **33**, 917 (1972).
4. L. Esaki and R. Tsu, IBM J. Res. Dev. **14**, 61 (1970).
5. A. Wacker, Phys. Rep. **357**, 1 (2002).
6. P. Reimann, Phys. Rep. **361**, 57 (2002).
7. D. Dragoman and M. Dragoman, Progr. Quant. Electron. **28**, 1 (2004).
8. B. Ferguson and X.-C. Zhang, Nature Materials **1**, 26 (2002).
9. M. Tonouchi, Nature Photonics **1**, 97 (2007).
10. В. В. Павлович, ФТТ **19**, 97 (1977).
11. Ю. А. Романов, Изв. вузов. Радиофизика **23**, 617 (1980).
12. Ю. А. Романов, Ю. Ю. Романова, ЖЭТФ **118**, 1193 (2000).
13. T. Hyart, N. V. Alexeeva, A. Leppanen, and K. N. Alekseev, Appl. Phys. Lett. **89**, 132105 (2006).
14. T. Hyart, A. V. Shorokhov, and K. N. Alekseev, Phys. Rev. Lett. **98**, 220404 (2007).
15. K. N. Alekseev, M. V. Gorkunov, N. V. Demarina, T. Hyart, N. V. Alexeeva, and A. V. Shorokhov, Europhys. Lett. **73**, 934 (2006).
16. Yu. A. Romanov, J. Yu. Romanova, and L. G. Mourokh, J. Appl. Phys. **99**, 013707 (2006).
17. A. V. Shorokhov and K. N. Alekseev, Physica E **33**, 284 (2006).
18. А. В. Шорохов, К. Н. Алексеев, ЖЭТФ **132**, 223 (2007).
19. T. Hyart and K. N. Alekseev, Int. J. Mod. Phys. B **23**, 4403 (2009).
20. T. Hyart, N. V. Alexeeva, J. Mattas, and K. N. Alekseev, Microelectron. J. **40**, 719 (2009).
21. T. Hyart, N. V. Alexeeva, J. Mattas, and K. N. Alekseev, Phys. Rev. Lett. **102**, 140405 (2009).



22. T. Hyart, K. N. Alekseev, and E. V. Thuneberg, *Phys. Rev. B* **77**, 165330 (2008).
23. С. Менса, Г. М. Шмелев, Э. М. Эпштейн, *Изв. вузов. Физика* **6**, 112 (1988).
24. K. Seeger, *Appl. Phys. Lett.* **76**, 82 (2000).
25. K. N. Alekseev, M. V. Erementchouk, and F. V. Kusmartsev, *Europhys. Lett.* **47**, 595 (1999).
26. А. А. Игнатов, В. И. Шашкин, *ЖЭТФ* **93**, 935 (1987).
27. A. V. Shorokhov and K. N. Alekseev, *Int. J. Mod. Phys. B* **23**, 4448 (2009).
28. A. A. Ignatov, E. P. Dodin, and V. I. Shashkin, *Mod. Phys. Lett. B* **5**, 1087 (1991).
29. R. Ferreira, T. Unuma, K. Hirakawa, and G. Bastard, *Appl. Phys. Express* **2**, 062101 (2009).
30. T. Unuma, Y. Ino, M. Kuwata-Gonokami, G. Bastard, and K. Hirakawa, *Phys. Rev. B* **81**, 125329 (2010).
31. *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, Москва (1979).
32. T. Bauer, J. Kolb, A. V. Hummel, and H. G. Roskos, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 086801 (2002).
33. Y. A. Kosevich, A. V. Hummel, H. G. Roskos, and K. Köhler, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 137403 (2006).
34. N. Sekine and K. Hirakawa, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 057408 (2005).
35. Т. Хаяси, *Нелинейные колебания в физических системах*, Мир, Москва (1968).