

ПОГЛОЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПОЛЯ В СУСПЕНЗИИ МАГНИТНЫХ НАНОЧАСТИЦ

Ю. Л. Райхер, В. И. Степанов*

*Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук
614013, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 8 июня 2010 г.

Рассмотрена генерация тепла за счет вязкого трения в разбавленной суспензии однодоменных частиц ферромагнетика, находящейся под действием вращающегося магнитного поля; предполагается, что частицы суспензии обладают высокой магнитной жесткостью. Для решения задачи использован кинетический подход (уравнение вращательной диффузии). Изучено поведение удельной мощности тепловыделения (SLP) как функции амплитуды напряженности поля H и частоты ω при постоянной температуре. По любому из этих параметров, при другом фиксированном, SLP сначала возрастает квадратично, а затем принимает значение насыщения. Анализ найденной зависимости SLP (H, ω) позволяет определять для конкретной суспензии оптимальные и допустимые интервалы использования магнитоиндукционного нагрева.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория магнитоиндукционной гипертермии (МИГ) в последние годы стремительно развивается. Естественно, что, становясь все ближе к практическому применению, она одновременно специализируется. В частности, выделяются направления, детально изучающие применение низко- и высокочастотных полей, суперпарамагнитных и магнитожестких частиц, генерацию тепла в слабо- и высоковязких средах и т. д. Важнейшей характеристикой любого метода МИГ или его модификации является удельная поглощаемая мощность. Синонимы этого термина — «specific loss power» (SLP) и «specific absorption rate». Значение указанной величины принято рассчитывать на единицу массы частицы ферромагнетика или феррита, которая является медиатором МИГ.

В связи с разработкой техники МИГ возникает, в том числе, вопрос о типе переменного поля, воздействующего на наночастицы, взвешенные в прогреваемом объекте. Как видно из литературы, в подавляющем большинстве лабораторных и натуральных экспериментов [1–5] индуктором является соленоид, т. е. используется линейно поляризованное поле. На учет этой геометрии ориентированы и теоретические расчеты поглощения энергии [2, 6, 7]. Однако с недав-

них пор началось изучение магнитоиндукционной генерации тепла вращающимся полем, которая сулит существенный выигрыш по SLP; в качестве примера укажем на интересную экспериментальную работу [8].

Ключевым моментом теории воздействия вращающегося поля на магнитную жидкость является уравнение движения намагниченности, для вывода которого требуется мезоскопическое рассмотрение — решение задачи о вращении броуновской частицы в вязкой матрице. Этому предмету посвящено значительное количество работ, использующих как феноменологический [9, 10], так и кинетический [11–13] подходы. Заметим, однако, что вплоть до последнего времени полученные решения использовались преимущественно для изучения магнито-вязкого эффекта в магнитных жидкостях. Иными словами, генерация тепла в суспензии феррочастиц под действием вращающегося магнитного поля и связь тепловыделения с основными параметрами поля и частиц фактически остались неизученными. В настоящей работе на основе кинетической модели дан анализ отклика разбавленного ансамбля броуновских магнитожестких частиц, взвешенных в жидкости, на вращающееся магнитное поле, и получены зависимости SLP от амплитуды поля, температуры и частоты. Отдельно рассмотрен важный предел «больших» частиц: ситуация, когда броунов-

*E-mail: stepanov@icmm.ru

ское движение пренебрежимо мало. Этот случай актуален при использовании систем более грубой дисперсности, чем обычные магнитные жидкости, что часто встречается в лабораторных разработках по МИГ, см., например, [2, 4].

2. ОРИЕНТАЦИОННАЯ КИНЕТИКА МАГНИТОЖЕСТКОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОЛЕ

Рассмотрим магнитную суспензию, разбавленную настолько, что находящиеся в ней однодоменные частицы ферромагнетика можно считать независимыми. Тогда вопрос о поглощении энергии магнитной суспензией сводится к задаче о генерации тепла в ансамбле невзаимодействующих частиц, взвешенных в неподвижной линейно вязкой немагнитной жидкости¹⁾. Запишем ориентационно-зависимую часть энергии частицы во внешнем поле $\mathbf{H} = H\mathbf{h}$:

$$U = -\mu H(\mathbf{e} \cdot \mathbf{h}), \quad (1)$$

где $\mu = M_S V_m$ — магнитный момент частицы, V_m — объем ее магнитного «ядра», M_S — намагниченность ферромагнетика. Магнитная анизотропия частицы считается настолько высокой, что магнитный момент всегда направлен вдоль оси легкого намагничивания, т. е. фактически речь идет о наноразмерном постоянном магните. Поэтому в формуле (1) единичный вектор \mathbf{e} означает одновременно и направление магнитного момента, и направление оси частицы. Совместим плоскость xy лабораторной системы координат с плоскостью вращения поля \mathbf{H} , так что единичный вектор \mathbf{h} имеет компоненты

$$\mathbf{h} = (\cos \omega t, \sin \omega t, 0), \quad (2)$$

где ω — частота вращения, т. е. поле (2) имеет правую циркулярную поляризацию. Чтобы получить стационарное решение задачи, удобно перейти из лабораторной в систему координат, вращающуюся вместе с полем, положив $\phi = \varphi - \omega t$. В этом представлении главные векторы задачи, выраженные через сферические углы, суть

$$\mathbf{h} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (3)$$

а энергия частицы (1) принимает вид

$$U = -\mu H \sin \theta \cos \phi \quad (4)$$

¹⁾ Гидродинамика магнитной жидкости под действием вращающегося поля рассмотрена в работах [14, 15], где показано, что, если жидкость, заключенная в полости/сосуде, не имеет свободной поверхности, то макроскопическое движение в ней не возникает.

и не содержит явной зависимости от времени.

Для наноразмерных частиц, которые обычно используются в МИГ, броуновское движение является существенным фактором. Ансамбль таких частиц при отсутствии взаимодействия между ними удобно описывать при помощи одночастичной функции распределения $W(\mathbf{e}, t)$, которая является решением уравнения ориентационной диффузии (уравнение Фоккера–Планка) — см., например, [16]. Во вращающейся системе отсчета указанное уравнение имеет форму

$$2\tau_B \left(\frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{J}} \right) W = \hat{\mathbf{J}} W \hat{\mathbf{J}} \left(\frac{U}{k_B T} + \ln W \right), \quad (5)$$

где $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{e} \times \partial / \partial \mathbf{e}$ — оператор бесконечно малого поворота, $\tau_B = 3\eta V_h / k_B T$ — характерное время броуновской вращательной диффузии, η — вязкость жидкости, а V_h — «гидродинамический» объем частицы, учитывающий наличие у нее немагнитного поверхностного слоя и внешней оболочки. При достижении системой стационарного состояния производная по времени в уравнении (5) должна обращаться в нуль.

Введем безразмерные параметры задачи:

$$\tau_B = \tau_0 \xi, \quad \tau_0 = 3\eta V_h / \mu H, \quad \xi = \mu H / k_B T, \quad (6)$$

а стационарную функцию распределения представим в виде ряда

$$W(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^{k=l} b_{l,k} Y_{l,k}(\theta, \phi) \quad (7)$$

по нормированным сферическим гармоникам $Y_{l,k}$, определяемым как

$$Y_{l,k}(\theta, \phi) = (-1)^k \sqrt{\frac{(2l+1)(l-k)!}{4\pi(l+k)!}} P_l^k(\cos \theta) e^{ik\phi},$$

$$-l \leq k \leq l, \quad Y_{l,k} = (-1)^k Y_{l,-k}^*,$$

где P_l^k — присоединенные полиномы Лежандра. Коэффициенты $b_{l,k}$ разложения (7) являются первыми моментами функции распределения W :

$$b_{l,k} = \langle Y_{l,k}^*(\theta, \phi) \rangle = \int W Y_{l,k}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (8)$$

Подстановка (7) в (5) с учетом (8) дает бесконечную цепочку двухиндексных рекуррентных уравнений

$$\begin{aligned}
 & -2ik\omega\tau_B b_{l,k} + l(l+1)b_{l,k} = \\
 & = \frac{1}{2}\xi \left[(l+1)\sqrt{\frac{(l-k-1)(l-k)}{(2l-1)(2l+1)}} b_{l-1,k+1} + \right. \\
 & \quad + l\sqrt{\frac{(l+k+2)(l+k+1)}{(2l+1)(2l+3)}} b_{l+1,k+1} - \\
 & \quad - (l+1)\sqrt{\frac{(l+k-1)(l+k)}{(2l-1)(2l+1)}} b_{l-1,k-1} - \\
 & \quad \left. - l\sqrt{\frac{(l-k+2)(l-k+1)}{(2l+1)(2l+3)}} b_{l+1,k+1} \right], \quad (9)
 \end{aligned}$$

которую удобно решать методом матричной прогонки [17]. Для рассматриваемой задачи главный интерес представляет коэффициент $b_{1,1}$, поскольку он с точностью до числового множителя совпадает с нормированной проекцией m намагниченности ансамбля частиц на плоскость вращения поля. Двумерный вектор m удобно представить в комплексном виде:

$$\begin{aligned}
 m &= -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} b_{1,1} = \langle \sin\theta \cos\phi \rangle - i\langle \sin\theta \sin\phi \rangle = \\
 & = m_{\parallel} - im_{\perp}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

где индексы указывают направление относительно вектора \mathbf{h} .

Рассмотрим предельные случаи, в которых кинетическое уравнение (5) имеет аналитические решения. В приближении $\xi \ll 1$ (малые амплитуды поля и/или высокие температуры), оставляя в уравнении (9) гармоники с индексами не выше $l = 1$, находим

$$m = \frac{\xi}{3} \frac{1}{1 + i\omega\tau_B}; \quad (11)$$

в поле с противоположным направлением вращения выражение (11) должно быть заменено на комплексно-сопряженное.

В атермическом пределе (отсутствие броуновского движения, $\xi \rightarrow \infty$) динамика частицы определяется действием на нее вязкого и магнитного моментов сил и в принятых переменных описывается системой уравнений

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \omega - \frac{1}{2\tau_0} \frac{\sin\phi}{\sin\theta}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{2\tau_0} \cos\theta \cos\phi. \quad (12)$$

При выполнении условия $2\omega\tau_0 < 1$ (низкие частоты) стационарное ($\partial/\partial t = 0$) решение имеет вид

$$\theta = \pi/2, \quad \phi = \arcsin(2\omega\tau_0). \quad (13)$$

В этом режиме нормированная намагниченность есть

$$m_{\parallel} = \sqrt{1 - 4\omega^2\tau_0^2}, \quad m_{\perp} = 2\omega\tau_0, \quad (14)$$

т. е., во вращающейся системе отсчета она неподвижна и составляет с направлением поля угол ϕ , определяемый соотношением (13).

В случае $2\omega\tau_0 > 1$ (высокие частоты) магнитному моменту частицы доступно множество различных орбит, однако все они изохронны. Период возникающей прецессии отличен от периода поля и составляет [18, 19]

$$T = \frac{2\tau_0\pi}{\sqrt{(2\omega\tau_0)^2 - 1}}. \quad (15)$$

Первое асимптотическое ($\xi \rightarrow \infty$) решение для m было получено в работе [18]. В ней авторы, определяя намагниченность системы путем усреднения по периоду T , использовали предположение о равной вероятности всех ориентаций магнитного момента в начальный момент времени. Как было отмечено позднее в работе [19], такое допущение оправдано лишь на временах, меньших τ_B , когда система еще не полностью «забыла» влияние начальных условий. По этой причине решение, указанное в работе [18], не является в полном смысле стационарным. Авторы работы [19] показали, что в атермическом пределе распределение орбит вращения частиц ансамбля неравномерно, и получили установившееся решение, потребовав обращения в нуль плотности потока представляющих точек на единичной сфере в направлении, поперечном к регулярному круговому движению векторов \mathbf{e} . Двумерный вектор m , см. (10), найденный в работе [19], в наших обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned}
 m_{\parallel} &= 0, \quad m_{\perp} = 2\omega\tau_0 - \frac{4\omega^2\tau_0^2 - 1}{2\sqrt{3}\omega\tau_0} \times \\
 & \times \ln\left(\frac{\sqrt{8\omega^2\tau_0^2 + 1} + \sqrt{3}}{\sqrt{8\omega^2\tau_0^2 + 1} - \sqrt{3}}\right) \times \\
 & \times \left[\ln\left(\frac{\sqrt{8\omega^2\tau_0^2 + 1} + 1}{\sqrt{8\omega^2\tau_0^2 + 1} - 1}\right) \right]^{-1}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

В пределе высоких частот величина m_{\perp} представлена в виде асимптотического ряда:

$$m_{\perp} = \frac{1}{3\omega\tau_0} + \frac{7}{360(\omega\tau_0)^3} + \frac{23}{15120(\omega\tau_0)^5} + \dots, \quad (17)$$

первый член которого совпадает с высокочастотным пределом формулы (11).

Зависимости поперечной намагниченности $m_{\perp}(\omega)$, рассчитанные для различных значений ξ по уравнению (9), представлены на рис. 1. Как видно, все линии, соответствующие конечным температурам, лежат внутри предельного контура,

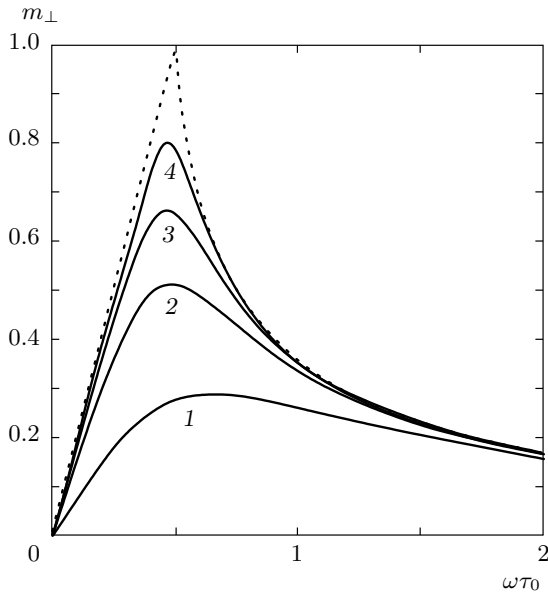


Рис. 1. Частотные зависимости поперечной намагниченности m_{\perp} во вращающемся поле при амплитудах $\xi = 2$ (1), 5 (2), 10 (3), 25 (4) и в атермическом пределе $\xi \rightarrow \infty$ (пунктирная линия)

образованного низкочастотной (14) и высокочастотной (16) ветвями атермического предела. При низких частотах восходящие участки всех графиков имеют линейное поведение, а коэффициент наклона при любых значениях ξ можно выразить соотношением

$$m_{\perp} / \omega = \tau_{\perp} L(\xi), \tag{18}$$

где $L(\xi)$ — функция Ланжевена, τ_{\perp} — время релаксации перпендикулярной к полю компоненты намагниченности в постоянном поле ($\omega = 0$). Полный численный расчет времени τ_{\perp} выполнен в работе [20], где оно обозначено как $\tau_{eff}^{(1)}$. Там же показано, что при любых ξ очень хорошей точностью обладает простая формула

$$\tau_{\perp} = \frac{2\xi L}{\xi - L} \tau_0, \tag{19}$$

полученная в работе [21] в так называемом приближении эффективного поля. Как легко видеть, величина τ_{\perp} изменяется от $\tau_B = \xi \tau_0$ при $\xi \ll 1$ (высокие температуры) до $2\tau_0$ при $\xi \rightarrow \infty$. В последнем случае формулы (18) и (19) приводят к полученному выше низкотемпературному пределу (14).

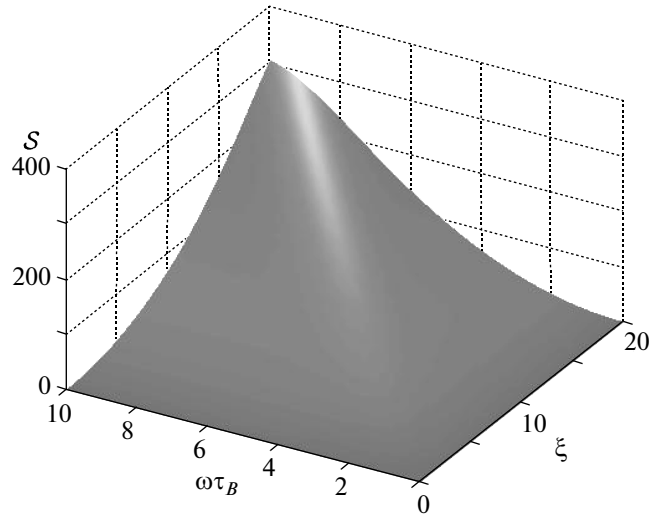


Рис. 2. Зависимость нормированной удельной мощности поглощения в расчете на единицу массы частицы

3. ПОГЛОЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Наличие сил вязкого трения приводит к тому, что магнитный момент частицы, вращающейся в жидкости, отстает от направления приложенного поля. Угол (лаг) между векторами \mathbf{H} и \mathbf{e} прямо связан с диссипацией, сопровождающей это движение. Действительно, генерация тепла (работа сил вязкого трения) за цикл изменения поля в расчете на одну частицу выражается формулой

$$A = \mu \oint \mathbf{e} d\mathbf{H} = \mu \oint \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{H}} dt. \tag{20}$$

Заметим, что в случае магнито жестких частиц в непроводящей матрице вязкая диссипация является единственным источником нагрева системы.

Для вычисления интеграла (20) вернемся в лабораторную систему координат, где компоненты единичных векторов \mathbf{e} и \mathbf{h} явно зависят от времени. После интегрирования по периоду колебаний $2\pi/\omega$ получаем

$$A = 2\pi\mu H \langle \sin \theta \sin \phi \rangle = 2\pi\mu m_{\perp} H, \tag{21}$$

угловые скобки обозначают усреднение по статистическому ансамблю. Как указано выше, удельную поглощаемую мощность принято определять в расчете на единицу массы частицы. Используя формулу (21), находим

$$SLP = \frac{\omega A}{2\pi\rho V_m} = \frac{1}{\rho} \omega M_S m_{\perp} H, \tag{22}$$

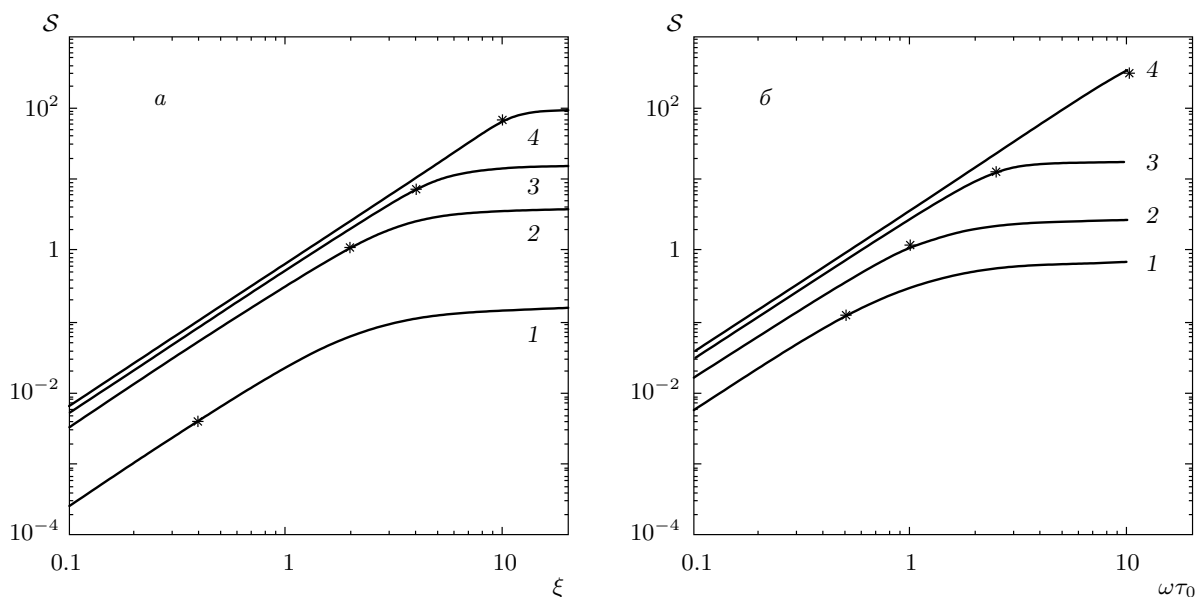


Рис. 3. Нормированные зависимости мощности поглощения как функции: величины магнитного поля (а) при $\omega\tau_B = 0.2$ (1), 1 (2), 2 (3), 5 (4), частоты поля (б) при $\xi = 2$ (1), 5 (2), 10 (3), 20 (4). Звездочками отмечены точки, отвечающие условию $\omega\tau_B = \xi/2$

где ρ — плотность материала частицы.

Общий вид функции SLP в нормировке

$$S = (2\rho V_m \tau_B / k_B T) \cdot \text{SLP} \tag{23}$$

в зависимости от частоты и амплитуды приложенного поля представлен на рис. 2. Обратим внимание, что здесь для частотной переменной использованы единицы $\omega\tau_B$. Именно в этом представлении координаты графика являются независимыми для изотермического случая; переменная $\omega\tau_0$ на рис. 1 удобна для изучения перехода к атермическому пределу.

Отличительной чертой поверхности, показанной на рис. 2, является «ребро», лежащее над прямой $\omega\tau_B = \xi/2$. Эта прямая разделяет плоскость параметров $(\xi, \omega\tau_B)$ на две области. В области слабых полей ($\xi/\omega\tau_B < 1/2$) функция $S(\xi)$ при любой частоте сначала квадратично растет с увеличением поля, а затем, достигнув «ребра», принимает значение насыщения. По другую сторону от указанной границы, т.е. в полуплоскости $\xi/\omega\tau_B > 1/2$, аналогично ведет себя функция $S(\omega\tau_B)$: при любом ξ она квадратично возрастает, но практически перестает увеличиваться по достижении «ребра». Эти свойства иллюстрирует рис. 3, где построены точные (полученные из численного решения) сечения поверхности рис. 2 плоскостями $\xi, \omega\tau_B = \text{const}$. Видно, что после пересечения «ребра» рост функции S замед-

ляется тем сильнее, чем больше значения аргументов ξ или $\omega\tau_B$.

Обнаруженные свойства зависимости SLP прямо вытекают из поведения функции m_{\perp} , графики которой приведены на рис. 1. Прежде всего заметим, что «сепаратриса» $\omega\tau_B = \xi/2$ рис. 2 в координатах рис. 1 соответствует точке стыка ветвей $\omega\tau_0 = 1/2$. Далее, удерживая в формулах только главные параметрические зависимости, получаем связь удельной мощности поглощения энергии вращающегося поля с магнитным откликом в виде $S \propto \xi\omega m_{\perp}$. Тогда из квазилинейности m_{\perp} при $\omega\tau_0 < 1/2$ (см. рис. 1) сразу следует, что в этой области $S \propto \omega^2$ и не зависит от ξ . По другую сторону «ребра», т.е. при $\omega\tau_0 > 1/2$, функцию m_{\perp} можно с принятой точностью заменить первым членом разложения (17). Пользуясь этим упрощением, находим, что $S \propto \xi^2$ и не зависит от $\omega\tau_B$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Выполненный анализ зависимости SLP от частоты и амплитуды вращающегося поля позволяет указать оптимальные диапазоны применения именно этого типа поля. Мы получили следующие простые приближенные правила.

1. При фиксированной частоте вращения поля поглощаемая мощность растет квадратично по амплитуде поля и достигает наибольшего значения при $H_* \approx 6\omega\eta V_h / M_S V_m$; дальнейшее увеличение поля неэффективно.

2. При фиксированной амплитуде поля поглощаемая мощность растет квадратично с ростом частоты и достигает наибольшего значения при $\omega_* \approx M_S H V_m / 6\eta V_h$; дальнейшее увеличение частоты неэффективно.

Как видно, в использованном приближении температура не входит явно в предельные оценки. При более точном расчете влияние температуры, конечно, проявляется тем больше, чем она выше. Напрямую, как следует из рис. 3а, при $\omega\tau_B = 0.2$ квадратичный рост мощности поглощения сохраняется и в полях, превышающих H_* почти на порядок. Аналогичная недооценка имеет место и для ω_* — см. на рис. 3б кривую, соответствующую $\xi = 2$, наименьшему из приведенных значений. Однако указанное расхождение быстро убывает при понижении температуры.

В заключение приведем размерные значения полученных оценок. Полагая $V_h \sim 10V_m$, $M_S \approx 400$ Гс (феррит) и $\eta \approx 10^{-2}$ (вода), для частоты вращения поля $\omega/2\pi = 10$ кГц имеем $H_* \sim 90$ Э. Величина $\omega H/2\pi$ составляет, таким образом, около 10^6 , что вполне укладывается в критерий Брезовича [22]. Для того чтобы при указанной амплитуде поля и комнатной температуре выполнялось условие $\xi \approx 5$, следует использовать частицы феррита диаметром 20–25 нм, что совпадает, например, с оценками работы [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 08-02-00802, 09-02-91070) и ЕСОНЕТ 21394NH. Авторы благодарят В. А. Шарипову, А. Е. Ермакову, М. А. Уймину и В. В. Русакову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Hergt, R. Hiergeist, M. Zeisberger, G. Glockl, W. Weitschies, L. P. Ramirez, I. Hilger, and W. A. Kaiser, *J. Magn. Magn. Mater.* **280**, 358 (2004).
2. J. P. Fortin, J. Servais, C. Wilhelm, C. Menager, J. C. Bacri, and F. Gazeau, *J. Amer. Chem. Soc.* **129**, 2628 (2007).
3. J. P. Fortin, F. Gazeau, and C. Wilhelm, *Europ. Biophys. J.* **37**, 223 (2008).
4. B. E. Kashevsky, V. E. Agabekov, S. B. Kashevsky, K. A. Kekalo, E. Yu. Manina, I. V. Prokhorov, and V. S. Ulashchik, *Particuology* **6**, 322 (2008).
5. L. M. Lacroix, R. Bel Malaki, J. Carrey, S. Lachaize, M. Respaud, G. F. Goya, and B. Chaudret, *J. Appl. Phys.* **105**, 023911-4 (2009).
6. R. E. Rosensweig, *J. Magn. Magn. Mater.* **252**, 370 (2002).
7. Yu. L. Raikher and V. I. Stepanov, *J. Magn. Magn. Mater.* **320**, 2692 (2008).
8. В. А. Шарипова, М. А. Уймин, А. А. Мызык, А. Е. Ермаков, *Физ. мет. и металловед.* **110**, 5 (2010).
9. М. И. Шлиомис, *ЖЭТФ* **61**, 2411 (1971).
10. М. И. Шлиомис, *ДАН СССР* **218**, 1071 (1974).
11. A. C. Levi, R. E. Hobson, and F. R. McCourt, *Canad. J. Phys.* **51**, 180 (1973).
12. M. I. Shliomis, T. P. Lyubimova, and D. V. Lyubimov, *Chem. Eng. Comm.* **67**, 275 (1988).
13. B. U. Felderhof, *Phys. Rev. E* **66**, 051503-8 (2002).
14. R. E. Rosensweig, J. Popplewell, and R. J. Jonston, *J. Magn. Magn. Mater.* **85**, 171 (1990).
15. A. V. Lebedev and A. F. Pshenichnikov, *J. Magn. Magn. Mater.* **122**, 227 (1993).
16. Yu. L. Raikher and M. I. Shliomis, *Adv. Chem. Phys.* **87**, 595 (1994).
17. Yu. L. Raikher and V. I. Stepanov, *Adv. Chem. Phys.* **129**, 419 (2004).
18. W. F. Hall and S. N. Busenberg, *J. Chem. Phys.* **51**, 137 (1969).
19. E. J. Hinch and L. G. Leal, *J. Fluid Mech.* **66**, 803 (1972).
20. Yu. L. Raikher, V. I. Stepanov, J.-C. Bacri, and R. Perzynski, *Phys. Rev. E* **66**, 021203-14 (2002).
21. М. А. Марценюк, Ю. Л. Райхер, М. И. Шлиомис, *ЖЭТФ* **65**, 834 (1973).
22. R. Hergt and S. Dutz, *J. Magn. Magn. Mater.* **311**, 187 (2007).