ЖЭТФ, 2011, том 139, вып. 2, стр. 228–234

РАССЕЯНИЕ УЛЬТРАКОРОТКОГО ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА АТОМЕ В ШИРОКОМ СПЕКТРАЛЬНОМ ДИАПАЗОНЕ

В. А. Астапенко *

Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 23 июня 2010 г.

В рамках последовательного квантовомеханического подхода получено описание рассеяния ультракороткого электромагнитного импульса на атомных частицах с учетом возбуждения мишени и недипольности электромагнитного взаимодействия, справедливое в широком спектральном диапазоне. Развитый подход применен к рассеянию одно- и малоцикловых импульсов на многоэлектронном атоме и атоме водорода. Получены спектры рассеянного излучения для различных длительностей ультракороткого импульса. В высокочастотном пределе исследован относительный вклад «упругого» рассеяния одноциклового импульса на атоме водорода в зависимости от несущей частоты и угла рассеяния.

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени достигнуты большие успехи в генерации ультракоротких импульсов электромагнитного поля с контролируемой формой в широком спектральном диапазоне [1–4]. В инфракрасной, видимой и далекой ультрафиолетовой областях спектра получены импульсы, длительность которых равняется периоду колебания электромагнитного поля на несущей частоте (одноцикловые импульсы). Длительность одноцикловых импульсов составляет единицы фемтосекунд в ближней инфракрасной и видимой областях и порядка сотни аттосекунд и меньше в далеком УФ-диапазоне. Такие импульсы создают основу для исследования электронной динамики с разрешением, приближающимся к одной атомной единице времени (24 ас). В терагерцевом диапазоне генерируют полуцикловые импульсы длительностью порядка пикосекунды, перспективные, в частности, для квантовых вычислений с использованием ридберговских состояний атомов [5].

Взаимодействие одно- и субцикловых импульсов с веществом имеет свои характерные черты, отличные от случая многоцикловых импульсов. Как известно, в случае многоцикловых электромагнитных импульсов вероятность фотопроцесса не зависит от фазы электромагнитного поля, а определяется интенсивностью и несущей частотой. Важной специфической особенностью ультракороткого взаимодействия является зависимость вероятности фотопроцесса от фазовых характеристик излучения: фазы несущей по отношению к огибающей и сдвига частоты. Эта фазовая зависимость может быть использована как для получения информации о волновых функциях атомных электронов [6], так и для фазового метода управления светоиндуцированными процессами [7, 8].

Большая часть работ по исследованию взаимодействия ультракоротких импульсов с веществом посвящена фотоионизации и фотовозбуждению атомных частиц [1, 9–12]. Описание фотопроцессов в рамках теории возмущений имеет весьма ограниченную область применимости, поскольку для характерных значений интенсивности излучения, используемых в современных экспериментах, весьма велики нелинейные эффекты.

В случае рассеяния излучения на атомных частицах из-за малой величины сечения процесса теория возмущений оказывается применимой в значительно более широкой области изменения параметров, чем при фотоионизации и фотовозбуждении. Однако использование обычных формул теории возмущений, полученных в пределе длинных импульсов, в случае одно- и субцикловых импульсов становится, вообще говоря, некорректным.

*E-mail: astval@mail.ru

В работах [13–15] развивался метод расчета спектра рассеяния ультракороткого импульса на атомах и молекулах, базирующийся на приближении мгновенного возмущения [16]. Данный подход предполагает, что длительность электромагнитного воздействия на атом должна быть много меньше характерных времен движения атомных электронов. Такое предположение отвечает экстремально малым длительностям импульса излучения порядка единиц и долей аттосекунды, которые в настоящее время недостижимы в эксперименте.

В работе [17] рассеяние ультракороткого лазерного импульса на атоме рассматривалось в рамках классического подхода. Было получено выражение, описывающее напряженность электрического поля в рассеянном излучении через поляризуемость мишени. Возбуждение мишени и недипольность электромагнитного взаимодействия в цитируемой статье не учитывались.

Целью данной работы является развитие последовательного квантовомеханического метода описания рассеяния ультракоротких импульсов на микрочастицах с учетом возбуждения мишени и недипольности электромагнитного взаимодействия, когда неприменим традиционный подход, базирующийся на понятии средней интенсивности излучения и сечения процесса. Развитый метод используется для исследования особенностей рассеяния ультракоротких импульсов на атоме в широком спектральном диапазоне.

2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим рассеяние ультракороткого электромагнитного импульса на атоме с учетом возможного возбуждения мишени. Предполагаем, что пространственно-временная зависимость напряженности электрического поля в импульсе имеет вид

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = \mathbf{e}E_0 g\left(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{c}\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор поляризации, E_0 — амплитуда поля, $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения электромагнитного импульса, $g(\tau)$ — безразмерная функция, определяемая конкретной реализацией импульса, c — скорость света.

Разложим напряженность (1) на плоские волны с частотами ω и волновыми векторами $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$. Тогда рассеяние импульса электромагнитного поля можно представить как рассеяние совокупности плоских волн в плоскую волну с частотой ω', единичным вектором поляризации $\mathbf{e}'$ и волновым вектором $\mathbf{k}' = (\omega'/c)\mathbf{n}'$.

Исходя из описанной выше картины для дифференциальной вероятности рассеяния за все время действия импульса с одновременным возбуждением мишени из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$ можно записать равенство

$$\frac{dW_{fi}}{d\Omega' d\omega'} = \int\limits_0^\infty \frac{d\sigma_{fi}(\mathbf{k}',\mathbf{k})}{d\Omega' d\omega'}\,\frac{dN_{ph}}{d\omega\, dS}\,d\omega, \tag{2}$$

где

$$\frac{d\sigma_{fi}(\mathbf{k}',\mathbf{k})}{d\Omega' d\omega'} = \delta(\omega - \omega' - \omega_{fi}) \times \times \frac{\omega'^3\omega}{c^4}\left|e'^*_l e_s c^{ls}_{fi}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\right|^2 \tag{3}$$

— дифференциальное по телесному углу и частоте сечение рассеяния плоской волны на мишени, $c^{ls}_{fi}(\mathbf{k}',\mathbf{k})$ — тензор рассеяния излучения с учетом возбуждения мишени;

$$\frac{dN_{ph}}{d\omega\, dS} = \frac{c}{(2\pi)^2}\,\frac{|\mathbf{E}(\omega)|^2}{\hbar\omega} \tag{4}$$

— число фотонов, составляющих поле электромагнитного импульса, в спектральном интервале $(\omega, \omega + d\omega)$, прошедшее через единичную площадь за все время действия излучения, $\mathbf{E}(\omega)$ — фурье-образ напряженности электрического поля. Подставляя формулу (3) в правую часть равенства (2), приходим к выражению для дифференциальной вероятности фотопроцесса за все время действия поля, которое обобщает полученное ранее выражение [18] на учет возбуждения мишени и недипольности электромагнитного взаимодействия.

Из формул (1)–(4) находим следующее основное равенство:

$$\frac{dW_{fi}}{d\Omega' d\omega'} = \frac{\omega'^3}{c^3}\,\frac{E_0^2}{4\pi^2\hbar}\left|g(\omega' + \omega_{fi})\right|^2 \times \times \left|e'^*_l e_s c^{ls}_{fi}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\right|^2, \quad \mathbf{k} = \frac{\omega' + \omega_{fi}}{c}\,\mathbf{n}, \tag{5}$$

где $g(\omega)$ — фурье-образ функции временной формы импульса $g(\tau)$; по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Формула (5) может быть также получена в рамках последовательного квантовомеханического подхода во втором порядке теории возмущений. Соответствующий вывод приведен в Приложении.

В дальнейшем будем полагать, что тензор рассеяния сводится к скаляру $c^{ls}_{fi} = \delta_{ls}c_{fi}$ ($c_{fi} = c^{ll}_{fi}/3$), тогда в правой части равенства (5) появляется скалярное произведение векторов поляризации падающей и рассеянной волн, которое усредняется стандартным образом для неполяризованного рассеянного излучения.

Рассмотрим далее два случая: рассеяние без возбуждения мишени («упругое» рассеяние) и рассеяние с возбуждением мишени в произвольное состояние.

В случае рассеяния без изменения состояния атома в мультипликативном приближении имеем

$$c_{ii}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \approx \beta_i(\omega')\tilde{F}_{ii}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \qquad (6)$$

где $\beta_i(\omega')$ — динамическая поляризуемость атома в начальном состоянии, $\tilde{F}_{ii}(\mathbf{q}) = F_{ii}(\mathbf{q})/Z$ — нормированный на число электронов атомный формфактор. С учетом (6) из формулы (5) находим после суммирования по поляризациям рассеянного фотона следующее выражение:

$$\frac{dW_{ii}}{d\Omega' d\omega'} = \frac{1 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}')^2}{4\pi^2} \left(\frac{\omega'}{c}\right)^3 \frac{E_0^2}{\hbar} \left|g(\omega')\right|^2 \times \\ \times \left|\beta_i(\omega')\right|^2 \tilde{F}_{ii}^2 \left(2\frac{\omega'}{c} \sin\frac{\theta}{2}\right). \qquad (7)$$

Здесь при записи Δk в аргументе атомного формфактора учтено, что $\omega' = \omega$.

Формулу (7) можно переписать через поляризационный заряд атома

$$Z_{pol}(\omega) = \frac{m\omega^2}{e^2} \left|\beta(\omega)\right| \qquad (8)$$

в виде

$$\frac{dW_{ii}}{d\Omega' d\omega'} = \frac{1 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}')^2}{4\pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{I_0}{I_a} \times \\ \times Z_{pol}^2(\omega') \frac{|\omega_a g(\omega')|^2}{\omega'} \tilde{F}_{ii}^2 \left(2\frac{\omega'}{c} \sin\frac{\theta}{2}\right), \qquad (9)$$

где

$$I_a = c\frac{m^4 e^{10}}{8\pi\hbar^8} \approx 3.5 \cdot 10^{16} \text{ Вт/см}^2, \quad \omega_a = \frac{me^4}{\hbar^3}$$

— атомные единицы интенсивности излучения и частоты,

$$I_0 = c\frac{E_0^2}{8\pi}$$

— средняя интенсивность излучения. В высокочастотном пределе $\omega \gg \omega_t$ (ω_t — характерная собственная частота мишени) поляризационный заряд равен числу электронов в мишени.

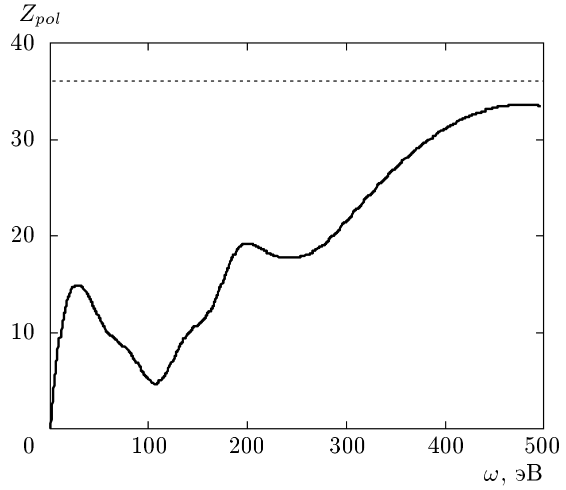

Рис. 1. Поляризационный заряд атома криптона как функция частоты, пунктирной линией показано число электронов в атоме

Частотная зависимость поляризационного заряда атома криптона, вычисленная с помощью экспериментальных данных по фотопоглощению, представлена на рис. 1. Кривая на рис. 1 получена путем расчета мнимой части поляризуемости атома криптона по оптической теореме и восстановления реальной части с помощью соотношения Крамерса–Кронига.

В случае, когда несущая частота импульса ω_c близка к одной из собственных частот возбуждения атома в дискретном спектре $\omega_c \approx \omega_{ri}$ (при этом сила осциллятора соответствующего перехода не равна нулю, $f_{ri} \neq 0$), можно использовать резонансное приближение для поляризуемости, в котором

$$\left|\beta_i(\omega' \approx \omega_{ri})\right|^2 \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^2}{m\omega'^2}\right)^2 \frac{\omega'}{\gamma_{ri}} f_{ri}^2 \omega' G_{ri}(\omega'), \quad (10)$$

где γ_{ri}, $G_{ri}(\omega)$ — ширина линии и форма линии резонансного перехода. Тогда вместо формулы (7) имеем

$$\frac{dW_{ii}(\omega_c \approx \omega_{ri})}{d\Omega' d\omega'} = \frac{1 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}')^2}{8\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{I_0}{I_a} \times \\ \times \frac{\omega'}{\gamma_{ri}} |\omega_a g(\omega')|^2 f_{ri}^2 G_{ri}(\omega'). \quad (11)$$

При записи равенства (11) учтено, что в рассматриваемом спектральном диапазоне атомный формфактор может быть положен равным единице. Из полученной формулы, в частности, следует резонансное усиление вероятности рассеяния за счет наличия множителя ω'/γ_{ri}.

Для ультракороткого импульса с несущей частотой в оптическом диапазоне ширина спектра, как правило, существенно больше ширины линии резонансного перехода в атоме, так что спектральная зависимость вероятности рассеяния будет в основном определяться функцией формы линии резонансного перехода $G_{ri}(\omega')$. В общем случае на спектр рассеянного импульса будет также влиять функция $|g(\omega')|^2$.

Резонансная вероятность (11) может быть обобщена на случай возбуждения атома в процессе рассеяния, если частота рассеянного излучения близка к одной из собственных частот перехода атома из промежуточного состояния в конечное.

Вероятность рассеяния с возбуждением мишени в произвольное состояние (полный спектр рассеяния) получается после суммирования вероятности (5) по всем возможным состояниям $|f\rangle$. Рассмотрим полный спектр рассеяния в высокочастотном диапазоне ($\omega \gg \omega_i$), когда справедливо следующее приближенное выражение для тензора рассеяния:

$$c_{fi}^{(hf)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \approx -\frac{e^2}{m\omega'\omega} F_{fi}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \qquad (12)$$

Подставляя правую часть равенства (12) в формулу (5) и суммируя по всем возможным конечным состояниям, находим следующее выражение для вероятности рассеяния с учетом возбуждения атома:

$$\frac{dW_{tot}^{(hf)}}{d\omega' d\Omega'} = \frac{cE_0^2}{4\pi^2\hbar} \left[1 - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')^2\right] r_e^2 \times \\ \times \int_0^\infty |g(\omega)|^2 S_i(\omega' - \omega, \mathbf{k}' - \mathbf{k}) \frac{d\omega}{\omega}, \qquad (13)$$

где

$$S_i(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\Delta\omega t} \langle i|\hat{n}(\Delta\mathbf{k}, t)\hat{n}(-\Delta\mathbf{k})|i\rangle \qquad (14)$$

— динамический формфактор атома в i-м состоянии. В простейшем приближении динамический формфактор водородоподобного атома равен

$$S(\Delta\omega, \Delta\mathbf{k}) \approx \delta\left(\Delta\omega + \frac{\hbar}{2m}\Delta\mathbf{k}^2\right). \qquad (15)$$

Подставляя правую часть равенства (15) в формулу (13), после интегрирования по частоте ω находим

$$\frac{dW_{tot}^{(hf)}}{d\omega' d\Omega'} \approx \frac{2}{\pi}\left[1 - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')^2\right] \frac{I_0}{\hbar} r_e^2 \frac{|g[\omega(\omega', \theta)]|^2}{\omega(\omega', \theta)}, \qquad (16)$$

где

$$\omega(\omega', \theta) = \omega_r + \omega'\cos\theta - \\ -\omega_r\sqrt{1 - 4\frac{\omega'}{\omega_r}\sin^2\frac{\theta}{2} - \left(\frac{\omega'}{\omega_r}\right)^2 \sin^2\theta}, \qquad (17) \\ \omega_r = \frac{mc^2}{\hbar}.$$

Для $\omega' \ll \omega_r$ имеем $\omega(\omega', \theta) \approx \omega'$, тогда вместо (16) получаем

$$\frac{dW_{tot}^{(hf)}}{d\omega' d\Omega'} \approx \frac{1 - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}')^2}{4\pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{I_0}{I_a} \frac{|\omega_a g(\omega')|^2}{\omega'}. \qquad (18)$$

Полученное выражение описывает полный спектр рассеяния ультракороткого импульса одноэлектронным атомом в высокочастотном приближении. Оно после интегрирования по углу рассеяния с точностью до члена, пропорционального $(\omega'/c\omega_a)^2$, совпадает с формулой (22) из статьи [13], которая была получена в приближении внезапного возмущения.

В высокочастотном пределе, когда $Z_{pol} \approx Z$, отношение вероятности «упругого» рассеяния ультакороткого импульса на водородоподобном атоме (9) к полной вероятности (18) равно квадрату нормированного формфактора атома:

$$R^{(hf)}(\omega', \theta) \equiv \frac{dW_{ii}^{(hf)}}{dW_{tot}^{(hf)}} = \tilde{F}_{ii}^2\left(2\frac{\omega'}{c}\sin\frac{\theta}{2}\right). \qquad (19)$$

Аналогичная формула была получена в работе [14] в рамках метода внезапных возмущений.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим рассеяние на атоме ультракороткого электромагнитного импульса гауссовой формы. Функция, определяющая временную зависимость напряженности электрического поля в формуле (1), имеет вид

$$g(\tau) = \exp(-\tau^2/\Delta t^2)\cos(\omega_c\tau + \varphi), \qquad (20)$$

где ω_c — несущая частота, Δt — временной параметр, пропорциональный длительности импульса, φ — фаза несущей по отношению к огибающей (CE-фаза). Параметр Δt удобно выразить через число периодов в импульсе на несущей частоте n_c: $\Delta t = 2\sqrt{2\pi}\, n_c/\omega_c$. С учетом этого квадрат модуля фурье-образа функции (20), фигурирующий в выражениях для вероятности рассеяния, можно представить в виде

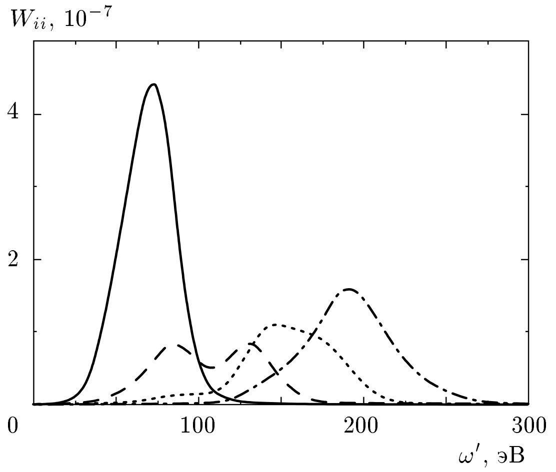

Рис. 2. Спектр «упругого» рассеяния одноциклового импульса на атоме криптона для различных значений несущей частоты: $\hbar\omega_c = 80$ эВ (сплошная кривая), 110 эВ (штриховая), 140 эВ (пунктирная), 180 эВ (штрихпунктирная)

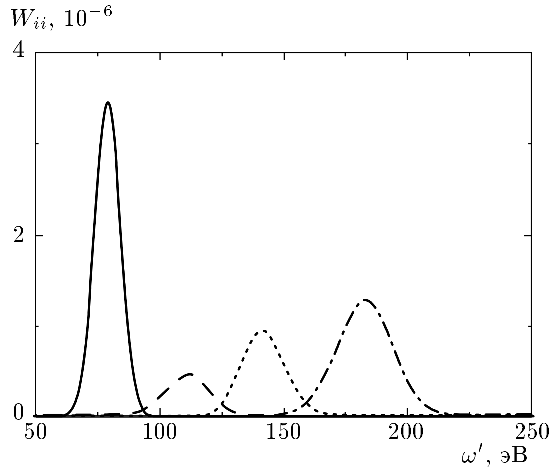

Рис. 3. То же, что на рис. 2, для трехциклового импульса

$$|g(\omega)|^2 = 2\pi^2 \left(\frac{n_c}{\omega_c}\right)^2 G_E(\omega, \omega_c, n_c) \times \times \left[1 + K_{ph}(\omega, \omega_c, n_c)\cos(2\varphi)\right], \quad (21)$$

где

$$G_E(\omega, \omega_c, n_c) = \exp\left[-4\pi n_c^2 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] + + \exp\left[-4\pi n_c^2 \left(1 + \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] \quad (22)$$

— спектральная форма импульса и

$$K_{ph}(\omega, \omega_c, n_c) = \operatorname{sch}\left(8\pi n_c^2 \frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (23)$$

— величина, имеющая смысл параметра фазовой модуляции. Как следует из определения (23), параметр фазовой модуляции имеет заметную величину только для ультракоротких импульсов, когда $n_c \sim 1$.

На рис. 2 представлен спектр «упругого» (без возбуждения мишени) рассеяния одноциклового импульса на атоме криптона, рассчитанный по формуле (7) для угла рассеяния 45° и нескольких значений несущей частоты. Как видно из этого рисунка, в случае одноциклового импульса форма спектра рассеянного излучения существенно зависит от значения несущей частоты. Вдали от минимума частотной зависимости поляризационного заряда атома криптона, приходящегося примерно на 107 эВ (см. рис. 1), спектральные кривые рассеяния имеют симметричную форму с максимумом в центре. Вблизи минимальной частоты ($\hbar\omega_c = 110$ эВ) в спектре рассеяния возникает провал. Как это следует из формулы (9), описанная эволюция спектра рассеяния объясняется наложением двух частотных зависимостей: спектра ультракороткого импульса (21) и спектра поляризационного заряда атома. Для одноциклового импульса, обладающего значительной спектральной шириной, сравнимой с масштабом спектральных особенностей поляризационного заряда атома криптона, это наложение изменяет форму спектральной кривой рассеяния. Ситуация изменяется при переходе к более длинным импульсам, например, к трехцикловому, спектр рассеяния которого на атоме криптона для различных несущих частот представлен на рис. 3. Видно, что в случае трехциклового импульса спектр рассеянного излучения представляет собой колоколообразную кривую, форма которой определяется спектром падающего импульса (21), а амплитуда зависит от величины поляризационного заряда атома на несущей частоте.

На рис. 4 представлен результат расчета по формуле (19) отношения вероятности «упругого» рассеяния одноциклового импульса на атоме водорода в высокочастотном пределе, просуммированной по всем частотам рассеянного излучения, к аналогичной величине для процесса с произвольным возбуждением атома. Данное отношение рассчитано как функция несущей частоты импульса для различных углов рассеяния. На этом же рисунке сплошной кривой представлен вклад «упругого» процесса, просум-

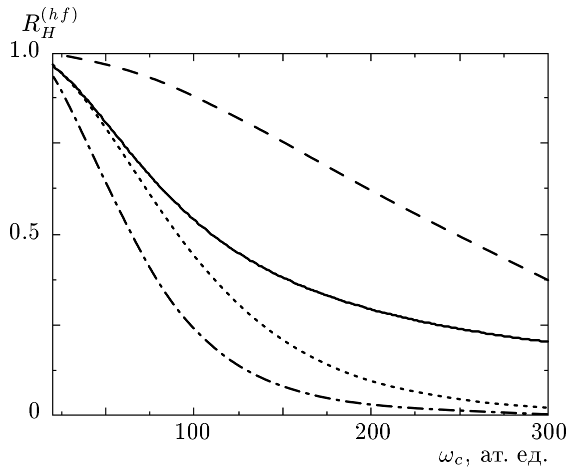

Рис. 4. Отношение вероятности «упругого» рассеяния одноциклового импульса на атоме водорода к полной вероятности, рассчитанное в высокочастотном пределе для трех углов рассеяния θ и для вероятностей, проинтегрированных по углам (сплошная кривая): $\theta = 30^\circ$ (штриховая), 90° (пунктирная), 180° (штрихпунктирная)

мированного по углам рассеяния. Видно, что для малых значений несущей частоты электромагнитного импульса рассеяние в основном происходит без возбуждения атома. Для больших углов рассеяния роль упругого канала быстрее уменьшается с ростом частоты. Для интегральной по углам вероятности процесса вклады упругого и неупругого каналов становятся одинаковыми при несущей частоте, приблизительно равной 112 ат. ед., что соответствует энергии фотона около 3 кэВ.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во втором порядке теории возмущений получено выражение для полной (за все время действия электромагнитного поля) спектрально-угловой вероятности рассеяния ультракороткого импульса на атомной частице. Выведенная формула описывает рассеяние в широком спектральном диапазоне и учитывает возбуждение мишени и недипольность электромагнитного взаимодействия. В высокочастотном пределе спектрально-угловое распределение рассеянного излучения выражается через атомный формфактор, а в резонансном случае — через силу осциллятора и спектральную форму линии резонансного перехода. Вероятность «упругого» канала (без возбуждения мишени) определяется динамической поляризуемостью или поляризационным зарядом атома.

С помощью полученных формул проанализировано рассеяние ультракоротких импульсов гауссовой формы на атоме криптона и атоме водорода. В частности показано, что в случае одноциклового импульса форма спектра рассеянного на атоме криптона излучения зависит от несущей частоты и динамической поляризуемости атома. Так, на несущей частоте вблизи минимума частотной зависимости поляризационного заряда в спектре рассеянного излучения возникает провал. Для более длинных импульсов спектр рассеянного излучения имеет гауссову форму, а максимальное значение вероятности процесса определяется величиной поляризуемости мишени на несущей частоте.

В высокочастотном приближении определен относительный вклад «упругого» канала в вероятность рассеяния одноциклового импульса на атоме водорода для различных углов рассеяния и для интегральных по углу вероятностей. Показано, что этот вклад равен квадрату атомного формфактора и уменьшается с ростом несущей частоты и угла рассеяния.

Полученные формулы могут быть полезны при анализе распространения ультракоротких импульсов в газовой среде.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 07-09-00165, 10-02-01095).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пользуясь правилами диаграммной техники, для амплитуды спонтанного рассеяния электромагнитного импульса в плоскую волну $\{\mathbf{k}', \mathbf{e}'\}$ с возбуждением атома из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$ после интегрирования по времени можно получить следующее выражение:

$$M_{fi} = \frac{1}{\hbar}\Big\{\langle f|\hat{V}_{1'0}\mathfrak{J}(E_f + \hbar\omega')\hat{V}(\omega' + \omega_{fi})|i\rangle + \\ + \langle f|\hat{V}(\omega' + \omega_{fi})\mathfrak{J}(E_f - \hbar\omega')\hat{V}_{1'0}|i\rangle\Big\}, \quad (\text{A.1})$$

где $\mathfrak{J}(E)$ — функция Грина атома, $\hat{V}(\omega) = -\hat{\mathbf{d}}\mathbf{E}(\omega)$ — временной фурье-образ оператора возмущения атома электромагнитным импульсом, $\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{E}_0 g(\omega) \times \times \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ — фурье-образ напряженности электрического поля в импульсе (1), $V_{1'0} = -\hat{\mathbf{d}}\mathbf{E}_{1'0}$ — матричный элемент, отвечающий спонтанному излучению фотона, $\mathbf{E}_{1'0} = \mathbf{e}'^{*}\sqrt{2\pi\hbar\omega'/V}\exp(-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})$ — матричный элемент оператора квантованного электрического поля в шредингеровском представлении (без временной части), V — объем квантования. Подставляя приведенные выше равенства в формулу (А.1), находим

$$M_{fi} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega'}{V}}\,E_0 g(\omega'+\omega_{fi}) e'^{*}_{l} e_s c^{ls}_{fi}(\mathbf{k}',\mathbf{k}), \quad (\text{A.2})$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{n}(\omega' + \omega_{fi})/c$, $c^{ls}_{fi}(\mathbf{k}',\mathbf{k})$ — тензор рассеяния электромагнитного поля на атоме с учетом его возбуждения. Согласно известным квантовомеханическим правилам для вероятности рассматриваемого процесса имеем

$$dW_{fi} = |M_{fi}|^2 d\Gamma', \quad (\text{A.3})$$

где

$$d\Gamma' = V\frac{\omega'^2}{8\pi^3 c^3}\,d\omega' d\Omega_{\mathbf{k}'} \quad (\text{A.4})$$

— статистический вес состояния электромагнитного поля, отвечающего рассеянному фотону. Подставляя выражения (А.2), (А.4) в формулу (А.3), находим для спектрально-угловой вероятности процесса следующее равенство:

$$\frac{dW_{fi}}{d\omega' d\Omega'} = \frac{\omega'^3}{4\pi^2 c^3 \hbar}\,E_0^2\,\left|g(\omega'+\omega_{fi})\right|^2 \times \\ \times \left|e'^{*}_{l} e_s c^{ls}_{fi}(\mathbf{k}',\mathbf{k})\right|^2. \quad (\text{A.5})$$

Полученное выражение совпадает с формулой (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
2. E. Goulielmakis, M. Schultze, M. Hofstetter et al., Science **320**, 1614 (2008).
3. T. Wittmann, B. Horvath, W. Helml et al., Nature Phys. **5**, 357 (2009).
4. U. Morgner, Nature Photonics **4**, 14 (2010).
5. P. K. Mandal and A. Speck, Phys. Rev. A **81**, 013401 (2010).
6. D. B. Miloševiæ, G. G. Paulus, and W. Becker, Phys. Rev. A **71**, 061404(R) (2005).
7. A. Apolonski, P. Dombi, G. G. Paulus et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 073902 (2004).
8. I. Znakovskaya, P. von den Hoff, and S. Zherebtsov, Phys. Rev. Lett. **103**, 103002 (2009).
9. N. Doslic, Phys. Rev. A **74**, 013402 (2006).
10. N. V. Bordyug and V. P. Krainov, Las. Phys. Lett. **4**, 418 (2007).
11. М. Н. Кривогуз, О. М. Саркисов, С. Я. Уманский, КЭ **35**, 653 (2005).
12. M. G. Arustamyan and V. A. Astapenko, Laser Phys. **18**, 768 (2008).
13. В. И. Матвеев, ЖЭТФ **124**, 1023 (2003).
14. В. И. Матвеев, ЖТФ **73**, 17 (2003).
15. М. К. Есеев, В. И. Матвеев, Н. В. Абикулова, Опт. и спектр. **106**, 231 (2009).
16. А. М. Дыхне, Г. Л. Юдин, УФН **138**, 377 (1977).
17. P. A. Golovinskii and E. M. Mikhailov, Laser Phys. Lett. **3**, 259 (2006).
18. V. A. Astapenko, Phys. Lett. A **374**, 1585 (2010).