

# КВАЗИЧАСТИЦЫ В КОМБИНАЦИОННОМ РАССЕЙАНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА АТОМАРНОМ КОНДЕНСАТЕ

*Л. В. Ильичёв\**

*Новосибирский государственный университет  
630090, Новосибирск, Россия*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 23 июля 2010 г.

Рассмотрено комбинационное рассеяние сильной электромагнитной волны на свободном атомарном бозе-конденсате. В системе атомов и фотонов выделяется подсистема, динамика которой естественным образом описывается в терминах квазичастиц — квазиатомов и квазифотонов. Законы дисперсии квазичастиц прерываются интервалом неустойчивости. Внутри этого интервала введение квазичастиц невозможно, а формально продолженные законы дисперсий приобретают мнимые составляющие. Динамическая модель рассеяния обобщена включением диссипативных процессов гибели рассеянных фотонов и надконденсатных атомов. Найдено стационарное решение соответствующего квантового управляющего уравнения, что позволяет вычислить импульсные распределения реальных частиц и квазичастиц. Рассмотрены перспективы экспериментального обнаружения квазичастиц.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Концепция квазичастиц лежит в основании физики низковозбужденных состояний квантовых систем многих тел [1]. Атомарный бозе-конденсат является, пожалуй, главным объектом применения данной концепции в экспериментальном и теоретическом плане [2, 3]. Теория Боголюбова для квазичастиц в слабозаимодействующем бозе-газе доказала свою ценность при интерпретации экспериментов с конденсатами захваченных щелочных атомов [4, 5]. В настоящее время основным методом тестирования и контроля атомарного бозе-конденсата является рассеяние световых волн [6]. Это касается также исследования квазичастиц в конденсатах. Применение пары брэгговских импульсов позволяет измерять амплитуды, с которыми рождение и уничтожение атома представлены в операторе рождения квазичастицы [7]. Техника брэгговской спектроскопии лежит в основе методов исследования законов дисперсии квазичастиц в атомарных конденсатах [8], в том числе многообразия ветвей, порожденного формой конденсата [9].

Во всех упомянутых работах рассеяние электромагнитных волн служило инструментом исследования квазичастиц в надконденсатной составляющей ансамбля атомов. Эта составляющая, как и сами квазичастицы, была порождена межатомным взаимодействием в газе, т. е. его неидеальностью. В настоящей работе рассматривается комбинационное рассеяние на свободном конденсате невзаимодействующих атомов в терминах квазичастиц. Последние появляются в системе атомы + излучение в процессе рассеяния, что радикально отличает их от обычных квазичастиц в системе бозе-атомов. Квазичастицы настоящей работы рождаются как результат суперпозиции акта рождения фотона и уничтожения атома (или наоборот). Мотивация рассмотрения такого рода квазичастиц следующая.

Корректное квантовомеханическое описание акта комбинационного рассеяния излучения на ансамбле атомов предполагает рассмотрение взаимодействия по крайней мере четырех квантованных бозонных мод: двух атомарных и двух электромагнитных. Как известно, такой подход встречает значительные математические трудности. Построение аналитической модели процесса все же возможно

\*E-mail: leonid@iae.nsk.su

при рассмотрении двух мод с классической позиции. При этом амплитуды этих мод становятся параметрами нового эффективного гамильтониана взаимодействия. Моды конденсата допускают представление  $s$ -числовыми полями — конденсатными волновыми функциями. Многофотонные состояния электромагнитных мод в состояниях, близких к когерентным состояниям Глаубера, также представимы как классические поля с заданной амплитудой. Таким образом, в зависимости от конкретной физической ситуации при описании комбинационного рассеяния возможны различные выборы комбинации пары классических и пары квантованных мод. Соответствующий эффективный гамильтониан взаимодействия оказывается квадратичным по операторам рождения и уничтожения квантов, что позволяет использовать хорошо разработанные методы анализа квадратичных квантовых систем. В работе [10] квантованными модами являлись моды излучения, а конденсат описывался  $s$ -числовым одномодовым полем (исходная и конечная атомарные моды в акте рассеяния предполагались тождественными). Такая модель становится неадекватной при рассеянии атомов из конденсатной моды в изначально незаселенное состояние. Соответствующая атомарная мода должна рассматриваться как квантованная по крайней мере на начальном этапе процесса рассеяния. Второй квантованной модой оказывается одна из мод излучения. В настоящей работе рассматривается случай, когда рождение (уничтожение) фотона в этой моде в результате процесса рассеяния сопровождается появлением (исчезновением) атома в изначально незаселенном состоянии. При этом обе квантованные моды, атомарная и фотонная, в общем случае подвержены необратимому взаимодействию с окружением. Это взаимодействие может моделировать процесс детектирования атомов и фотонов.

Целью настоящей работы является рассмотрение процесса комбинационного рассеяния сильной электромагнитной волны на свободном атомарном конденсате в терминах квазичастиц. Будет определен вид операторов рождения и уничтожения квазичастиц и их законы дисперсии. Поскольку без процесса рассеяния в системе присутствуют атомы и фотоны, новые квазичастицы естественным образом относятся или к квазиатомам, или к квазифотонам. Чисто динамическая модель рассеяния будет дополнена учетом диссипативных процессов, что позволит определить стационарное состояние системы фотонов и атомов и плотности распределения квазичастиц в импульсном пространстве.

В разд. 2 эффективный гамильтониан комбинационного рассеяния преобразован с введением понятия квазиатомов и квазифотонов с определением их законов дисперсии. Учет диссипативных процессов — гибель рассеянных фотонов и спонтанный распад надконденсатных атомов — осуществлен в разд. 3. Завершает статью обсуждение полученных результатов и краткое описание предлагаемого способа экспериментального подтверждения существования квазичастиц на примере квазифотонов.

## 2. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим динамику рассеяния классической монохроматической плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  и частотой  $\omega_0$  на однородном бозе-конденсате невзаимодействующих атомов. Предполагаем, что атомы конденсата находятся в основном внутреннем состоянии с нулевым значением импульса поступательного движения. В результате акта рассеяния атом перемещается из конденсата в состояние с энергией  $\varepsilon$  (отсчитываемой от основного состояния) и приобретает

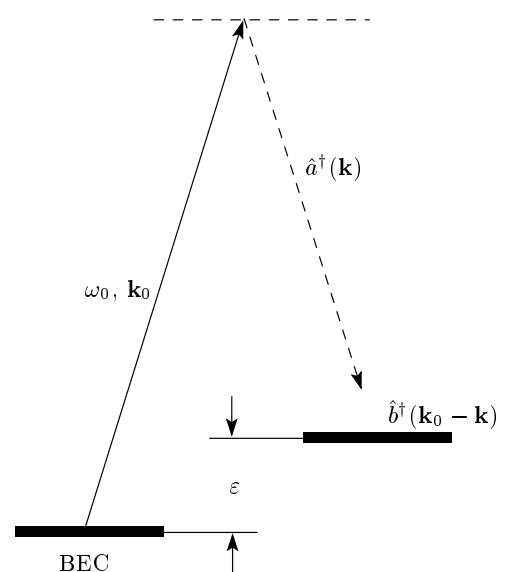


Рис. 1. Схема процесса комбинационного рассеяния классической электромагнитной волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  и частотой  $\omega_0$  на однородном атомарном бозе-конденсате (БЕС) с нулевым значением импульса ( $\mathbf{p} = 0$ ). В каждом акте рассеяния рождается (уничтожается) пара: фотон с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и атом с импульсом  $\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$

некоторый импульс. Если конденсат можно считать неисчерпаемым, то это перемещение выглядит как рождение атома в возбужденном состоянии. В данном акте также рождается фотон квантованной электромагнитной моды с волновым вектором, обеспечивающим сохранение полного импульса в процессе рассеяния (рис. 1). Гамильтониан  $\hat{H}$  описываемого процесса представим в виде суммы:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{H}(\mathbf{k}), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{H}(\mathbf{k}) = & ck\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) + \left( (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})^2 / 2m + \varepsilon - \omega_0 \right) \times \\ & \times \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) + \\ & + \lambda\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) + \lambda\hat{a}(\mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$  и  $\hat{a}(\mathbf{k})$  — операторы рождения и уничтожения фотонов в квантованной моде, отвечающей определенному волновому вектору  $\mathbf{k}$ ,  $\hat{b}^\dagger(\mathbf{k})$  и  $\hat{b}(\mathbf{k})$  — операторы рождения и уничтожения атомов в возбужденном состоянии с импульсом  $\mathbf{k}$ ,  $c$  — скорость света в вакууме. Первые два слагаемых в правой части выражения (2) являются собственными гамильтонианами системы фотонов и надконденсатных атомов. Последняя пара слагаемых описывает собственно процесс рассеяния. Параметр  $\lambda$  определяет эффективность рассеяния и пропорционален произведению амплитуды классической световой волны и амплитуды конденсата  $\sqrt{N}$ , где  $N$  — число атомов в конденсате. Фазовым преобразованием операторов этот параметр сделан действительным (положительным). Частичным переходом к представлению взаимодействия устранена также гармоническая (на частоте  $\omega_0$ ) зависимость  $\lambda$  от времени. При этом появилось соответствующее дополнительное слагаемое в собственном гамильтониане атомов в (2).

Заметим, что каждый из гамильтонианов  $\hat{H}(\mathbf{k})$  (при выбранном  $\mathbf{k}$ ) содержит те и только те слагаемые полного гамильтониана  $\hat{H}$ , которые построены из пары  $\hat{a}(\mathbf{k})$ ,  $\hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$  фотонного и атомного операторов и их сопряженных, связанных законом сохранения импульса при рассеянии. Поскольку все слагаемые из (2) квадратичны по этим операторам, мож-

но, следуя идее Боголюбова (см., например, [1]), задаться поиском канонического преобразования, приводящего  $\hat{H}(\mathbf{k})$  к виду

$$\begin{aligned} \hat{H}(\mathbf{k}) = & \omega_1(\mathbf{k})\hat{f}_1^\dagger(\mathbf{k})\hat{f}_1(\mathbf{k}) + \\ & + \omega_2(\mathbf{k})\hat{f}_2^\dagger(\mathbf{k})\hat{f}_2(\mathbf{k}) + h(\mathbf{k}). \quad (3) \end{aligned}$$

Операторы  $\hat{f}_i^\dagger(\mathbf{k})$  и  $\hat{f}_i(\mathbf{k})$  трактуются как операторы рождения и уничтожения невзаимодействующих квазичастиц типа  $i = 1, 2$  с импульсом  $\mathbf{k}$  и наследуют от фотонных и атомных операторов бозе-природу коммутационных соотношений:

$$[\hat{f}_i(\mathbf{k}), \hat{f}_{i'}(\mathbf{k}')] = 0, \quad [\hat{f}_i(\mathbf{k}), \hat{f}_{i'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{i,i'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \quad (4)$$

При таком преобразовании в выражении (3) появляется также некоторая  $c$ -числовая функция от  $\mathbf{k}$ , конкретный вид которой не важен для дальнейшего.

При поиске необходимого канонического преобразования заметим, что рождающиеся в процессе рассеяния атомы имеют импульс, дополняющий импульс родившегося фотона до волнового вектора  $\mathbf{k}_0$  классической волны. Величина последнего порядка  $(\omega_0 - \varepsilon)/c$ . По этой причине можно пренебречь кинетической составляющей энергии атомов в (2) на фоне частоты  $\omega_0 - \varepsilon$ . В результате данного упрощения энергии  $\omega_i(\mathbf{k})$  квазичастиц оказываются зависящими только от величины  $k$  импульса, т. е.  $\omega_i(\mathbf{k}) = \omega_i(k)$ .

Удобно строить квазичастицы в форме квазифотонов и квазиатомов так, чтобы они превращались в обычные невзаимодействующие фотоны и атомы в пределе  $\lambda \rightarrow 0$  слабого рассеяния. С учетом этого соображения результат поиска необходимого канонического преобразования оказывается следующим. Вне интервала

$$\Delta = \{ck : \omega_0 - \varepsilon - 2\lambda \leq ck \leq \omega_0 - \varepsilon + 2\lambda\} \quad (5)$$

гамильтониан  $\hat{H}(\mathbf{k})$  действительно можно представить в виде (3) с соотношениями коммутации (4) для квазичастичных операторов. Удобно, однако, записать результаты в виде, допускающем продолжение найденных выражений и на внутренность интервала  $\Delta$ :

$$\omega_{1,2}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2}(ck + \omega_0 - \varepsilon) + \frac{1}{2}\sqrt{(ck - \omega_0 + \varepsilon)^2 - 4\lambda^2}, & ck > \omega_0 - \varepsilon, \\ \pm \frac{1}{2}(ck + \omega_0 - \varepsilon) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{(ck - \omega_0 + \varepsilon)^2 - 4\lambda^2}\right)^*, & ck \leq \omega_0 - \varepsilon, \end{cases} \quad (6)$$

$$\hat{f}_1(\mathbf{k}) = \begin{cases} u_+(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) + v_+(\mathbf{k})\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}), & ck > \omega_0 - \varepsilon, \\ u_-(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) + v_-(\mathbf{k})\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}), & ck \leq \omega_0 - \varepsilon, \end{cases} \quad (7)$$

$$\hat{f}_2^\dagger(\mathbf{k}) = \begin{cases} u_-(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) + v_-(\mathbf{k})\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}), & ck > \omega_0 - \varepsilon, \\ u_+(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) + v_+(\mathbf{k})\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}), & ck \leq \omega_0 - \varepsilon. \end{cases} \quad (8)$$

Коэффициенты  $u_\pm(\mathbf{k})$  и  $v_\pm(\mathbf{k})$  преобразований Боголюбова в (7) и (8) для импульсов вне интервала (5) даются выражениями

$$\begin{aligned} u_\pm(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{|1 - \tau_\pm(\mathbf{k})|^2}}, \\ v_\pm(\mathbf{k}) &= \frac{\tau_\pm(\mathbf{k})}{\sqrt{|1 - \tau_\pm(\mathbf{k})|^2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_\pm(\mathbf{k}) &= 2\lambda \times \\ &\times \left[ ck - \omega_0 + \varepsilon \pm \sqrt{(ck - \omega_0 + \varepsilon)^2 - 4\lambda^2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Вид дисперсионных кривых для квазичастиц представлен на рис. 2. В интервале (5) гамильтонианы  $\hat{H}(\mathbf{k})$  не имеют стационарных состояний. Выражения для дисперсий  $\omega_1(\mathbf{k})$  и  $\omega_2(\mathbf{k})$  приобретают мнимые части. Нетрудно заметить, что величины  $\tau_\pm(\mathbf{k})$  становятся комплексными с единичным модулем. Формальное продолжение определения операторов рождения и уничтожения квазичастиц дает

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\mathbf{k}) &\propto \exp(-i\psi_{\mathbf{k}})\hat{a}(\mathbf{k}) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}), \\ \hat{f}_2^\dagger(\mathbf{k}) &\propto \exp(i\psi_{\mathbf{k}})\hat{a}(\mathbf{k}) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\exp(i\psi_{\mathbf{k}}) = \frac{2\lambda}{ck - \omega_0 + \varepsilon + i\sqrt{4\lambda^2 - (ck - \omega_0 + \varepsilon)^2}}. \quad (12)$$

Операторы (11) уже не подчиняются коммутационным соотношениям (4). Решая гейзенберговское уравнение для оператора  $\hat{a}(\mathbf{k}, t)$  внутри интервала (5), можно убедиться, что формально продолженные операторы квазичастиц (11) отвечают соответственно за растущую и убывающую части  $\hat{a}(\mathbf{k}, t)$ <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \hat{a}(\mathbf{k}, t) &= \frac{-i\lambda}{\sqrt{4\lambda^2 - (ck - \omega_0 + \varepsilon)^2}} \times \\ &\times \left[ \exp(-i\omega_1(k)t) \left( \exp(-i\psi_{\mathbf{k}})\hat{a}(\mathbf{k}) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \right) - \right. \\ &\left. - \exp(i\omega_2(k)t) \left( \exp(i\psi_{\mathbf{k}})\hat{a}(\mathbf{k}) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>1)</sup> Дисперсии  $\omega_{1,2}(k)$  определены таким образом, что в представлении Гейзенберга для импульсов из интервала (5) имеем  $\hat{f}_1(\mathbf{k}) \propto \exp(-i\omega_1(k)t)$ ,  $\hat{f}_2^\dagger(\mathbf{k}) \propto \exp(i\omega_2(k)t)$ ,  $\hat{f}_1^\dagger(\mathbf{k}) \propto \exp(i\omega_1(k)t)$  и  $\hat{f}_2(\mathbf{k}) \propto \exp(-i\omega_2(k)t)$ .

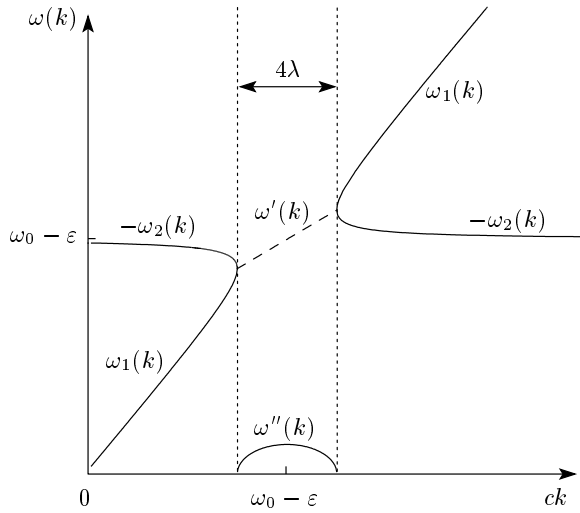
Наличие интервала неустойчивости  $\Delta$  ограничивает применимость динамической модели рассеяния, основанной на гамильтониане (1), небольшими временами. Экспоненциальный рост (как в (13)) в конце концов выведет решение за пределы применимости предположения о «неисчерпаемости» конденсата и классической электромагнитной волны. Реалистичная модель обязательно должна учитывать диссипацию — гибель фотонов из квантованных полевых мод и спонтанный распад надконденсатных атомов, связанных с конденсатом процессом рассеяния. Такая модель строится в следующем разделе.

### 3. СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ УЧЕТЕ ДИССИПАЦИИ

Рассмотрим модельное управляющее уравнение для статистического оператора  $\hat{\rho}_t$  системы надконденсатных атомов и квантованных фотонных мод:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\rho}_t &= -i[\hat{H}, \hat{\rho}_t] + \\ &+ \gamma_a \sum_{\mathbf{k}} \left( 2\hat{a}(\mathbf{k})\hat{\rho}_t\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k})\hat{\rho}_t - \hat{\rho}_t\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) \right) + \\ &+ \gamma_b \sum_{\mathbf{k}} \left( 2\hat{b}(\mathbf{k})\hat{\rho}_t\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k})\hat{\rho}_t - \right. \\ &\left. - \hat{\rho}_t\hat{b}^\dagger(\mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь динамический член процесса комбинационного рассеяния дополнен диссипативными слагаемыми, ответственными за гибель фотонов и атомов. Существенно, что выбранный вид диссипативных слагаемых таков, что каждому событию исчезновения частицы отвечает вполне определенное значение ее импульса, т. е. атомы и фотоны гибнут локально в импульсном пространстве. Скорости этих процессов задаются величинами  $\gamma_a$  и  $\gamma_b$ . Данный выбор приводит к простой структуре стационарного статистического оператора  $\hat{\rho}^{(st)} = \hat{\rho}_\infty$ :



**Рис. 2.** Законы дисперсии квазифотонов  $\omega_1(k)$  и квазиатомов  $\omega_2(k)$  при  $\lambda = 0.25(\omega_0 - \varepsilon)$ . Внутри интервала неустойчивости  $\omega'(k) = \text{Re}\omega_1(k) = -\text{Re}\omega_2(k)$ ,  $\omega''(k) = \text{Im}\omega_1(k) = \text{Im}\omega_2(k)$

$$\hat{\rho}_k^{(st)} = \prod_k \hat{\rho}_k^{(st)}, \quad (15)$$

где операторы  $\hat{\rho}_k^{(st)}$  являются стационарными решениями отвечающего импульсу  $\mathbf{k}$  фрагмента правой части управляющего уравнения (14):

$$i[\hat{H}(\mathbf{k}), \hat{\rho}_k^{(st)}] = \gamma_a \left( 2\hat{a}(\mathbf{k})\hat{\rho}_k^{(st)}\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k})\hat{\rho}_k^{(st)} - \hat{\rho}_k^{(st)}\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) \right) + \gamma_b \left( 2\hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\hat{\rho}_k^{(st)}\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\hat{\rho}_k^{(st)} - \hat{\rho}_k^{(st)}\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \right). \quad (16)$$

Будем искать решение уравнения (16) в виде

$$\hat{\rho}_k^{(st)} = \hat{S}_k \hat{\rho}_k(\hat{n}_a(\mathbf{k}), \hat{n}_b(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})) \hat{S}_k^\dagger, \quad (17)$$

Здесь оператор  $\hat{\rho}_k(\hat{n}_a(\mathbf{k}), \hat{n}_b(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}))$  по предположению является функцией только операторов числа фотонов  $\hat{n}_a(\mathbf{k}) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k})$  и числа атомов  $\hat{n}_b(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) = \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$  в модах с комбинирующими значениями импульсов. Унитарные операторы  $\hat{S}_k$  и  $\hat{S}_k^\dagger$  осуществляют некоторое каноническое преобразование в системе мод  $\hat{a}(\mathbf{k})$  и  $\hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} \hat{S}_k^\dagger \hat{a}(\mathbf{k}) \hat{S}_k &= \text{ch}(\vartheta_k) \hat{a}(\mathbf{k}) + \exp(i\varphi_k) \text{sh}(\vartheta_k) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}), \\ \hat{S}_k^\dagger \hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \hat{S}_k &= \text{ch}(\vartheta_k) \hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) + \exp(i\varphi_k) \text{sh}(\vartheta_k) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (18)$$

Параметры  $\vartheta_k$  и  $\varphi_k$  этого преобразования и вид оператора  $\hat{\rho}_k$  подлежат определению.

При подстановке (17) в уравнение (16) появляются операторные слагаемые разной природы. Выделяя слагаемые, не изменяющие чисел частиц, получаем условие для  $\hat{\rho}_k(\hat{n}_a, \hat{n}_b)$  (для краткости записи опущены импульсные аргументы у чисел частиц):

$$\begin{aligned} &\gamma_a \left( \text{ch}^2(\vartheta_k) (\hat{n}_a + 1) \hat{\rho}_k(\hat{n}_a + 1, \hat{n}_b) + \text{sh}^2(\vartheta_k) \hat{n}_b \hat{\rho}_k(\hat{n}_a, \hat{n}_b - 1) \right) + \\ &+ \gamma_b \left( \text{ch}^2(\vartheta_k) (\hat{n}_b + 1) \hat{\rho}_k(\hat{n}_a, \hat{n}_b + 1) + \text{sh}^2(\vartheta_k) \hat{n}_a \hat{\rho}_k(\hat{n}_a - 1, \hat{n}_b) \right) = \\ &= \left( \text{ch}^2(\vartheta_k) (\gamma_a \hat{n}_a + \gamma_b \hat{n}_b) + \text{sh}^2(\vartheta_k) (\gamma_a (\hat{n}_a + 1) + \gamma_b (\hat{n}_b + 1)) \right) \hat{\rho}_k(\hat{n}_a, \hat{n}_b). \end{aligned} \quad (19)$$

Нетрудно убедиться, что уравнению (19) удовлетворяет оператор  $\hat{\rho}_k(\hat{n}_a, \hat{n}_b)$  вида

$$\hat{\rho}_k(\hat{n}_a, \hat{n}_b) = (1 - q_a(\mathbf{k}))(1 - q_b(\mathbf{k})) q_a(\mathbf{k})^{\hat{n}_a} q_b(\mathbf{k})^{\hat{n}_b}, \quad (20)$$

где

$$q_a(\mathbf{k}) = \frac{\gamma_b}{\gamma_a} \text{th}^2(\vartheta_k), \quad q_b(\mathbf{k}) = \frac{\gamma_a}{\gamma_b} \text{th}^2(\vartheta_k). \quad (21)$$

Сумма операторных слагаемых, пропорциональных  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$  (или  $\hat{a}(\mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$ ) дает уравнение для определения функций  $\vartheta_k$  и  $\varphi_k$ :

$$\begin{aligned} &\text{ch}(\vartheta_k) \text{sh}(\vartheta_k) \left( 2\gamma_a q_a(\mathbf{k}) + 2\gamma_b q_b(\mathbf{k}) - (\gamma_a + \gamma_b)(1 + q_a(\mathbf{k})q_b(\mathbf{k})) \right) = \\ &= i \left( 1 - q_a(\mathbf{k})q_b(\mathbf{k}) \right) \left( (ck - \omega_0 + \varepsilon) \text{ch}(\vartheta_k) \text{sh}(\vartheta_k) + \lambda \text{ch}^2(\vartheta_k) \exp(-i\varphi_k) + \lambda \text{sh}^2(\vartheta_k) \exp(i\varphi_k) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Из этого уравнения получаем

$$\exp(i\varphi_k) = \frac{ck - \omega_0 + \varepsilon + i(\gamma_a + \gamma_b)}{\sqrt{(ck - \omega_0 + \varepsilon)^2 + (\gamma_a + \gamma_b)^2}} \quad (23)$$

и

$$\text{th}(\vartheta_{\mathbf{k}}) = -\frac{\sqrt{(ck - \omega_0 + \varepsilon)^2 + (\gamma_a + \gamma_b)^2}}{2\lambda} + \sqrt{\frac{(ck - \omega_0 + \varepsilon)^2 + (\gamma_a + \gamma_b)^2}{4\lambda^2}} - 1. \quad (24)$$

Выбрано решение для  $\text{th}(\vartheta_{\mathbf{k}})$ , стремящееся к нулю в случае малых значений  $\lambda$ . Из требования  $q_a(\mathbf{k}) < 1$ ,  $q_b(\mathbf{k}) < 1$  для всех значений импульса, обеспечивающего конечность следа статистического оператора  $\hat{\rho}_{\mathbf{k}}$ , вытекает неравенство

$$\text{th}^2(\vartheta_{\mathbf{k}}) < \min\left(\frac{\gamma_a}{\gamma_b}, \frac{\gamma_b}{\gamma_a}\right). \quad (25)$$

Из (21) и (25) получаем условие

$$\lambda < \sqrt{\gamma_a \gamma_b}, \quad (26)$$

при выполнении которого существует физически осмысленное стационарное состояние. Необходимо, однако, заметить, что полученное стационарное состояние является, строго говоря, квазистационарным. Если уход надконденсатных атомов может завершиться их возвращением в конденсатное состояние, то гибель рассеянных фотонов приведет в конце концов к истощению сильной электромагнитной волны.

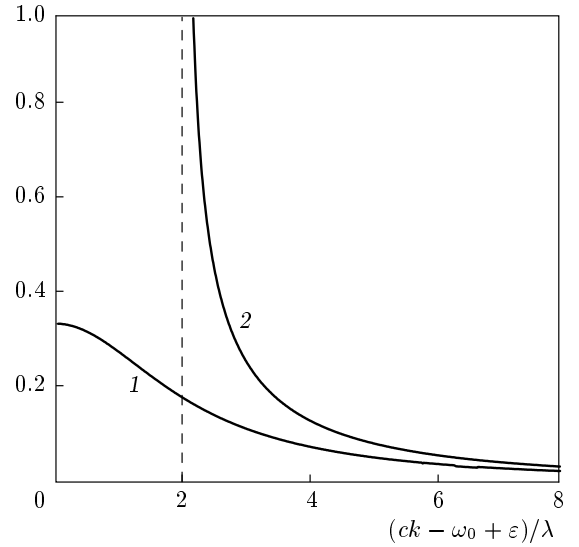
Знание стационарного состояния позволяет вычислить средние числа фотонов и атомов в заданном импульсном состоянии:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) \rangle^{(st)} &= \\ &= \frac{\gamma_b (\gamma_a + \gamma_b) \text{th}^2(\vartheta_{\mathbf{k}})}{(\gamma_a - \gamma_b \text{th}^2(\vartheta_{\mathbf{k}})) (\gamma_b - \gamma_a \text{th}^2(\vartheta_{\mathbf{k}}))}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\langle \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \rangle^{(st)} = \frac{\gamma_a}{\gamma_b} \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) \rangle^{(st)}. \quad (28)$$

Эти числа максимальны (но конечны) в центре интервала неустойчивости. Иначе ведут себя средние числа квазичастиц в заданном импульсном состоянии. Внутри интервала неустойчивости квазичастиц нет. Справа от интервала неустойчивости для чисел квазифотонов имеем

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}_1^\dagger(\mathbf{k}) \hat{f}_1(\mathbf{k}) \rangle^{(st)} &= u_+(\mathbf{k})^2 \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) \rangle^{(st)} + \\ &+ v_+(\mathbf{k})^2 \langle \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \rangle^{(st)} + \\ &+ 2u_+(\mathbf{k})v_+(\mathbf{k}) \cos(\varphi_{\mathbf{k}}) \times \\ &\times \frac{\gamma_a \gamma_b \text{th}(\vartheta_{\mathbf{k}}) (1 + \text{th}^2(\vartheta_{\mathbf{k}}))}{(\gamma_a - \gamma_b \text{th}^2(\vartheta_{\mathbf{k}})) (\gamma_b - \gamma_a \text{th}^2(\vartheta_{\mathbf{k}}))}. \end{aligned} \quad (29)$$



**Рис. 3.** Стационарные импульсные распределения фотонов  $\langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) \rangle^{(st)}$  (кривая 1) и квазифотонов  $\langle \hat{f}_1^\dagger(\mathbf{k}) \hat{f}_1(\mathbf{k}) \rangle^{(st)}$  (кривая 2) справа от центра интервала неустойчивости как функции безразмерной величины  $(ck - \omega_0 + \varepsilon)\lambda^{-1}$  при  $\gamma_a = \lambda$  и  $\gamma_b = 2\lambda$

Числа квазифотонов неограниченно растут при приближении  $ck$  к границе интервала неустойчивости (рис. 3). Аналогично поведение слева от этой границы. Такой же характер поведения имеют числа квазиатомов  $\langle \hat{f}_2^\dagger(\mathbf{k}) \hat{f}_2(\mathbf{k}) \rangle^{(st)}$ . Рост числа квазичастиц вблизи области неустойчивости свидетельствует о росте корреляций между атомами и фотонами.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы ввели понятие квазифотонов и квазиатомов для эффективного гамильтониана (1), описывающего комбинационное рассеяние классической электромагнитной волны на свободном атомарном конденсате. Процессы рождения или аннигиляции пар надконденсатный атом + рассеянный фотон отражены в структуре квазичастиц и их законов дисперсии таким образом, что эффективный гамильтониан представлен как сумма гамильтонианов (3) невзаимодействующих квазиатомов и квазифотонов. Существенно, однако, что такое представление возможно и осуществлено не для всего гамильтониана (1), а только для его части. Если частота рассеянного кванта оказывается в так называемом интервале неустойчивости  $\Delta$  из (5) длиной  $4\lambda$  с центром в точке с частотой  $\omega_0 - \varepsilon$ , взаимодействие такого кванта с атомарной системой уже нельзя трактовать в терминах независимых и невзаимодействующих бозе-квазичастиц.

Таким образом, понятие квазичастиц оказывается адекватным и удобным для описания эволюции системы атомов и фотонов вне интервала неустойчивости. Представим гильбертово пространство  $\mathcal{H}$  системы надконденсатных атомов и фотонов в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{in} \otimes \mathcal{H}_{out}, \quad (30)$$

где

$$\mathcal{H}_{in} = \text{span}\{\otimes_{ck \in \Delta} |n_a(\mathbf{k}), n_b(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\rangle : n_a(\mathbf{k}), n_b(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) = 0, 1, 2, \dots\} \quad (31)$$

и

$$\mathcal{H}_{out} = \text{span}\{\otimes_{ck \notin \Delta} |n_a(\mathbf{k}), n_b(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\rangle : n_a(\mathbf{k}), n_b(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) = 0, 1, 2, \dots\} \quad (32)$$

есть соответственно пространства состояний систем атомов и фотонов, попадающих и не попадающих в интервал неустойчивости в процессе рассеяния ( $\text{span}\{\dots\}$  обозначает линейную оболочку элементов множества  $\{\dots\}$ ). Динамика подсистемы с пространством состояний  $\mathcal{H}_{out}$  представима в терминах квазичастиц. Поэтому для пространства (32) существует базис фоковских состояний квазифотонов и квазиатомов:

$$\mathcal{H}_{out} = \text{span}\{\otimes_{ck \notin \Delta} |n_1(\mathbf{k}), n_2(\mathbf{k})\rangle : n_1(\mathbf{k}), n_2(\mathbf{k}) = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (33)$$

Для этих базисных фоковских состояний формализм квазичастиц дает (в отсутствие диссипации) тривиальный закон эволюции в процессе комбинационного рассеяния:

$$\otimes_{ck \notin \Delta} |n_1(\mathbf{k}), n_2(\mathbf{k})\rangle \mapsto \otimes_{ck \notin \Delta} \times \times \exp[-i\omega_1(\mathbf{k})n_1(\mathbf{k})t - i\omega_2(\mathbf{k})n_2(\mathbf{k})t - ih(\mathbf{k})t] |n_1(\mathbf{k}), n_2(\mathbf{k})\rangle. \quad (34)$$

Существенно, что фотоны и надконденсатные атомы появляются и исчезают в процессе комбинационного рассеяния вне интервала неустойчивости, но числа квазифотонов и квазиатомов в каждом импульсном состоянии остаются неизменными.

Обсудим теперь явление расходимости импульсных распределений квазифотонов и квазиатомов вблизи интервала неустойчивости. На первый взгляд такое поведение не согласуется с введенными в рассмотрение процессами гибели атомов и фотонов. Тем не менее именно эти процессы являются причиной отмеченных расходимостей. С

формальной точки зрения, диссипативные структуры Линдблада из (14), описывающие гибель фотонов и атомов, содержат после представления в терминах операторов квазичастиц слагаемые, отвечающие за рождение соответственно квазиатомов и квазифотонов. При этом скорость рождения неограниченно возрастает при приближении величины импульсов к границам интервала неустойчивости. Следует также заметить, что расходимость импульсных распределений квазичастиц не приводит к расходимости среднего значения энергии, поскольку законы дисперсии (6) для квазифотонов и квазиатомов имеют разные знаки.

Представляют интерес возможные способы экспериментального обнаружения квазичастиц комбинационного рассеяния. Поскольку наиболее яркой чертой законов дисперсии квазичастиц является наличие интервала неустойчивости и явление неограниченного роста импульсных распределений квазичастиц вблизи его границ, естественно использовать эти факторы. Один из возможных способов основан на технике наблюдения резонансов, индуцированных отдачей (recoil induced resonances, RIR) [11]. Помимо волны на частоте  $\omega_0$ , инициирующей комбинационное рассеяние на конденсате, необходимо участие еще пары электромагнитных волн с разницей частот  $\delta$  и разностью волновых векторов  $2\mathbf{q}$ , вызывающих переходы между различными импульсными состояниями надконденсатных атомов<sup>2)</sup>. Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$\hat{V}_{RIR}(t) = \mu \exp(-i\delta t) \times \times \sum_{\mathbf{p}} \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}_0 - \mathbf{p} + \mathbf{q}) \hat{b}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{p} - \mathbf{q}) + \text{h.c.} \quad (35)$$

Если выразить этот гамильтониан через операторы рождения и уничтожения квазичастиц, он будет содержать (наряду с другими) слагаемое, описывающее переходы между квазифотонами:

$$\hat{V}_{RIR}^{(1)}(t) = \exp(-i\delta t) \times \times \sum_{\mathbf{p}} \mu_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \hat{f}_1^\dagger(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \hat{f}_1(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \text{h.c.} \quad (36)$$

Параметр  $\mu$  из (35), определяющий скорость переходов между разными импульсными состояниями атомов, приобретает в (36) зависимость от  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ :

<sup>2)</sup> Полагаем, что частоты этих волн далеки от  $\omega_0 - \epsilon$ , и они поэтому не являются дополнительными источниками фотонов, родившихся при комбинационном рассеянии.

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = & \mu[1 - \tau_+(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2]^{1/2}[1 - \tau_-(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2]^{1/2} \times \\ & \times [\tau_-(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - \tau_+(\mathbf{p} + \mathbf{q})]^{-1} \times \\ & \times [\tau_+(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - \tau_-(\mathbf{p} - \mathbf{q})]^{-1}. \quad (37) \end{aligned}$$

Подбором  $\delta$  и  $\mathbf{q}$  можно обеспечить условия эксперимента, при которых это слагаемое оказывается основным и переходы связывают области импульсов  $p + q$  и  $p - q$  квазифотонов по разные стороны от интервала неустойчивости<sup>3)</sup> при выполнении соотношения

$$\omega_1(p + q) - \omega_1(p - q) = \delta. \quad (38)$$

Сигнал RIR (усиление или ослабление одной из электромагнитных волн) оказывается в данной ситуации обусловлен главным образом квазифотонами. Как известно, в обычной постановке сигнал RIR определяется, в частности, разностью чисел атомов в соответствующих импульсных состояниях. В нашем случае роль атомов играют квазифотоны. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} S_{RIR} \propto \mu_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^2 \left( \langle \hat{f}_1^\dagger(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \hat{f}_1(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \rangle^{(st)} - \right. \\ \left. - \langle \hat{f}_1^\dagger(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \hat{f}_1(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \rangle^{(st)} \right). \quad (39) \end{aligned}$$

Следовательно, варьируя  $\delta$  и  $\mathbf{q}$ , можно исследовать резкий характер импульсного распределения квазифотонов вблизи интервала неустойчивости.

Заметим, что с точки зрения брэгговской спектроскопии пара используемых для наблюдения RIR световых волн формирует бегущую со скоростью  $\delta/2q$  оптическую решетку, взаимодействующую с надконденсатными атомами. В такой постановке предлагаемый выше метод обнаружения квазифотонов оказывается близок к подходу работ [7], где исследуются обычные квазичастицы в системе надконденсатных атомов.

Автор признателен П. Л. Чаповскому и А. В. Тайченачеву за полезные обсуждения за-

тронутой темы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00801), Президиума СО РАН и программы Отделения физических наук РАН «Фундаментальная оптическая спектроскопия и ее приложения».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978).
2. R. Ozeri, N. Katz, J. Steinhauer, and N. Davidson, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 187 (2005).
3. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zverger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
4. D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 420 (1996).
5. M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten et al., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 988 (1996).
6. *Ultracold Matter*, ed. by K. Soutwel, *Nature* **416**, 205–246 (2002).
7. A. Brunello, F. Dalfovo, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4422 (2000); J. M. Vogel, K. Xu, C. Raman, J. R. Abo-Shaeer, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 060402 (2002).
8. M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 871 (1999); J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4569 (1999); J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Katz, and N. Davidson, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120407 (2002).
9. J. Steinhauer, N. Katz, R. Ozeri et al., *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060404 (2003).
10. Л. В. Ильичёв, П. Л. Чаповский, *ЖЭТФ* **137**, 842 (2010).
11. J. Guo, P. R. Berman, B. Dubetsky, and G. Grinberg, *Phys. Rev. A* **46**, 1426 (1992); J.-Y. Courtois, G. Grynberg, B. Louis, and P. Verkerk, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3017 (1994).

<sup>3)</sup> Здесь импульс  $\mathbf{p}$  коллинеарен  $\mathbf{q}$ .