ЖЭТФ, 2011, том 139, вып. 6, стр. 1199–1208

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ БАРИОННЫХ ВОЛН В АМБИПЛАЗМЕ

А. Е. Дубинов[*], *С. К. Сайков*[**], *А. П. Цацкин*

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» — Саровский физико-технический институт 607188, Саров, Нижегородская обл., Россия

Поступила в редакцию 29 октября 2010 г.

Рассматривается бесстолкновительная незамагниченная амбиплазма, состоящая из максвелловских газов протонов, антипротонов, электронов и позитронов. Выведено и проанализировано дисперсионное уравнение для электростатических барионных волн и найдены точные выражения для линейных фазовых скоростей волны. Показано, что в амбиплазме возможны два типа таких волн: акустический и плазменный. Анализ дисперсионного уравнения позволил найти области параметров, в которых следует искать нелинейные решения в виде солитонов. Разработана нелинейная теория барионных волн, в рамках которой получено и проанализировано точное решение исходных уравнений. Анализ выполнен методом фиктивного потенциала. Определены диапазоны фазовых скоростей периодических барионных волн и скоростей (чисел Маха) солитонов. Показано, что в рассматриваемой плазме эти диапазоны не пересекаются и что скорость солитона не может быть меньше линейной скорости соответствующей волны. Построены графики профилей физических величин в периодической волне и солитоне (партитуры волны).

1. ВВЕДЕНИЕ

Амбиплазмой называют четырехкомпонентную плазму, состоящую из протонов, антипротонов, электронов и позитронов. Понятие амбиплазмы ввел в употребление Альфвен еще в первые годы становления космонавтики [1, 2].

Описывая амбиплазму, Альфвен установил время ее аннигиляционной гибели (например, согласно его оценкам, при плотности частиц порядка 1 см$^{-3}$ время ее жизни составляет примерно $5\cdot10^6$ лет), рассчитал ее энергетические потери на радиоизлучение (например, в поле порядка 10^{-4} Гс характерное время энергетических потерь на синхротронное излучение примерно $8\cdot10^6$ лет), рассмотрел возможности ее сепарации на материю и антиматерию в гравитационном поле, а также в магнитном поле.

Где же следует искать амбиплазму? Согласно представлениям, изложенным Альфвеном и Кляйном [3], ранняя Вселенная содержала симметричную амбиплазму с равным количеством материи и антиматерии, а затем в результате сепарации образовались их отдельные ячейки. В современную эпоху столкновения ячеек материи и антиматерии могут привести к образованию сверхновой несимметричной амбиплазмы.

Известно несколько теоретических работ, посвященных электродинамике и волновым свойствам амбиплазмы. Так, например, в [4, 5] выведены в линейном приближении законы дисперсии для поперечных и продольных (акустического и плазменного типа) волн в замагниченной амбиплазме, в [6] кратко рассмотрено фарадеевское вращение плоскости поляризации поперечных волн, а в [7] изучались электромагнитные волны в незамагниченной гравитирующей амбиплазме. Однако нам неизвестны публикации, в которых бы исследовались особенности нелинейных волн в амбиплазме.

Целью данной работы явилось построение теории нелинейных продольных волн для достаточно общего случая нейтральной по электрическому заряду, но барионно-заряженной незамагниченной бесстолкновительной амбиплазмы, все компоненты которой подчинены распределениям Максвелла с различными температурами. Определенным стимулом провести данное построение послужили недав-

[*]E-mail: dubinov-ae@yandex.ru

[**]E-mail: ssaikov@gmail.com

ние работы, в которых исследовались особенности уединенных продольных волн в электрон-позитронной плазме [8–11] и электрон-позитрон-ионной плазме [12–16], и оказалось, что формы продольных волн в плазме, содержащей античастицы, гораздо разнообразнее, чем в обычной электрон-ионной плазме.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Относительно амбиплазмы и рассматриваемой волны были приняты следующие предположения:

— амбиплазма является безграничной, однородной, квазинейтральной, бесстолкновительной и незамагниченной;

— тяжелые частицы, протоны и антипротоны (барионы), и легкие частицы, электроны и позитроны (лептоны), подчиняются распределению Максвелла, причем каждый сорт частиц — со своей температурой;

— лептоны считаются безынерционными (этот факт, означающий, что главную роль в рассматриваемых волнах играют тяжелые частицы, дает основание называть рассматриваемые волны барионными по аналогии с ионными волнами в обычной плазме);

— рассматривается одномерная волна вдоль направления оси x ;

— теория строится в предположении, что температуры частиц в волновом возмущении успевают вернуться к своим равновесным значениям раньше, чем за период колебаний, т. е. считается, что все частицы в волне являются изотермическими.

Во всех уравнениях величины, относящиеся к лептонам, снабжены индексами «$\pm l$», а относящиеся к барионам — индексом «$\pm b$», причем знак перед индексом означает знак электрического заряда данного сорта частиц. Переменные величины, относящиеся к невозмущенной волной плазме, будем снабжать дополнительными индексами «0».

Будем описывать волну в рамках электростатической многожидкостной модели, в которую входят следующие уравнения:

уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n_{\pm l,\pm b}}{\partial t} + \frac{\partial (v_{\pm l,\pm b} n_{\pm l,\pm b})}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

уравнения движения

$$m_{\pm l,\pm b}\left[\frac{\partial v_{\pm l,\pm b}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2_{\pm l,\pm b}}{2}\right)\right] = \mp q_{\pm l,\pm b}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{n_{\pm l,\pm b}}\frac{\partial P_{\pm l,\pm b}}{\partial x}, \quad (2)$$

уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi(q_{+b}n_{+b} + q_{+l}n_{+l} - q_{-l}n_{-l} - q_{-b}n_{-b}), \quad (3)$$

уравнения состояния

$$P_{\pm l,\pm b} = n_{\pm l,\pm b} k_B T_{\pm l0,\pm b0}, \quad (4)$$

алгебраическое тождество, описывающее условие квазинейтральности невозмущенной плазмы,

$$q_{+b}n_{+b0} + q_{+l}n_{+l0} = q_{-b}n_{-b0} + q_{-l}n_{-l0}. \quad (5)$$

Здесь m_j, q_j, T_{j0}, v_j, P_j — соответственно масса, заряд, температура, скорость и давление в волне для j-го сорта частиц, φ — электростатический потенциал, k_B — постоянная Больцмана. Для сохранения общности решения и возможности его применения к другим моделям многокомпонентной плазмы, мы сознательно не будем пользоваться равенством масс протонов и антипротонов, а также равенством абсолютных значений электрических зарядов всех частиц при выводе основных соотношений (они будут учтены только в численных примерах).

Используя предположение о безынерционности лептонов, уравнения движения для электронов и позитронов запишем в виде

$$\mp q_{\pm l}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{n_{\pm l}}\frac{\partial P_{-l}}{\partial x}, \quad (6)$$

из которого сразу же следуют их больцмановские распределения в электростатической волне:

$$n_{\pm l} = n_{\pm l0}\exp\left(\mp\frac{q_{\pm l}\varphi}{k_B T_{\pm l0}}\right). \quad (7)$$

Для удобства анализа и расчета численных примеров введём следующие безразмерные параметры, нормированные на соответствующие протонные величины:

концентрации

$$\alpha = \frac{n_{-b0}}{n_{+b0}}, \quad \beta = \frac{n_{+l0}}{n_{+b0}}, \quad \gamma = \frac{n_{-l0}}{n_{+b0}}, \quad (8)$$

заряды

$$\eta = \frac{q_{-b}}{q_{+b}}, \quad \mu = \frac{q_{+l}}{q_{+b}}, \quad \nu = \frac{q_{-l}}{q_{+b}}, \quad (9)$$

температуры

$$\chi = \frac{T_{-b0}}{T_{+b0}}, \quad \sigma = \frac{T_{+l0}}{T_{+b0}}, \quad \varepsilon = \frac{T_{-l0}}{T_{+b0}}, \quad (10)$$

массы

$$\kappa = \frac{m_{-b}}{m_{+b}}, \quad (11)$$

а также

$$\alpha_1 = \eta\alpha, \quad \beta_1 = \mu\beta, \quad \gamma_1 = \nu\gamma. \tag{12}$$

С помощью этих параметров запись уравнений заметно упрощается и, например, условие квазинейтральности (5) запишется как

$$\gamma_1 = 1 - \alpha_1 + \beta_1.$$

3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Для определения ключевых параметров электростатических волн, прежде всего, диапазона возможных фазовых скоростей волн решим исходные уравнения сначала в линейном приближении. Для этого придадим основным переменным задачи небольшое гармоническое возмущение:

$$\varphi = \tilde{\varphi} \exp\left[i(kx - \omega t)\right], \tag{13}$$

$$n_{\pm b} = n_{\pm b0} + \tilde{n}_{\pm b} \exp\left[i(kx - \omega t)\right], \tag{14}$$

$$v_{\pm b} = \tilde{v}_{\pm b} \exp\left[i(kx - \omega t)\right], \tag{15}$$

где знак «$\sim$» над величинами относится к амплитудам возмущений, а ω и k — их частота и волновое число. Такая запись переменных означает, что гармоническое возмущение распространяется вдоль оси x с фазовой скоростью $v = \omega/k$.

После стандартной процедуры подстановки переменных (13)–(15) в исходные уравнения (1)–(7), линеаризации и решения получившейся системы линейных алгебраических уравнений получим дисперсионное уравнение в виде

$$a\left(\frac{\omega}{k}\right)^4 - b\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 + c = 0, \tag{16}$$

где

$$a = k^2 + \frac{1}{\lambda_{+lD}^2} + \frac{1}{\lambda_{-lD}^2}, \tag{17}$$

$$b = (v_{+bT}^2 + v_{-bT}^2)\left(k^2 + \frac{1}{\lambda_{+lD}^2} + \frac{1}{\lambda_{-lD}^2}\right) + (\omega_{+b}^2 + \omega_{-b}^2), \tag{18}$$

$$c = v_{+bT}^2 v_{-bT}^2\left(k^2 + \frac{1}{\lambda_{+lD}^2} + \frac{1}{\lambda_{-lD}^2}\right) + (\omega_{+b}^2 v_{-bT}^2 + \omega_{-b}^2 v_{+bT}^2). \tag{19}$$

Здесь используются следующие плазменные параметры:

$$\lambda_{\pm lD}^2 = \frac{k_B T_{\pm l0}}{4\pi q_{\pm l}^2 n_{\pm l0}}$$

— квадраты лептонных радиусов Дебая,

$$\omega_{\pm b}^2 = \frac{4\pi q_{\pm b}^2 n_{\pm b0}}{m_{\pm b}}, \quad v_{\pm bT}^2 = \frac{k_B T_{\pm b0}}{m_{\pm b}}$$

— соответственно квадраты барионных частот Ленгмюра и тепловых скоростей.

Биквадратное уравнение (16) легко решается, его положительные корни равны

$$\omega_{1,2}(k) = k\sqrt{B_1 \pm \sqrt{B_2 + B_3}}\,, \tag{20}$$

где

$$B_1 = \frac{v_{+bT}^2 + v_{-bT}^2}{2} + \frac{\omega_{+b}^2 + \omega_{-b}^2}{2\left(k^2 + \dfrac{1}{\lambda_{+lD}^2} + \dfrac{1}{\lambda_{-lD}^2}\right)} = \frac{v_{+bT}^2\left(1 + \dfrac{\chi}{\kappa}\right)}{2} + \frac{\omega_{+b}^2\left(1 + \dfrac{\eta\alpha_1}{\kappa}\right)}{2\left(k^2 + \dfrac{1}{\lambda_{+lD}^2} + \dfrac{1}{\lambda_{-lD}^2}\right)}, \tag{21}$$

$$B_2 = \left[\frac{v_{+bT}^2 - v_{-bT}^2}{2} + \frac{\omega_{+b}^2 - \omega_{-b}^2}{2\left(k^2 + \dfrac{1}{\lambda_{+lD}^2} + \dfrac{1}{\lambda_{-lD}^2}\right)}\right]^2 = \left[\frac{v_{+bT}^2\left(1 - \dfrac{\chi}{\kappa}\right)}{2} + \frac{\omega_{+b}^2\left(1 - \dfrac{\eta\alpha_1}{\kappa}\right)}{2\left(k^2 + \dfrac{1}{\lambda_{+lD}^2} + \dfrac{1}{\lambda_{-lD}^2}\right)}\right]^2, \tag{22}$$

$$B_3 = \frac{\omega_{+b}^2 \omega_{-b}^2}{\left(k^2 + \dfrac{1}{\lambda_{+lD}^2} + \dfrac{1}{\lambda_{-lD}^2}\right)^2} = \frac{\eta\alpha_1}{\kappa}\,\frac{\omega_{+b}^4}{\left(k^2 + \dfrac{1}{\lambda_{+lD}^2} + \dfrac{1}{\lambda_{-lD}^2}\right)^2}. \tag{23}$$

Пример графика дисперсионной зависимости (20) для следующего набора параметров: $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.4$, $\gamma = 1$, $\eta = 1$, $\nu = 1$, $\kappa = 1$, $\chi = 0.005$, $\varepsilon = 100$, $\sigma = 4$, представлен на рис. 1. Он имеет две ветви, причем верхняя ветвь (кривая *1* на рис. 1) описывает плазменную (оптическую) моду волны, в которой колебания протонов и антипротонов противофазны, а нижняя ветвь (кривая *2*) описывает акустическую моду электростатической волны, в которой сжатие и разрежение протонов

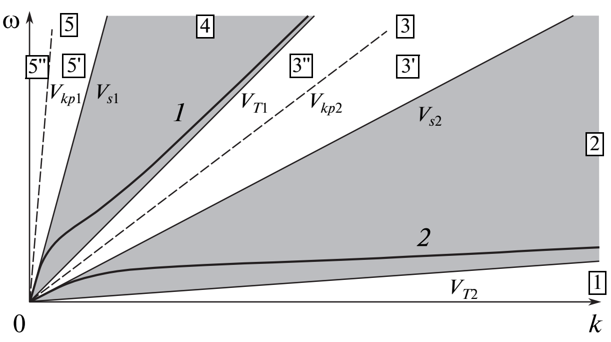

Рис. 1. График дисперсионных кривых (верхняя ветвь *1* — волна плазменного типа, нижняя ветвь *2* — волна акустического типа, нумерация секторов (в рамках) — см. в тексте)

и антипротонов происходят в фазе. При этом на каждой ветви можно выделить три характерных участка: длинноволновый участок, соответствующий линейным ионно-звуковым волнам, которые распространяются практически без дисперсии, средневолновый участок вблизи перегиба ветви, соответствующий ионным плазменным колебаниям с существенно меньшей групповой скоростью, и коротковолновый участок. Последний участок не имеет практического значения, так как волна там быстро затухает по механизму затухания Ландау.

Видно, что положительный квадрант плоскости ω–k на рис. 1 разделен на пять секторов. Два сектора, второй и четвертый, целиком содержат обе ветви дисперсионной зависимости, а в первом, третьем и пятом секторах дисперсионных ветвей нет (штриховые лучи, делящие третий и пятый секторы, будут описаны в разд. 3). Поясним, что это означает для нелинейных волн, анализу которых посвящен следующий раздел.

Как известно, тангенс угла наклона любого луча, исходящего из начала координат на плоскости ω–k, имеет размерность скорости. При этом в диапазонах скоростей, приходящихся на второй и четвертый секторы, существуют периодические волны с соответствующими фазовыми скоростями. Но тогда стационарные уединенные волны (солитоны) следует искать в диапазонах скоростей, приходящихся на другие секторы, первый, третий и пятый, так как фазовый синхронизм стационарной периодической волны и солитона невозможен. Такой синхронизм этих двух волн, если бы он где-то возник, обязательно привел бы к их взаимодействию и перекачке энергии от одной волны к другой.

Граничные (сверху) фазовые скорости для оптической и акустической мод определяются как пределы (20) соответственно:

$$V_{s1,2} = \lim_{k\to 0} \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sqrt{D_1 \pm \sqrt{D_2 + D_3}}\,, \tag{24}$$

где

$$D_1 = \frac{v_{+bT}^2 + v_{-bT}^2}{2} + \frac{(\omega_{+b}^2 + \omega_{-b}^2)\lambda_{+lD}^2\lambda_{-lD}^2}{2(\lambda_{+lD}^2 + \lambda_{-lD}^2)}, \tag{25}$$

$$D_2 = \left[\frac{v_{+bT}^2 - v_{-bT}^2}{2} + \frac{(\omega_{+b}^2 - \omega_{-b}^2)\lambda_{+lD}^2\lambda_{-lD}^2}{2(\lambda_{+lD}^2 + \lambda_{-lD}^2)}\right]^2, \tag{26}$$

$$D_3 = \frac{\omega_{+b}^2\omega_{-b}^2\lambda_{+lD}^4\lambda_{-lD}^4}{(\lambda_{+lD}^2 + \lambda_{-lD}^2)^2}, \tag{27}$$

а граничные (снизу) — как пределы

$$V_{T1,2} = \lim_{k\to 0} \frac{\partial \omega}{\partial k} = \begin{cases} v_{\mp bT} & \text{при} \quad \chi < 1, \\ v_{\pm bT} & \text{при} \quad \chi > 1. \end{cases} \tag{28}$$

4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Снова вернемся к исходным уравнениям (1)–(7) и перейдем к следующим безразмерным (штрихованным) переменным, нормированным, как и раньше, на протонные компоненты:

$$\begin{gathered} x' = \frac{1}{\lambda_{+bD}}\,x, \quad t' = \omega_{+b}t, \quad v' = \frac{\omega_{+b}}{\lambda_{+bD}}\,v, \\ n' = \frac{4\pi q_{+b}^2}{m_{+b}\omega_{+b}^2}\,n, \quad \varphi' = \frac{q_{+b}}{m_{+b}\omega_{+b}^2\lambda_{+bD}^2}\,\varphi. \end{gathered} \tag{29}$$

В дальнейшем штрихи у безразмерных переменных будем опускать. Тогда исходная система уравнений примет вид

$$\frac{\partial n_{\pm b}}{\partial \tau} + \frac{\partial (v_{\pm b} n_{\pm b})}{\partial x} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial v_{+b}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_{+b}^2}{2}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{n_{+b}}\,\frac{\partial n_{+b}}{\partial x}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial v_{-b}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_{-b}^2}{2}\right) = \frac{\eta}{\kappa}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\chi}{\kappa}\,\frac{1}{n_{-b}}\,\frac{\partial n_{-b}}{\partial x}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\left(n_{+b} + \mu n_{+l} - \nu n_{-l} - \eta n_{-b}\right), \tag{33}$$

$$n_{-l} = \gamma \exp\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\,\varphi\right), \tag{34}$$

$$n_{+l} = \beta \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}\,\varphi\right). \tag{35}$$

Будем считать, что стационарная волна распространяется в положительном направлении оси x со скоростью V. Для решения системы (30)–(35) введем волновую переменную

$$\xi = x - Vt, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -V\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}. \tag{36}$$

Замена переменных $(xt) \to \xi$ означает переход из лабораторной системы отсчета в новую волновую систему отсчета, в которой профиль волны является стационарным. Следовательно, при таком переходе в уравнениях (30)–(32) необходимо преобразовать скорость ионов в соответствии с правилом Галилея:

$$v_{\pm b} = u_{\pm b} + V, \tag{37}$$

где $v_{\pm b}$ — скорости барионов в лабораторной системе отсчета, а $u_{\pm b}$ — их скорости в волновой системе отсчета, в которой невозмущенная плазма движется со скоростью $-V$. Тогда система уравнений (30)–(35) сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d(u_{\pm b}n_{\pm b})}{d\xi} = 0, \tag{38}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{u_{+b}^2}{2}\right) = -\frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{d}{d\xi}\ln n_{+b}, \tag{39}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{u_{-b}^2}{2}\right) = \frac{\eta}{\kappa}\frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{\chi}{\kappa}\frac{d}{d\xi}\ln n_{-b}, \tag{40}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = -\left(n_{+b} + \mu n_{+l} - \nu n_{-l} - \nu n_{-b}\right). \tag{41}$$

Сначала интегрируем уравнения непрерывности:

$$u_{\pm b}n_{\pm b} = C_{1,2}. \tag{42}$$

Постоянные интегрирования $C_{1,2}$ находим из следующих условий:

$$\lim_{u_{+b}\to -V} n_{+b} = 1, \quad \lim_{u_{-b}\to -V} n_{-b} = \alpha,$$

они равны

$$C_1 = -V, \tag{43}$$

$$C_2 = -V\alpha. \tag{44}$$

Подставим равенства (43) и (44) в уравнения (42) и разрешим их относительно скоростей $u_{\pm b}$. Тогда

$$u_{+b} = -V\frac{1}{n_{+b}}, \tag{45}$$

$$u_{-b} = -V\frac{\alpha}{n_{-b}}. \tag{46}$$

Далее интегрируем уравнения движения (39) и (40), получая при этом законы сохранения:

$$\frac{u_{+b}^2}{2} = -\varphi - \ln n_{+b} + C_3, \tag{47}$$

$$\frac{u_{-b}^2}{2} = \frac{\eta}{\kappa}\varphi - \frac{\chi}{\kappa}\ln n_{-b} + C_4. \tag{48}$$

Постоянные интегрирования $C_{3,4}$ найдем из следующих условий:

$$\lim_{u_{+b}\to -V}\left(\lim_{u_{+b}\to 1}\varphi\right) = 0,$$

$$\lim_{u_{-b}\to -V}\left(\lim_{u_{-b}\to \alpha\eta}\varphi\right) = 0$$

они равны

$$C_3 = \frac{V^2}{2}, \tag{49}$$

$$C_4 = \frac{\chi}{\kappa}\ln\alpha + \frac{V^2}{2}. \tag{50}$$

Найденные постоянные (49) и (50) подставим соответственно в формулы (47) и (48), в результате чего получим

$$\frac{u_{+b}^2}{2} = -\varphi - \ln n_{+b} + \frac{V^2}{2}, \tag{51}$$

$$\frac{u_{-b}^2}{2} = \frac{\eta}{\kappa}\varphi + \frac{\chi}{\kappa}\ln\frac{\alpha}{n_{-b}} + \frac{V^2}{2}. \tag{52}$$

Подставим решения уравнений непрерывности (45) и (46) в формулы (51) и (52), из которых затем выразим зависимости $\varphi(n_{\pm b})$:

$$\varphi(n_{+b}) = \frac{V^2}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{n_{+b}}\right)^2\right] - \ln n_{+b}, \tag{53}$$

$$\varphi(n_{-b}) = \frac{V^2\kappa}{2\eta}\left[\left(\frac{\alpha}{n_{-b}}\right)^2 - 1\right] - \frac{\chi}{\eta}\ln\frac{\alpha}{n_{-b}}. \tag{54}$$

Это очень важные зависимости, в них заключена информация о сохранении кинетической энергии и электрического заряда в волне. По этим зависимостям можно также определить, например, максимально возможные амплитуды потенциала φ в волне.

На рис. 2 представлены графики зависимостей $\varphi(n_{\pm b})$. Видно, что они всегда имеют вид кривых с двумя ветвями, среди которых только одна ветвь может признана физичной — та, которая проходит через точку квазинейтральности невозмущенной плазмы ($\varphi = 0$ при $n_{+b} = 1$ для протонов и $\varphi = 0$ при $n_{-b} = \alpha_1$ для антипротонов). Другие ветви должны быть отброшены. Обратим внимание на то, что в зависимости от значений параметров плазмы и величины скорости V отбрасываемые ветви могут быть различными, при каких-то параметрах отбрасывается восходящая ветвь, при других — нисходящая.

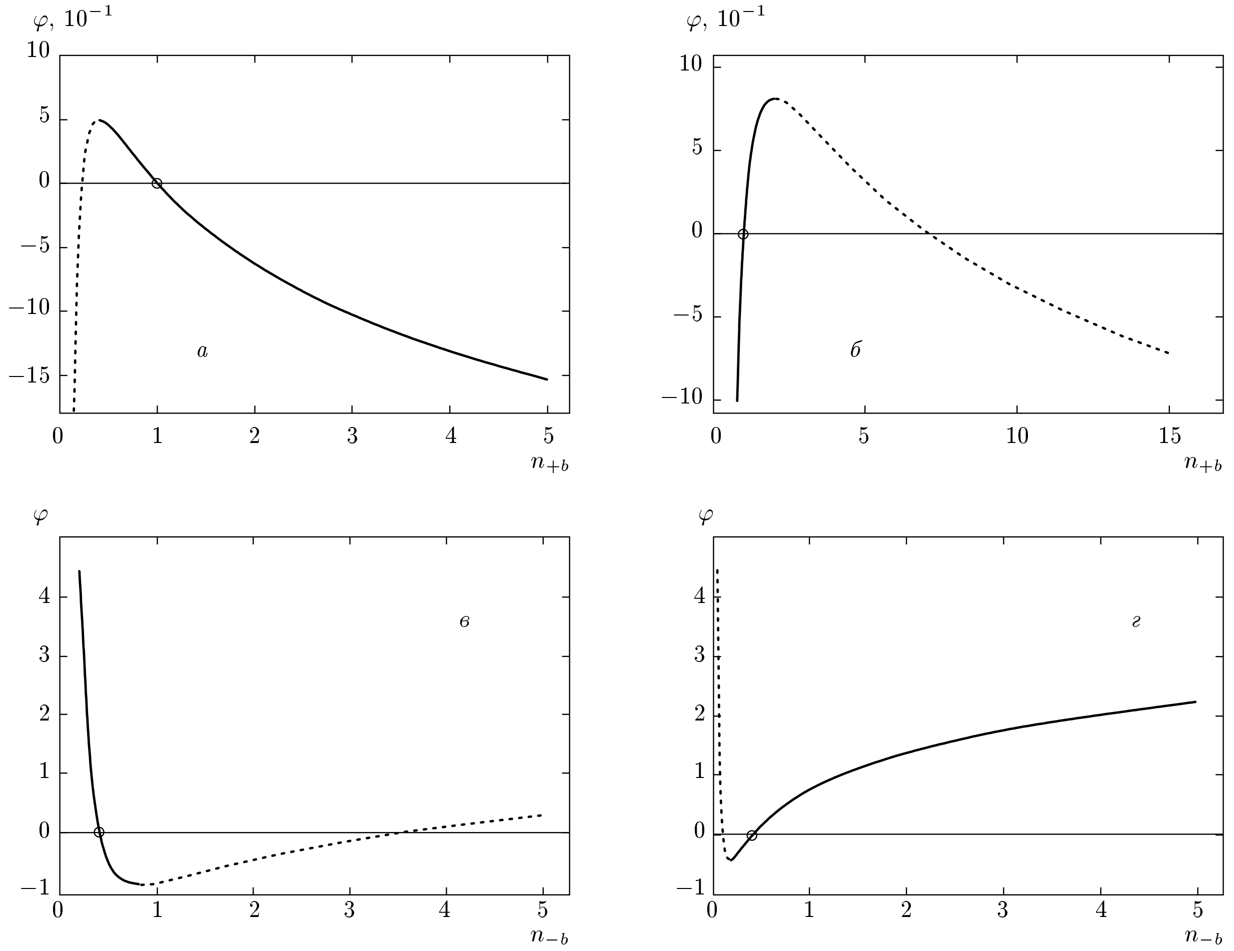

Рис. 2. Графики зависимостей $\varphi(n_{\pm b})$ (53) и (54): $\varphi(n_{+b})$ при $V = 0.4$ (*а*), 2.0 (*б*); $\varphi(n_{-b})$ при $V = 0.4$ (*в*), 2.0 (*г*); $\alpha_1 = 0.4$, $\chi = 0.91$ (отбрасываемые ветви показаны пунктиром, а точки квазинейтральности амбиплазмы — кружком)

Точки сопряжения ветвей дают максимально возможные амплитуды потенциала φ в волне:

$$\varphi_{max} = \frac{1}{2}\left(V^2 - 1\right) - \ln V, \tag{55}$$

$$\varphi_{min} = \frac{\chi}{2\eta}\left[1 - 2\ln\left(\frac{1}{V}\sqrt{\frac{\chi}{\kappa}}\right) - \frac{V^2\kappa}{\chi}\right]. \tag{56}$$

Если разрешить зависимости $\varphi(n_{\pm b})$ (53) и (54) относительно концентраций барионов, то их можно подставить в уравнение Пуассона (41). К счастью, в нашей задаче это сделать удается с помощью новой трансцендентной функции — W-функции Ламберта [17]:

$$n_{+b}(\varphi) = \sqrt{\frac{-V^2}{\mathrm{W}_{0,-1}\left[-V^2\exp(-V^2 + 2\varphi)\right]}}, \tag{57}$$

$$n_{-b}(\varphi) = \\ = \alpha\sqrt{\frac{-V^2\kappa}{\chi \mathrm{W}_{0,-1}\left[-\dfrac{V^2\kappa}{\chi}\exp\left(-\dfrac{V^2\kappa}{\chi} - \dfrac{2\eta\varphi}{\chi}\right)\right]}}, \tag{58}$$

где $\mathrm{W}_{0,-1}(\varphi)$ — соответственно основная и отрицательная ветви W-функции Ламберта.

После подстановки концентраций всех сортов частиц (34), (35), (57) и (58) в уравнение Пуассона (41) приходим к автономному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно $\varphi(\xi)$. Мы не станем его выписывать в силу громоздкости, а сразу же запишем его первый интеграл:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = -\left(G_1 + G_2 - G_3 - G_4\right) + C_5, \tag{59}$$

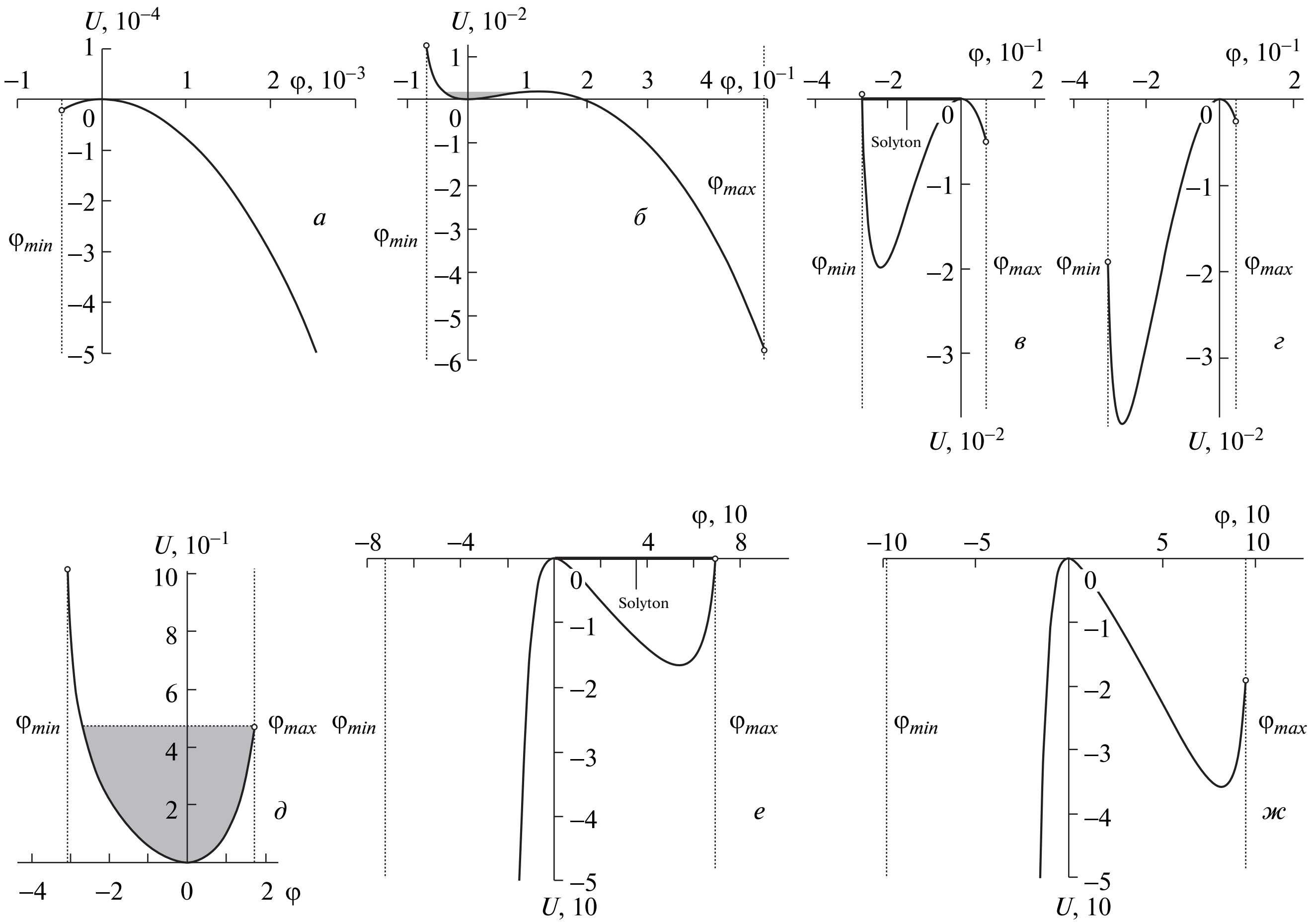

Рис. 3. Графики фиктивных потенциалов для секторов графика дисперсионных кривых: 1 (*а*), 2 (*б*), $3'$ (*в*), $3''$ (*г*), 4 (*д*), $5'$ (*е*), $5''$ (*ж*) (потенциальные ямы, соответствующие периодическим волнам, выделены серым цветом, сепаратрисы, соответствующие солитонам, — жирными линиями)

где

$$G_1 = \sqrt{\frac{-V^2}{\mathrm{W}_{0,-1}\left[-V^2\exp(-V^2+2\varphi)\right]}} \times \\ \times \left\{\mathrm{W}_{0,-1}\left[-V^2\exp(-V^2+2\varphi)\right]-1\right\}, \quad (60)$$

$$G_2 = -\beta\sigma\exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}\varphi\right), \quad (61)$$

$$G_3 = \gamma\varepsilon\exp\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\varphi\right), \quad (62)$$

$$G_4 = -\frac{\alpha\chi}{\eta}\times \\ \times\sqrt{\frac{-V^2\kappa}{\chi\mathrm{W}_{0,-1}\left[-\frac{V^2\kappa}{\chi}\exp\left(-\frac{V^2\kappa}{\chi}-\frac{2\varphi\eta}{\chi}\right)\right]}}\times \\ \times\left\{\mathrm{W}_{0,-1}\left[-\frac{V^2\kappa}{\chi}\exp\left(-\frac{V^2\kappa}{\chi}-\frac{2\varphi\eta}{\chi}\right)\right]-1\right\}. \quad (63)$$

Формула (59) имеет вид закона сохранения энергии при движении некоторой фиктивной частицы в потенциальной яме

$$U(\varphi) = (G_1+G_2-G_3-G_4)-C_5,$$

при этом роль координаты этой частицы играет электростатический потенциал φ, а роль времени — волновая переменная ξ. Это обстоятельство позволяет не только получить формальное решение $\varphi(\xi)$ в квадратурах, но и легко исследовать решение на предмет принадлежности его либо к периодической, либо уединенной волне — солитону.

Определимся с аддитивной постоянной C_5, выбрав ее для удобства так, чтобы $U(0)=0$.

Рассмотрим, как выглядит потенциал фиктивной частицы $U(\varphi)$ для различных значений скорости волны V и диапазонов, соответствующих всем секторам рис. 1, с первого по пятый. Оказалось, что существует семь различных форм графиков $U(\varphi)$.

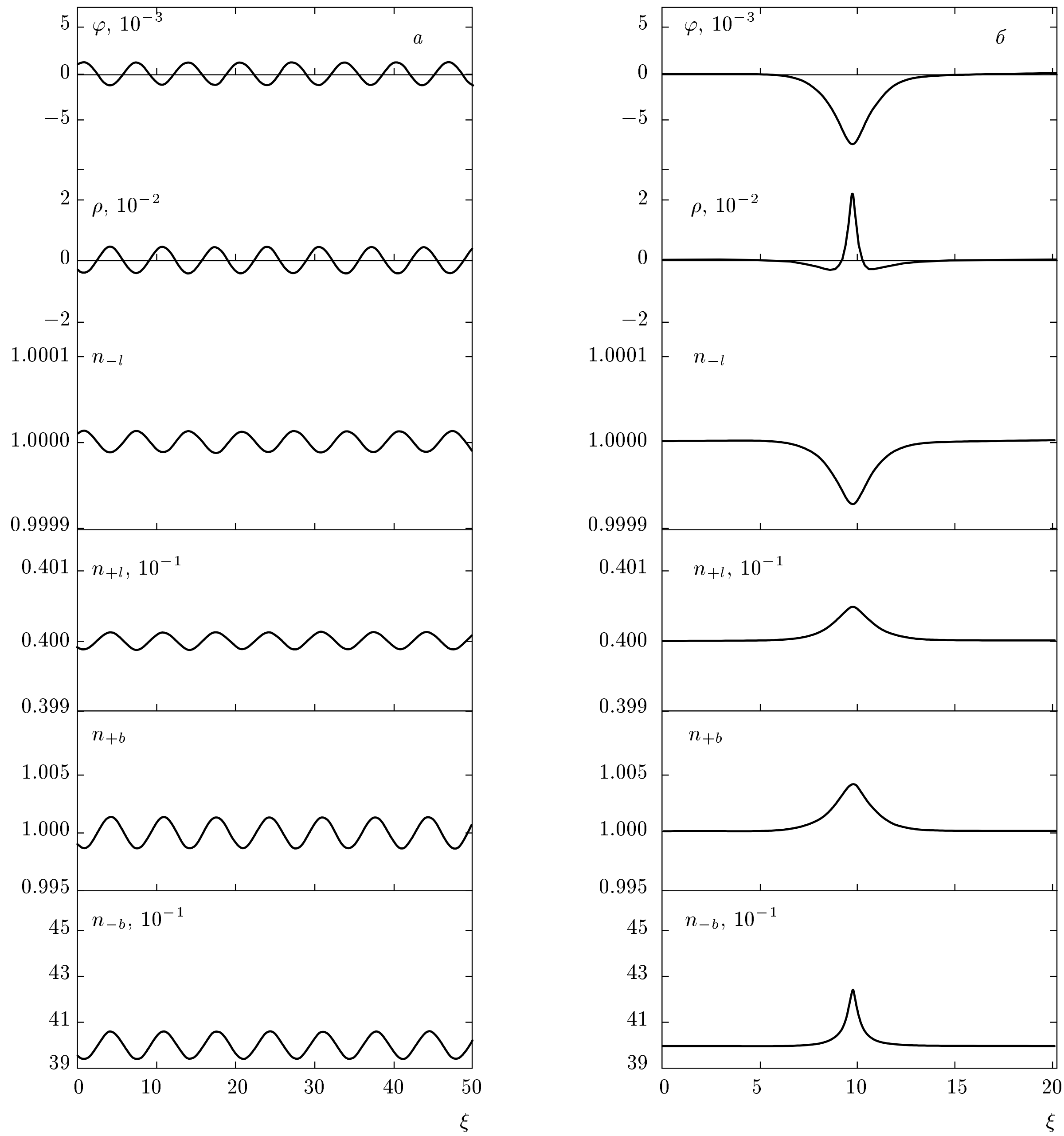

Рис. 4. Партитуры барионной волны акустического типа: a — периодическая волна, $б$ — солитон. ρ — плотность электрического заряда

График $U(\varphi)$ для скорости из первого сектора рис. 1 показан на рис. 3*а*. Видно, что финитное движение фиктивной частицы вблизи точки равновесия $\varphi = 0$ невозможно. Следовательно, никакие стационарные волны, бегущие со скоростью, приходящейся на первый сектор, невозможны.

График $U(\varphi)$, соответствующий второму сектору, представлен на рис. 3*б*. Видно, что вблизи точки равновесия существует потенциальная яма (закрашена). Периодическим колебаниям фиктивной частицы в этой яме отвечает периодическая волна акустического типа. Этот факт полностью совпадает с выводами линейной теории: периодическая акустическая мода может существовать только в диапазоне фазовых скоростей второго сектора.

Для скорости V, приходящейся на третий сектор, существуют две формы графиков $U(\varphi)$ (рис. 3*в,г*), отличающиеся друг от друга тем, что левый конец графика может лежать или выше, как на рис. 3*в*, или ниже горизонтальной оси, как на рис. 3*г* (бо-

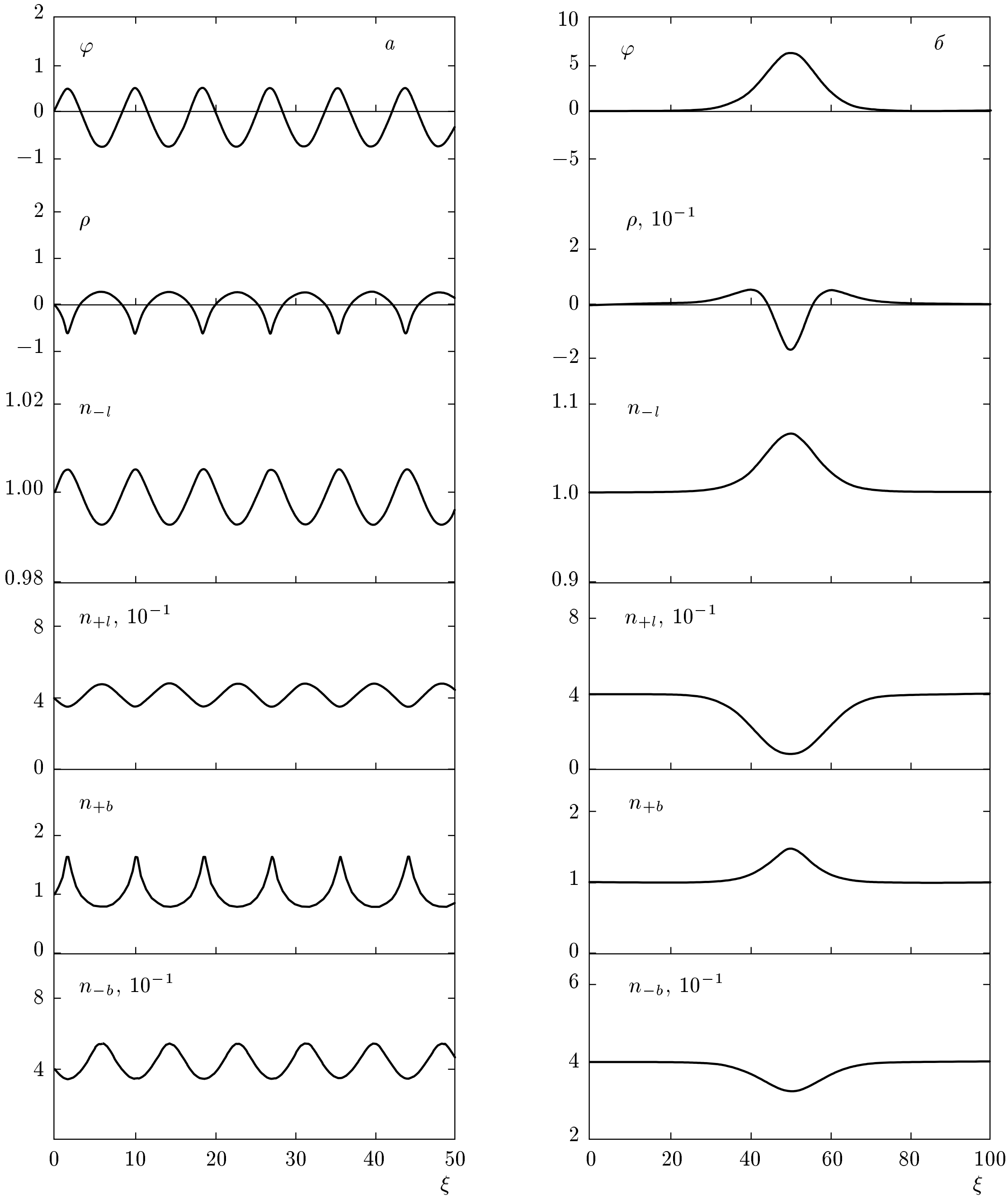

Рис. 5. Партитуры барионной волны плазменного типа: a — периодическая волна, $б$ — солитон

лее важно — выше или ниже локального максимума в точке равновесия). Периодические колебания фиктивной частицы в потенциальных ямах слева от точки равновесия в обоих этих случаях не могут описывать периодические волны, так как такие колебания не проходят точку равновесия. Тем не менее, для рис. 3*в* физичной оказывается траектория фиктивной частицы, выходящей из точки равновесия и возвращающейся назад за бесконечное «время» ξ (ее уровень выделен жирной горизонтальной линией). Такая траектория целиком лежит на сепаратрисе фазового портрета частицы, причем эта траектория отвечает акустическому солитону в амбиплазме. Понятно, что такую траекторию нельзя построить для потенциала $U(\varphi)$, показанного на рис. 3*г*, а это, в свою очередь, означает, что никаких волн здесь не существует. Подводя итог рассмотрению третьего сектора, заключаем, что сектор оказался разделенным на два подсектора: $3'$, в котором существует акустический солитон, и $3''$, в котором никаких стационарных волн нет (см. снова рис. 1). Граница между подсекторами определяет максимальную скорость солитона V_{kp2}. Обращаем внимание на то, что, если определить число Маха акустической волны, как скорость, нормированную на V_{s2}, то акустический солитон всегда сверхзвуковой, т. е. $\mathrm{M}_2 > 1$. Этот факт полностью совпал с выводом работы [18]: если правильно определять нормированную скорость, то число Маха солитона всегда оказывается больше единицы. Это согласуется и с предсказаниями разд. 2 о том, что диапазоны скоростей солитонов и периодических волн не пересекаются. Для численных значений параметров $\alpha_1 = 0.4$ и $\chi = 0.91$ значения чисел Маха, при которых возможен акустический солитон, лежат в интервале $1 < \mathrm{M}_2 < 1.44$.

График $U(\varphi)$ для скорости из четвертого сектора рис. 1 показан на рис. 3*д*. Видно, что вблизи точки равновесия существует потенциальная яма (закрашена). Аналогично второму сектору, яма соответствует периодической волне плазменного типа. Этот факт также совпадает с выводами линейной теории: периодическая плазменная мода может существовать только в диапазоне фазовых скоростей четвертого сектора.

Итоги рассмотрения пятого сектора полностью повторяют итоги рассмотрения третьего с той лишь разницей, что здесь речь идет о солитоне плазменного типа, в котором колебания барионов противофазны. Сектор 5 на рис. 1 также разделен лучом с тангенсом угла наклона V_{kp1} на два подсектора — $5'$ и $5''$, — а графики $U(\varphi)$ для подсекторов приведены соответственно на рис. 3*е,ж*. Важно еще раз подчеркнуть, что для солитона плазменного типа $\mathrm{M}_1 > 1$, при этом нормировку скорости следует уже проводить на V_{s1}. В итоге, для численных значений параметров $\alpha_1 = 0.4$ и $\chi = 0.91$ значения чисел Маха, при которых возможен плазменный солитон, лежат в диапазоне $1 < \mathrm{M}_1 < 3.28$.

Таким образом, в диапазонах скоростей волны V, отвечающих секторам 2 и 4 на рис. 1 возможно существование периодических волн соответственно акустического и плазменного типов, а в диапазонах, отвечающих секторам $3'$ и $5'$, — солитонов также акустического и плазменного типов. В других диапазонах скоростей волн нет.

Партитуры волн (синхронизованные графики профилей физических величин в волне) всех четырех типов показаны на рис. 4, 5.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены линейная и нелинейная теории продольных электростатических барионных волн в максвелловской амбиплазме, построенные в рамках многожидкостной газодинамической модели. В рамках линейных теорий выведены и проанализированы дисперсионные уравнения указанных волн и определены характерные фазовые скорости. Найдено, что в амбиплазме возможны два типа таких волн: акустический и плазменный. В рамках нелинейных теорий получены точные решения в виде периодических и уединенных (солитонов) волн и определены их предельные скорости (числа Маха).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Alfven, Rev. Mod. Phys. **37**, 652 (1965).
2. Х. Альвен, *Космическая плазма*, Мир, Москва (1981).
3. H. Alfven and O. Klein, Arkiv Fysik **23**, 187 (1962).
4. A. H. Nelson and K. Ikuta, Astrophys. Space Sci. **20**, 439 (1973).
5. B. Singh and G. L. Kalra, Astrophys. Space Sci. **109**, 63 (1985).
6. A. H. Nelson, Nature **241**, 185 (1973).
7. G. L. Kalra and B. Singh, Astrophys. Space Sci. **103**, 321 (1984).
8. F. Verheest, M. A. Hellberg, G. J. Gray, and R. L. Mace, Astrophys. Space Sci. **239**, 125 (1996).
9. A. E. Dubinov, I. D. Dubinova, and V. A. Gordienko, Phys. Plasmas **13**, 082111 (2006).
10. F. Verheest, Phys. Plasmas **13**, 082301 (2006).
11. В. А. Гордиенко, И. Д. Дубинова, А. Е. Дубинов, Физика плазмы **32**, 987 (2006).
12. S. I. Popel, S. V. Vladimirov, and P. K. Shukla, Phys. Plasmas **2**, 716 (1995).
13. M. Salahuddin, H. Saleem, and M. Saddiq, Phys. Rev. E **66**, 036407 (2002).
14. А. Е. Дубинов, М. А. Сазонкин, Физика плазмы **35**, 18 (2009).
15. H. Alinejad, Astrophys. Space Sci. **325**, 2009 (2010).
16. А. Е. Дубинов, М. А. Сазонкин, ЖЭТФ **138**, 979 (2010).
17. А. Е. Дубинов, И. Д. Дубинова, С. К. Сайков, W-*функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики*, РФЯЦ–ВНИИЭФ, Саров (2006).
18. А. Е. Дубинов, Физика плазмы **35**, 1070 (2009).