ЖЭТФ, 2011, том 139, вып. 2, стр. 384–394

ВЫНУЖДЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПУЧКА БЕССПИНОВЫХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

М. В. Кузелев*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 апреля 2010 г.

Развита квантовая нелинейная теория самосогласованного взаимодействия двух электромагнитных волн с пучком или газом бесспиновых заряженных частиц. Исследованы эффекты вынужденного комптоновского рассеяния электромагнитных волн и вынужденного рождения пар (аннигиляции) частиц и античастиц при столкновении двух электромагнитных квантов. Рассмотрены и другие вынужденные процессы, возможные только при наличии среды, замедляющей электромагнитные волны. Показана связь исследованных вынужденных процессов с различными неустойчивостями, рассматриваемыми в классической электродинамике плазмы и плазмоподобных сред.

1. ВВЕДЕНИЕ

В основе релятивистской квантовой теории заряженных бесспиновых частиц лежит волновое уравнение Клейна–Гордона [1]. Если наличие спина не существенно, то это же уравнение можно использовать в релятивистской квантовой теории электрона. Так, в работах [2, 3] развита самосогласованная квантовая теория вынужденного черенковского излучения релятивистского пучка электронов в плазме (излучение продольных волн) и в изотропной диэлектрической среде (излучение поперечных волн), основанная именно на уравнении Клейна–Гордона. Использованный в указанных работах подход аналогичен принятому в классической электродинамике плазмы подходу, основанному на кинетическом уравнении Власова для функции распределения заряженных частиц в самосогласованном электромагнитном поле. Фактически в работах [2, 3] вместо уравнения Власова решалось квантовое кинетическое уравнение для матрицы плотности частиц [4, 5]. Обоснование метода работ [2, 3] и его использование для описания равновесной квантовой плазмы имеется в работе [6]. Этим же методом в работе [7] построена квантовая теория вынужденного комптоновского рассеяния электромагнитных волн на релятивистском пучке частиц с нулевым спином. Настоящая работа посвящена применению методов работы [6] к релятивистской квантовой неравновесной плазме без учета спина и обобщению работ [2, 3, 7] на вынужденные процессы второго порядка (т. е. квадратичные по полю) при взаимодействии пучков (или газа) релятивистских квантовых бесспиновых частиц с электромагнитными волнами.

Под вынужденными процессами мы здесь, как и в электродинамике плазмы, понимаем процессы, при которых эффект с участием одних частиц стимулирует такой же эффект с участием других частиц, и в результате возникает некоторая неустойчивость [8, 9]. Например, черенковское излучение одного электрона пучка вызывает черенковское излучение других электронов, что приводит к фазировке электронов полем излучения и экспоненциальному нарастанию энергии излучения, т. е. к неустойчивости, называемой одночастичным вынужденным эффектом Черенкова. Число соответствующих примеров можно значительно расширить [10, 11]. Квантовому описанию некоторых из них посвящена настоящая работа.

*E-mail: kuzelev@mail.ru

2. ОБЩИЕ КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА БЕССПИНОВЫХ ЧАСТИЦ И ПОПЕРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Рассмотрим взаимодействие пучка (или газа) моноэнергетических квантовых бесспиновых частиц с поперечным электромагнитным полем. Следуя указанным выше работам [2, 3, 7], исходим из следующих уравнений для векторного потенциала $\mathbf{A}(t,\mathbf{r})$ электромагнитного поля и волновой функции $\psi(r,\mathbf{t})$ частицы:

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\\ \mathbf{j}=-i\frac{e\hbar}{2m}\left[\psi^*\nabla\psi-(\nabla\psi^*)\psi\right]-\frac{e^2}{mc}\psi\psi^*\mathbf{A},\\ \hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\hbar^2c^2\Delta\psi+m^2c^4\psi=\\ =-2i\hbar ec(\mathbf{A}\nabla)\psi-e^2A^2\psi.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь e и m — заряд и масса частицы. Начальное (т. е. в отсутствие возмущений) состояние частиц пучка описывается следующей волновой функцией:

$$\begin{gathered}\psi(t,\mathbf{r})=N\exp(-i\omega_0t+i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}),\\ \mathbf{k}_0=\frac{m\mathbf{u}_0\gamma_0}{\hbar},\quad \omega_0=\sqrt{k_0^2c^2+\frac{m^2c^4}{\hbar^2}}=\frac{mc^2\gamma_0}{\hbar},\end{gathered}\tag{2}$$

где $\mathbf{u}_0$ — скорость пучка, $\gamma_0=1/\sqrt{1-u_0^2/c^2}$ — релятивистский фактор частицы пучка, нормировочный множитель у волновой функции (2) есть $N=\sqrt{n_0/\gamma_0}$, а n_0 — невозмущенная плотность частиц в пучке (в дальнейшем нормировка волновой функции будет уточнена). Волновая функция (2) является начальным условием для уравнения Клейна–Гордона системы (1). Если бы частицы пучка имели разброс по импульсам, то квантовое описание усложнилось бы: при решении уравнения Клейна–Гордона с начальным условием (2) импульс $m\mathbf{u}_0\gamma$ являлся бы свободным параметром, по которому, с учетом функции распределения частиц по импульсам, в выражении для плотности тока $\mathbf{j}$ проводилось бы интегрирование. В нерелятивистском случае такое описание было бы полностью эквивалентно описанию при помощи одночастичной матрицы плотности [6].

Заметим, что при написании системы (1) не учтен скалярный потенциал электромагнитного поля. Это оправдано при резонансном взаимодействии пучка малой плотности с электромагнитными волнами, когда поляризация электромагнитных волн мало возмущается продольными полями, возникающими при модуляции плотности пучка полем [3, 7]. Таким образом, в системе (1) не учтена продольная (потенциальная) часть самосогласованного электромагнитного поля.

Начнем с задачи рассеяния электромагнитной волны на пучке частиц. Поэтому представим векторный потенциал $\mathbf{A}(t,\mathbf{r})$ в виде суммы потенциалов падающей и рассеянной электромагнитных волн:

$$\begin{gathered}\mathbf{A}(t,\mathbf{r})=\mathbf{A}_1(t,\mathbf{r})+\mathbf{A}_2(t,\mathbf{r}),\\ \mathbf{A}_{1,2}(t,\mathbf{r})=\frac{1}{2}\Big(\tilde{\mathbf{A}}_{1,2}(t)\exp(i\mathbf{k}_{1,2}\cdot\mathbf{r})+\\ +\tilde{\mathbf{A}}^*_{1,2}(t)\exp(-i\mathbf{k}_{1,2}\cdot\mathbf{r})\Big),\end{gathered}\tag{3}$$

где $\mathbf{k}_{1,2}$ — некоторые волновые векторы, которые пока считаем заданными. В соответствии с начальным условием (2) и со структурой уравнения Клейна–Гордона, входящего в систему (1), волновую функцию частицы записываем в виде

$$\begin{gathered}\psi(t,\mathbf{r})=\exp(i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r})\left[H_0(t)+H_{-1}(t)\times\right.\\ \times\exp(-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r})+H_{+1}(t)\exp(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r})+\\ +H_{-2}(t)\exp(-i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r})+H_{+2}(t)\exp(i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r})+\\ +M_-(t)\exp[-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}]+M_+(t)\exp[i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}]+\\ +P_-(t)\exp[-i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}]+\\ \left.+P_+(t)\exp[i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}]\right].\end{gathered}\tag{4}$$

Волновая функция (4) содержит как члены, обусловленные взаимодействием с линейными волнами (3), — члены, пропорциональные $H_{\mp1}$ и $H_{\mp2}$, — так и члены, обусловленные взаимодействием с нелинейной волной биений $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2$, — члены, пропорциональные $M_\mp$ и $P_\mp$. К линейным по полю взаимодействиям относится вынужденный эффект Черенкова, квантовое рассмотрение которого дано в работах [2, 3]. Хотя в вакууме эффект Черенкова невозможен (уравнение для $\mathbf{A}(t,\mathbf{r})$ в системе (1) записано для вакуума), мы пока для общности не пренебрегли в (4) членами, пропорциональными $H_{\mp1}$ и $H_{\mp2}$. К нелинейным (квадратичным) по полю эффектам относятся вынужденный эффект Комптона [7], а также некоторые другие эффекты, рассматриваемые в настоящей работе. Первоочередной задачей является получение из общих уравнений (1) системы уравнений для амплитуд $M_\mp$ и $P_\mp$ волновой функции. Предварительно поясним смысл представления (4) и входящих в него амплитуд.

Первое слагаемое в (4) есть волновая функция (волна де Бройля) свободной частицы в невозмущенном состоянии. Слагаемые, пропорциональные $H_{\mp1}$

($H_{\mp 2}$), дают волновые функции частиц, испустивших и поглотивших квант света с импульсом $\hbar\mathbf{k}_1$ ($\hbar\mathbf{k}_2$). Слагаемые, пропорциональные $M_\mp$, определяют волновые функции частиц, испустивших и поглотивших электромагнитный квант $\hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)$. Наконец, слагаемые, пропорциональные $P_\mp$, являются волновыми функциями частиц, испустивших и поглотивших электромагнитный квант $\hbar(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)$. Числа частиц в соответствующих квантовых состояниях определяются величинами $|H_{\mp 1}|^2$, $|H_{\mp 2}|^2$, $|M_\mp|^2$ и $|P_\mp|^2$, т.е. указанные величины следует трактовать как числа заполнения. Заметим, что отдельные слагаемые в выражении (4), вообще говоря, не являются волнами де Бройля свободных частиц: чтобы быть волнами де Бройля, требуется соответствующая зависимость этих слагаемых от времени (аналогичная временной зависимости в (2)).

Подстановка функций (3) и (4) в первое уравнение системы (1) и в выражение для плотности тока $\mathbf{j}$ после весьма громоздких вычислений дает следующие уравнения для амплитуд электромагнитных волн:

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{A}}_{1,2}}{dt^2}+\omega_{1,2}^2\tilde{\mathbf{A}}_{1,2}=8\pi c\tilde{\mathbf{j}}_{1,2}, \tag{5}$$

где $\omega_{1,2}^2=k_{1,2}^2c^2$ — квадраты частот падающей и рассеянной волн. Здесь

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{j}}_1=\frac{e\hbar}{2m}\big[&H_0^*H_{+1}(2\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_1)+H_0H_{-1}^*(2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)+\\&+H_{-2}^*M_+(2\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_1-2\mathbf{k}_2)+H_{+2}M_-^*(2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1+2\mathbf{k}_2)+\\&+H_{+2}^*P_+(2\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_1+2\mathbf{k}_2)+H_{-2}P_-^*(2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1-2\mathbf{k}_2)\big]-\\&-\frac{e^2}{2mc}\Big[\tilde{\mathbf{A}}_1W_H+\tilde{\mathbf{A}}_1^*(H_{+1}H_{-1}^*+M_-^*P_++M_+P_-^*)+\\&+\tilde{\mathbf{A}}_2(H_{-2}H_{-1}^*+H_{+1}H_{+2}^*+H_0M_-^*+H_0^*M_+)+\\&+\tilde{\mathbf{A}}_2^*(H_{+2}H_{-1}^*+H_{+1}H_{-2}^*+H_0^*P_++H_0P_-^*)\Big],\end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{j}}_2=\frac{e\hbar}{2m}\big[&H_0^*H_{+2}(2\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_2)+H_0H_{-2}^*(2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_2)+\\&+H_{-1}^*M_-(2\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_1)+H_{+1}M_+^*(2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_2+2\mathbf{k}_1)+\\&+H_{+1}^*P_+(2\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_2+2\mathbf{k}_1)+H_{-1}P_-^*(2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_1)\big]-\\&-\frac{e^2}{2mc}\Big[\tilde{\mathbf{A}}_2W_H+\tilde{\mathbf{A}}_2^*(H_{+2}H_{-2}^*+M_+^*P_++M_-P_-^*)+\\&+\tilde{\mathbf{A}}_1(H_{-1}H_{-2}^*+H_{+2}H_{+1}^*+H_0^*M_-+H_0M_+^*)+\\&+\tilde{\mathbf{A}}_1^*(H_{+2}H_{-1}^*+H_{+1}H_{-2}^*+H_0^*P_++H_0P_-^*)\Big],\end{aligned} \tag{6b}$$

где

$$\begin{aligned}W_H=&H_0H_0^*+H_{-1}H_{-1}^*+H_{-2}H_{-2}^*+H_{+1}H_{+1}^*+\\&+H_{+2}H_{+2}^*+M_-M_-^*+M_+M_+^*+P_-P_-^*+P_+P_+^*.\end{aligned}$$

Далее, подстановка выражений (3) и (4) в уравнение Клейна – Гордона системы (1) дает следующие уравнения для амплитуд волновых функций:

$$\begin{aligned}\frac{d^2H_0}{dt^2}+\omega_0^2H_0=\frac{ec}{\hbar}\times&\\ \times\Big[\tilde{\mathbf{A}}_1\cdot(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)H_{-1}+\tilde{\mathbf{A}}_1^*\cdot(\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_1)H_{+1}&+\\+\tilde{\mathbf{A}}_2\cdot(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_2)H_{-2}+\tilde{\mathbf{A}}_2^*\cdot(\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_2)H_{+2}\Big]&-\\-\frac{e^2}{2\hbar^2}\Big[W_AH_0+\tilde{\mathbf{A}}_1\cdot\tilde{\mathbf{A}}_2^*M_-&+\\+\tilde{\mathbf{A}}_2\cdot\tilde{\mathbf{A}}_1^*M_++\tilde{\mathbf{A}}_1\cdot\tilde{\mathbf{A}}_2P_-+\tilde{\mathbf{A}}_1^*\cdot\tilde{\mathbf{A}}_2^*P_+\Big]&,\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2H_{-1}}{dt^2}+\omega_{-1}^2H_{-1}=\frac{ec}{\hbar}\times&\\ \times\Big[\tilde{\mathbf{A}}_1^*\cdot\mathbf{k}_0H_0+\tilde{\mathbf{A}}_2^*\cdot(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)M_-&+\\+\tilde{\mathbf{A}}_2\cdot(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)P_-\Big]&-\\-\frac{e^2}{2\hbar^2}\Big(W_AH_{-1}+\tilde{\mathbf{A}}_1^*\cdot\tilde{\mathbf{A}}_2H_{-2}&+\\+\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{A}}_1^*\cdot\tilde{\mathbf{A}}_1^*H_{+1}+\tilde{\mathbf{A}}_1^*\cdot\tilde{\mathbf{A}}_2^*H_{+2}\Big)&,\end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2H_{+1}}{dt^2}+\omega_{+1}^2H_{+1}=\frac{ec}{\hbar}\times&\\ \times\Big[\tilde{\mathbf{A}}_1\cdot\mathbf{k}_0H_0+\tilde{\mathbf{A}}_2\cdot(\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)M_+&+\\+\tilde{\mathbf{A}}_2^*\cdot(\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)P_+\Big]&-\\-\frac{e^2}{2\hbar^2}\Big(W_AH_{+1}+\tilde{\mathbf{A}}_1\cdot\tilde{\mathbf{A}}_2H_{-2}&+\\+\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{A}}_1\cdot\tilde{\mathbf{A}}_1H_{-1}+\tilde{\mathbf{A}}_1\cdot\tilde{\mathbf{A}}_2^*H_{+2}\Big)&,\end{aligned} \tag{8b}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2H_{-2}}{dt^2}+\omega_{-2}^2H_{-2}=\frac{ec}{\hbar}\times&\\ \times\Big[\tilde{\mathbf{A}}_2^*\cdot\mathbf{k}_0H_0+\tilde{\mathbf{A}}_1^*\cdot(\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)M_+&+\\+\tilde{\mathbf{A}}_1\cdot(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)P_-\Big]&-\\-\frac{e^2}{2\hbar^2}\Big(W_AH_{-2}+\tilde{\mathbf{A}}_2^*\cdot\tilde{\mathbf{A}}_1H_{-1}&+\\+\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{A}}_2^*\cdot\tilde{\mathbf{A}}_2^*H_{+2}+\tilde{\mathbf{A}}_2^*\cdot\tilde{\mathbf{A}}_1^*H_{+1}\Big)&,\end{aligned} \tag{8c}$$

$$\frac{d^2 H_{+2}}{dt^2} + \omega_{+2}^2 H_{+2} = \frac{ec}{\hbar} \times \\ \times \Big[\tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot \mathbf{k}_0 H_0 + \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) M_- + \\ + \tilde{\mathbf{A}}_1^* \cdot (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_+ \Big] - \\ - \frac{e^2}{2\hbar^2} \Big(W_A H_{+2} + \tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1 H_{-1} + \\ + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2 H_{-2} + \tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1^* H_{+1} \Big), \quad (8d)$$

$$\frac{d^2 M_-}{dt^2} + \omega_{-1+2}^2 M_- = \\ = \frac{ec}{\hbar} \Big[\tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1) H_{-1} + \tilde{\mathbf{A}}_1^* \cdot (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2) H_{+2} \Big] - \\ - \frac{e^2}{2\hbar^2} \Big(W_A M_- + \tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1^* H_0 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2 P_- + \\ + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1^* P_+ \Big), \quad (9a)$$

$$\frac{d^2 M_+}{dt^2} + \omega_{+1-2}^2 M_+ = \\ = \frac{ec}{\hbar} \Big[\tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2) H_{-2} + \tilde{\mathbf{A}}_2^* \cdot (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1) H_{+1} \Big] - \\ - \frac{e^2}{2\hbar^2} \Big(W_A M_+ + \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2^* H_0 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1 P_- + \\ + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_2^* \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2^* P_+ \Big), \quad (9b)$$

$$\frac{d^2 P_-}{dt^2} + \omega_{-1-2}^2 P_- = \\ = \frac{ec}{\hbar} \Big[\tilde{\mathbf{A}}_2^* \cdot (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1) H_{-1} + \tilde{\mathbf{A}}_1^* \cdot (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2) H_{-2} \Big] - \\ - \frac{e^2}{2\hbar^2} \Big(W_A P_- + \tilde{\mathbf{A}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2^* H_0 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_2^* \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2^* M_- + \\ + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1^* M_+ \Big), \quad (10a)$$

$$\frac{d^2 P_+}{dt^2} + \omega_{+1+2}^2 P_+ = \\ = \frac{ec}{\hbar} \Big[\tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1) H_{+1} + \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2) H_{+2} \Big] - \\ - \frac{e^2}{2\hbar^2} \Big(W_A P_+ + \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2 H_0 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1 M_- + \\ + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2 M_+ \Big). \quad (10b)$$

Здесь $W_A = \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1^* + \tilde{\mathbf{A}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2^*$ и введены следующие собственные частоты волн де Бройля свободных частиц с импульсами $\hbar(\mathbf{k}_0 \mp \mathbf{k}_1)$, $\hbar(\mathbf{k}_0 \mp \mathbf{k}_2)$, $\hbar[\mathbf{k}_0 \mp (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)]$, $\hbar[\mathbf{k}_0 \mp (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)]$:

$$\begin{gathered} \omega_{-1}^2 = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1)^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}, \\ \omega_{-1+2}^2 = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}, \\[2ex] \omega_{+1}^2 = (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1)^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}, \\ \omega_{+1-2}^2 = (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}, \\[2ex] \omega_{-2}^2 = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2)^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}, \\ \omega_{-1-2}^2 = (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}, \\[2ex] \omega_{+2}^2 = (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2)^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}, \\ \omega_{+1+2}^2 = (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}. \end{gathered} \quad (11)$$

Квантовые уравнения (5)—(10) описывают все возможные линейные и квадратичные по полю взаимодействия пучка частиц с поперечными электромагнитными волнами (2).

3. УРАВНЕНИЯ РЕЗОНАНСНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН ДЕ БРОЙЛЯ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Легко видеть, что уравнения (5), (7)–(10) являются уравнениями гармонических осцилляторов с частотами $\omega_{1,2}, \omega_0, \omega_{\pm 1}, \ldots$ (см. (11)). Если правая часть какого-либо из этих уравнений изменяется с одной из перечисленных частот, то происходит резонансное возбуждение соответствующего осциллятора. При этом в системе возбуждаются собственные волны. Например, если $\tilde{A}_1(t) \propto \exp(-i\omega_1 t)$, то собственной является одна из электромагнитных волн; если $M_-(t) \propto \exp(-i\omega_{-1+2} t)$, то собственной волной является волна де Бройля свободной частицы с импульсом $\hbar\mathbf{k}_0 - \hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ и с энергией $\hbar\omega_{-1+2}$ и т. д. Поскольку одновременное выполнение условий резонансного возбуждения всех осцилляторов невозможно, некоторыми из амплитуд в разложении (4) и уравнениях (5)–(10) можно пренебречь, т. е. можно просто отбросить некоторые уравнения. Во-первых, исключая из рассмотрения черенковское излучение и поглощение, положим $H_{\pm 1} = 0$ и $H_{\pm 2} = 0$ (квантовый вынужденный эффект Черенкова подробно рассмотрен в работах [2, 3], а кроме того, в вакууме он вообще невозможен). Во-вторых, будем рассматривать резонансное взаимодействие частиц с электромагнитной волной биений, имеющей волновой вектор $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, а потому полагаем $P_\pm = 0$. Заметим, что можно было бы рассмотреть волну биений с волновым вектором $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, результат в итоге получился бы тот же. Важно, что одновременно обе волны биений учитывать не нужно, поскольку условия резонанса для них одновременно выполнены быть не могут.

Учитывая сказанное, упростим записанные выше уравнения (5)–(10). Для удобства введем обозначения

$$\mathbf{k}_- = \mathbf{k}_0 - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_+ = \mathbf{k}_0 + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tag{12}$$

и перепишем общее выражение для волновой функции (4) в упрощенном виде:

$$\psi(t,\mathbf{r}) = H_0(t)\exp(i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}) + M_-(t)\exp(i\mathbf{k}_-\cdot\mathbf{r}) + \\ + M_+(t)\exp(i\mathbf{k}_+\cdot\mathbf{r}). \tag{13}$$

В соответствии с (13) общие квантовые уравнения (5)–(10) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2A_1}{dt^2} + \omega_1^2 A_1 = \\
&= -4\pi\frac{e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)A_2(H_0M_-^* + H_0^*M_+),\\
&\frac{d^2A_2}{dt^2} + \omega_2^2 A_2 = \\
&= -4\pi\frac{e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)A_1(H_0^*M_- + H_0M_+^*),\\
&\frac{d^2H_0}{dt^2} + \omega_0^2 H_0 = \\
&= -\frac{e^2}{2\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)(A_1A_2^*M_- + A_2A_1^*M_+),\\
&\frac{d^2M_-}{dt^2} + \omega_-^2 M_- = -\frac{e^2}{2\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)A_2A_1^*H_0,\\
&\frac{d^2M_+}{dt^2} + \omega_+^2 M_+ = -\frac{e^2}{2\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)A_1A_2^*H_0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь вместо (11) введены более компактные обозначения для частот волн де Бройля:

$$\omega_0^2 = k_0^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}, \quad \omega_-^2 = k_-^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}, \\ \omega_+^2 = k_+^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}. \tag{15}$$

При получении уравнений (14) были введены постоянные единичные векторы поляризации $\mathbf{e}_{1,2}$ поперечных электромагнитных волн (3): $\tilde{\mathbf{A}}_{1,2} = \mathbf{e}_{1,2}\tilde{A}_{1,2}$, $\mathbf{e}_{1,2}\cdot\mathbf{k}_{1,2} = 0$.

Волновая функция (13) является суммой трех волновых функций, определяющих состояние частицы с тремя возможными значениями импульса, $\hbar\mathbf{k}_0$, $\hbar\mathbf{k}_-$ и $\hbar\mathbf{k}_+$. Рассматриваемый пучок (или газ) состоит только из таких частиц. Если способ нормировки волновой функции (2) распространить на каждую из составляющих функции (13), то можно записать следующие соотношения:

$$|H_0(t)|^2 = n_0(t)\gamma_0^{-1}, \quad |M_\mp(t)|^2 = n_\mp(t)\gamma_\mp^{-1}, \tag{16}$$

где $n_\sigma(t)$ — концентрация частиц с энергией $mc^2\gamma_\sigma = \hbar\omega_\sigma$, а $\sigma = 0, -, +$. Следует, однако, иметь в виду, что трактовка величины $n_\sigma(t)$ как концентрации частиц в определенном состоянии имеет смысл только тогда, когда соответствующая волновая функция есть волна де Бройля свободной частицы, т. е. $M_\sigma(t) \propto \exp(-i\omega_\sigma t)$.

Осуществляя в уравнениях (14) замены

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_1(t)\exp(-i\omega_1 t),\\
A_2 &= a_2(t)\exp(-is\omega_2 t),\\
H_0 &= a_0(t)\exp(-i\omega_0 t), \quad s = \pm 1
\end{aligned} \tag{17}$$

и считая функции $a_{1,2,0}(t)$ изменяющимися медленно по сравнению с соответствующими экспоненциальными множителями, получим из (14) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\omega_0\frac{da_0}{dt} = -i\frac{e^2}{4\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\times\\
&\qquad\times\left[a_1a_2^*M_-\exp(i\Delta_{(-)}t) + \right.\\
&\qquad\left. + a_1^*a_2M_+\exp(i\Delta_{(+)}t)\right],\\
&\frac{d^2M_-}{dt^2} + \omega_-^2M_- = -\frac{e^2}{2\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)a_0a_1^*a_2\times\\
&\qquad\times\exp(-i\Delta_{(-)}t),\\
&\frac{d^2M_+}{dt^2} + \omega_+^2M_+ = -\frac{e^2}{2\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)a_0a_1a_2^*\times\\
&\qquad\times\exp(-i\Delta_{(+)}t),\\
&\omega_1\frac{da_1}{dt} = -i\frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\times\\
&\qquad\times\left[a_0^*a_2M_+\exp(i\Delta_{(+)}t) + \right.\\
&\qquad\left. + a_0a_2M_-^*\exp(-i\Delta_{(-)}t)\right],\\
&s\omega_2\frac{da_2}{dt} = -i\frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\times\\
&\qquad\times\left[a_0^*a_1M_-\exp(i\Delta_{(-)}t) + \right.\\
&\qquad\left. + a_0a_1M_+^*\exp(-i\Delta_{(+)}t)\right],
\end{aligned} \tag{18}$$

где $\Delta_{(+)} = \omega_0 + \omega_1 - s\omega_2$, $\Delta_{(-)} = \omega_0 - \omega_1 + s\omega_2$. Проводя замену (17), мы ввели собственные волны и их медленные амплитуды. Две из этих волн — электромагнитные, причем знаковый параметр s задает направление распространения одной из волн — по вектору $\mathbf{k}_2$ или против него. Третья волна в (17) есть волна де Бройля частицы в состоянии с энергией $\hbar\omega_0$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}_0$. Это состояние мы пока считаем исходным (невозмущенным), но в дальнейшем такая трактовка будет существенно изменена.

Пусть выполнено условие резонанса

$$\Delta_{(-)} = q\omega_-, \quad q = \pm 1. \tag{19}$$

Тогда, учитывая структуру уравнений (18), можно положить

$$M_+ = 0, \quad M_- = a_-(t)\exp(-iq\omega_- t), \tag{20}$$

где $a_-(t)$ — медленная амплитуда. Поскольку функция $M_-(t)$ задает волну де Бройля свободной частицы с энергией $\hbar\omega_- > 0$, знаковый параметр q определяет тип частицы, а именно: при $q = 1$ амплитуда a_- определяет волновую функцию частиц, а при $q = -1$ — античастиц. Подставляя (20) в уравнения (18), получаем следующую систему уравнений для медленных амплитуд волн де Бройля и электромагнитных волн:

$$\begin{aligned}
\omega_0\frac{da_0}{dt} &= -i\frac{e^2}{4\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)a_1a_2^*a_-,\\
q\omega_-\frac{da_-}{dt} &= -i\frac{e^2}{2\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)a_0a_1^*a_2,\\
\omega_1\frac{da_1}{dt} &= -i\frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)a_0a_2a_-^*,\\
s\omega_2\frac{da_2}{dt} &= -i\frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)a_0^*a_1a_-.
\end{aligned} \tag{21}$$

Вместо (19) может быть использовано и такое условие резонанса:

$$\Delta_{(+)} = p\omega_+, \quad p = \pm 1. \tag{22}$$

Тогда, полагая

$$M_- = 0, \quad M_+ = a_+(t)\exp(-ip\omega_+ t), \tag{23}$$

получим из (18) следующую систему:

$$\begin{aligned}
\omega_0\frac{da_0}{dt} &= -i\frac{e^2}{4\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)a_1^*a_2a_+,\\
p\omega_+\frac{da_+}{dt} &= -i\frac{e^2}{4\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)a_0a_1a_2^*,\\
\omega_1\frac{da_1}{dt} &= -i\frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)a_0^*a_2a_+,\\
s\omega_2\frac{da_2}{dt} &= -i\frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)a_0a_1a_+^*.
\end{aligned} \tag{24}$$

Если в уравнениях (24) заменить

$$a_1 \to a_1^*, \quad a_2 \to a_2^*, \quad \omega_1 \to -\omega_1, \quad \omega_2 \to -\omega_2,$$

то система (14) перейдет в (21). Поэтому ограничимся рассмотрением только системы (21) и резонансного условия (19).

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД ВОЛН. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ, ИМПУЛЬСА И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Вводя по формулам

$$\begin{aligned}
&a_0 = \alpha_0\exp(i\varphi_0), \quad a_- = \alpha_-\exp(i\varphi_-),\\
&a_1 = \alpha_1\exp(i\varphi_1), \quad a_2 = \alpha_2\exp(i\varphi_2),\\
&\Phi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_- - \varphi_0
\end{aligned} \tag{25}$$

действительные амплитуды и фазы волн, преобразуем систему комплексных уравнений (21) к виду

$$\begin{aligned}
\omega_0\frac{d\alpha_0}{dt} &= \frac{e^2}{4\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_1\alpha_2\alpha_-\sin\Phi,\\
q\omega_-\frac{d\alpha_-}{dt} &= -\frac{e^2}{2\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_1\alpha_2\alpha_0\sin\Phi,\\
\omega_1\frac{d\alpha_1}{dt} &= -\frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_2\alpha_-\alpha_0\sin\Phi,\\
s\omega_2\frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_1\alpha_-\alpha_0\sin\Phi,\\
\frac{d\Phi}{dt} &= -\left\{\frac{2\pi e^2}{m}\left(\frac{\alpha_2\alpha_-\alpha_0}{\omega_1\alpha_1} - s\frac{\alpha_1\alpha_-\alpha_0}{\omega_2\alpha_2}\right) - \right.\\
&\left. - \frac{e^2}{2\hbar^2}\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_-}{\omega_0\alpha_0} - q\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_0}{\omega_-\alpha_-}\right)\right\}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\cos\Phi.
\end{aligned} \tag{26}$$

Из уравнений (26) следует, что имеется класс решений, для которых $\cos\Phi = 0$ и $\sin\Phi = \pm 1 \equiv g$. Ограничиваясь рассмотрением только этих решений, получаем из (26) следующие действительные уравнения для амплитуд:

$$\begin{aligned}
\omega_0\frac{d\alpha_0}{dt} &= \frac{e^2}{4\hbar^2}g(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_1\alpha_2\alpha_-,\\
q\omega_-\frac{d\alpha_-}{dt} &= -\frac{e^2}{4\hbar^2}g(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_1\alpha_2\alpha_0,\\
\omega_1\frac{d\alpha_1}{dt} &= -\frac{2\pi e^2}{m}g(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_2\alpha_-\alpha_0,\\
s\omega_2\frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{2\pi e^2}{m}g(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_1\alpha_-\alpha_0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Система (27) имеет первые интегралы

$$\begin{aligned}
&\omega_0\alpha_0^2 + q\omega_- a_-^2 = \mathrm{const},\\
&\frac{m}{8\pi}\omega_1\alpha_1^2 + \hbar^2\omega_0\alpha_0^2 = \mathrm{const},\\
&\frac{m}{8\pi}s\omega_2\alpha_2^2 - \hbar^2\omega_0\alpha_0^2 = \mathrm{const},\\
&\omega_1\alpha_1^2 + s\omega_2\alpha_2^2 = \mathrm{const},
\end{aligned} \tag{28}$$

из которых независимы только три. Из (28) и первого выражения (12) несложно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&W_1 + W_2 + \frac{\hbar^2\omega_0^2}{mc^2}\alpha_0^2 + \frac{\hbar^2\omega_-^2}{mc^2}\alpha_-^2 = \mathrm{const},\\
&\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\frac{\hbar^2\omega_0^2}{mc^2}\frac{\mathbf{k}_0}{\omega_0}\alpha_0^2+\frac{\hbar^2\omega_-^2}{mc^2}q\frac{\mathbf{k}_-}{\omega_-}\alpha_-^2 = \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь

$$W_{1,2} = \frac{1}{8\pi}\frac{\omega_{1,2}^2}{c^2}\alpha_{1,2}^2, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{1}{8\pi}\frac{\omega_1^2}{c^2}\frac{\mathbf{k}_1}{\omega_1}\alpha_1^2, \quad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{8\pi}\frac{\omega_2^2}{c^2}\frac{s\mathbf{k}_2}{\omega_2}\alpha_2^2 \tag{30}$$

— соответственно энергии и импульсы электромагнитных волн. С учетом формул (16) и (20) соотношения (29) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
&W_1 + W_2 + n_0mc^2\gamma_0 + n_-mc^2\gamma_- = \mathrm{const},\\
&\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + n_0\hbar\mathbf{k}_0 + n_-q\hbar\mathbf{k}_- = \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Соотношения (31) соответствуют законам сохранения энергии и импульса.

Заметим, что первый интеграл в (28) отражает закон сохранения электрического заряда. Действительно, из известной в теории уравнения Клейна–Гордона формулы для плотности заряда частиц [12] (при нулевом скалярном потенциале электромагнитного поля),

$$\rho = i\frac{e\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right), \tag{32}$$

с учетом (13), (17) и (20) имеем

$$\langle\rho(t,\mathbf{r})\rangle = \frac{e\hbar}{mc^2}(\omega_0\alpha_0^2 + q\omega_-\alpha_-^2) = en_0 + qen_-, \tag{33}$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по пространственному периоду системы частицы–поле. Также из второй формулы системы (1) следует выражение для постоянной составляющей плотности тока

$$\langle\mathbf{j}(t,\mathbf{r})\rangle = \frac{e\hbar}{m}(\mathbf{k}_0\alpha_0^2+\mathbf{k}_-\alpha_-^2) = en_0\mathbf{u}_0+qen_-\mathbf{u}_-. \tag{34}$$

В формуле (34), по определению, введены скорости частиц и античастиц (для $q=-1$):

$$\mathbf{u}_0 = \frac{\hbar\mathbf{k}_0}{m\gamma_0}, \quad \mathbf{u}_- = q\frac{\hbar\mathbf{k}_-}{m\gamma_-}. \tag{35}$$

Определения (35) согласуются со вторым выражением (31) и с формулами (2).

5. ВЫНУЖДЕННОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПУЧКЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим теперь возможные взаимодействия пучка квантовых частиц и электромагнитного поля, описываемые в рамках уравнений (27). Начнем со случая $s=1$, $q=1$. При этом первое слагаемое в (13) есть волновая функция частицы пучка в исходном состоянии, а второе слагаемое есть волновая функция такой же частицы в состоянии после взаимодействия с полем (3). Амплитуды волновых функций определяют плотность частиц в соответствующих состояниях. Из (28) следует возможный сценарий процесса $\alpha_0\downarrow$, $\alpha_-\uparrow$, $\alpha_1\uparrow$, $\alpha_2\downarrow$, где символ «$\uparrow$» означает рост амплитуды, а символ «$\downarrow$» — ее уменьшение. Поэтому выберем следующие начальные условия для уравнений (27):

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = \sqrt{n_{00}/\gamma_0}, \quad \alpha_- = 0,\\
&\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = A_{20}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Здесь n_{00} — невозмущенная (исходная) плотность частиц в пучке, а A_{20} — начальная амплитуда электромагнитной волны с частотой ω_2, являющейся волной накачки. Условия (36), а также и все последующие начальные условия ставятся при $t\to-\infty$, что соответствует адиабатическому включению возмущений в бесконечном прошлом. С учетом (36) интегралы (28) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&\omega_0\alpha_0^2 + \omega_-\alpha_-^2 = \omega_0n_{00}\gamma_0^{-1},\\
&\frac{m}{8\pi}\omega_1\alpha_1^2 + \hbar^2\omega_0\alpha_0^2 = \hbar^2\omega_0n_{00}\gamma_0^{-1},\\
&\frac{m}{8\pi}\omega_2\alpha_2^2 - \hbar^2\omega_0\alpha_0^2 = \frac{m}{8\pi}\omega_2A_{20}^2 - \hbar^2\omega_0n_{00}\gamma_0^{-1},\\
&\omega_1\alpha_1^2 + \omega_2\alpha_2^2 = \omega_2A_{20}^2.
\end{aligned} \tag{37}$$

Используя (37), преобразуем первое уравнение системы (27) к виду ($g=-1$)

$$\frac{dx}{dt} = -\delta\omega(1-x^2)\sqrt{1-\frac{n_{00}\hbar\omega_2}{W_{20}}(1-x^2)}. \tag{38}$$

Здесь $x(t) = \alpha_0(t)\sqrt{\gamma_0/n_{00}}$,

$$\delta\omega = \frac{e^2 A_{20}}{4\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\sqrt{\frac{8\pi\hbar^2 n_{00}/\gamma_0}{m\omega_1\omega_-}} = \\ = (\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\sqrt{\frac{1}{8}\,\frac{V_{20}^2}{c^2}\,\omega_b^2\gamma_0^{-1}\,\frac{m^2c^4\gamma_0^2}{\hbar^2\omega_1\omega_-}}, \qquad (39) \\ W_{20} = \frac{1}{8\pi}\,\frac{\omega_2^2}{c^2}\,A_{20}^2,$$

где $V_{20} = eA_{20}/mc\gamma_0$ — амплитуда осцилляций скорости частицы в поле волны накачки A_{20}, а $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_{00}/m$ — квадрат ленгмюровской частоты частиц невозмущенного пучка.

Уравнение (38) решаем в двух случаях. При $W_{20} \gg n_{00}\hbar\omega_2$ имеем

$$\begin{aligned} n_0(t) &= \gamma_0\alpha_0^2 = n_{00}\frac{\exp(\delta\omega|t|)-1}{\exp(\delta\omega|t|)+1}, \\ n_-(t) &= \gamma_-\alpha_-^2 = n_{00}\frac{2}{\exp(\delta\omega|t|)+1}, \\ W_1(t) &= n_{00}\hbar\omega_1\frac{2}{\exp(\delta\omega|t|)+1}, \\ W_2(t) &= W_{20} - n_{00}\hbar\omega_2\frac{2}{\exp(\delta\omega|t|)+1} \approx W_{20}, \\ & -\infty < t < \infty. \end{aligned} \qquad (40)$$

Механизм нелинейного насыщения процесса рассеяния, описываемый формулами (40), чисто квантовый — каждая частица пучка рассеивает по одному кванту волны накачки и выходит из резонанса с волной биений. Если $W_{20} \ll n_{00}\hbar\omega_2$, то решение уравнения (38) оказывается следующим:

$$\begin{aligned} n_0(t) &= n_{00}\left(1 - \frac{W_{20}}{n_{00}\hbar\omega_2}\,\mathrm{ch}^{-2}(\delta\omega|t|)\right), \\ n_-(t) &= \frac{W_{20}}{\hbar\omega_2}\,\mathrm{ch}^{-2}(\delta\omega|t|), \\ W_1 &= \frac{\omega_1}{\omega_2}\,W_{20}\,\mathrm{ch}^{-2}(\delta\omega|t|), \\ W_2 &= W_{20}\left[1 - \mathrm{ch}^{-2}(\delta\omega|t|)\right]. \end{aligned} \qquad (41)$$

Здесь механизм насыщения такой же, как и при классическом томсоновском рассеянии света — обеднение волны накачки.

Переписывая при $s = 1$, $q = 1$ условие (19) и учитывая первое соотношение (12), имеем

$$\omega_0 + \omega_2 = \omega_- + \omega_1, \quad \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_- + \mathbf{k}_1. \qquad (42)$$

Соотношения (42) являются условиями рассеяния волны ω_2 на пучке. С учетом (15) из (42) следует известное условие комптоновского рассеяния:

$$(\omega_1 - \omega_2) - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{u}_0 = -\frac{\hbar\omega_1\omega_2}{mc^2\gamma}(1-\cos\theta), \qquad (43)$$

которое при $u_0 = 0$ имеет вид

$$\omega_1 = \omega_2 - \frac{\hbar\omega_1\omega_2}{mc^2}(1-\cos\theta),$$

где θ — угол рассеяния.

6. ВЫНУЖДЕННОЕ РОЖДЕНИЕ ПАР В ПОЛЕ ДВУХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Рассмотрим теперь случай $s = -1$, $q = -1$. При этом первое слагаемое в (13) есть волновая функция частицы, а второе слагаемое — волновая функция античастицы. Из соотношений (28) следует возможный сценарий процесса $\alpha_0\uparrow$, $\alpha_-\uparrow$, $\alpha_1\downarrow$, $\alpha_2\downarrow$. Поэтому выберем следующие начальные условия для уравнений (27):

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_- = 0, \quad \alpha_1 = A_{10}, \quad \alpha_2 = A_{20}. \qquad (44)$$

Согласно (44), в исходном состоянии каких-либо частиц вообще нет. Таким образом, рассматривается процесс вынужденного рождения пар при столкновении двух потоков квантов света. С учетом (44) интегралы (28) записываются в виде

$$\begin{aligned} &\omega_0\alpha_0^2 - \omega_-\alpha_-^2 = 0, \\ &\frac{m}{8\pi}\,\omega_1\alpha_1^2 + \hbar^2\omega_0\alpha_0^2 = \frac{m}{8\pi}\,\omega_1 A_{10}^2, \\ &\frac{m}{8\pi}\,\omega_2\alpha_2^2 + \hbar^2\omega_0\alpha_0^2 = \frac{m}{8\pi}\,\omega_2 A_{20}^2, \\ &\omega_1\alpha_1^2 - \omega_2\alpha_2^2 = \omega_1 A_{10}^2 - \omega_2 A_{20}^2. \end{aligned} \qquad (45)$$

Для простоты положим $A_{20} = A_{10}\sqrt{\omega_1/\omega_2}$, тогда $\omega_1\alpha_1^2 = \omega_2\alpha_2^2$ и первое уравнение системы (27) преобразуется к особо простому виду ($g = 1$)

$$\frac{dx}{dt} = \delta\omega x(1-x). \qquad (46)$$

Здесь

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\alpha_0^2(t)}{n_{max}/\gamma_0}, \\ \delta\omega &= \frac{1}{4}\,\frac{V_{10}^2}{c^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\sqrt{\frac{\omega_1\omega_0}{\omega_2\omega_-}}\,\omega_0, \\ \frac{n_{max}}{\gamma_0} &= \frac{mc^2 W_{10}}{\hbar^2\omega_0\omega_1} = \frac{W_{10}}{\hbar\omega_1\gamma_0}, \end{aligned} \qquad (47)$$

где $V_{10} = eA_{10}/mc\gamma_0$.

Решая уравнение (46), получаем

$$\begin{aligned} n_0(t) &= n_-(t) = \frac{n_{max}}{1+\exp(-\delta\omega t)}, \\ W_1 &= W_{10}\frac{\exp(-\delta\omega t)}{1+\exp(-\delta\omega t)}, \\ W_2 &= W_{20}\frac{\exp(-\delta\omega t)}{1+\exp(-\delta\omega t)}, \quad -\infty < t < \infty. \end{aligned} \qquad (48)$$

Таким образом, величина n_{max} есть максимальное число образовавшихся пар.

Переписывая при $s=-1$, $q=-1$ условие (19) и используя первое соотношение (12), имеем

$$\omega_1+\omega_2=\omega_0+\omega_-, \quad \mathbf{k}_1+s\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_0+q\mathbf{k}_-. \tag{49}$$

Сопоставляя с соотношениями (30) и (31), видим, что выражения (49) отражают законы сохранения энергии и импульса при образовании пар в поле двух электромагнитных волн.

Формально введенные в (47) параметры образующихся пучков частиц определяются из соотношений (49), подставляя в которые энергии частиц и выражения (35), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\hbar(\omega_1+\omega_2)=mc^2(\gamma_0+\gamma_-),\\ \hbar(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)=m(\mathbf{u}_0\gamma_0+\mathbf{u}_-\gamma_-).\end{gathered} \tag{50}$$

Из (50) можно определить энергии частиц (γ_0 и γ_-) и направления их вылета ($\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_-$). Пусть, например, $\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2=0$ (столкновение антипараллельных пучков одинаковых фотонов $\omega_1=\omega_2=\omega$). Тогда будет $\mathbf{u}_0\gamma_0+\mathbf{u}_-\gamma_-=0$. Полагая $\gamma_0=\gamma_-\equiv\gamma$, находим

$$\begin{gathered}\gamma=\frac{\hbar\omega}{mc^2}, \quad \mathbf{u}_0=-\mathbf{u}_-\equiv\mathbf{u},\\ u=c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^2}.\end{gathered} \tag{51}$$

7. ВЫНУЖДЕННЫЙ РАСПАД ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ И РОЖДЕНИЕ ПАР В СРЕДЕ

Пусть теперь $s=1$, $q=-1$. В этом случае также возможно образование пар. Из (28) следует возможный сценарий процесса $\alpha_0\uparrow$, $\alpha_-\uparrow$, $\alpha_1\downarrow$, $\alpha_2\uparrow$. Поэтому выберем следующие начальные условия для уравнений (27):

$$\alpha_0=0, \quad \alpha_-=0, \quad \alpha_1=A_{10}, \quad \alpha_2=0. \tag{52}$$

Тогда интегралы (28) записываются в виде

$$\begin{aligned}&\omega_0\alpha_0^2-\omega_-\alpha_-^2=0,\\ &\frac{m}{8\pi}\,\omega_1\alpha_1^2+\hbar^2\omega_0\alpha_0^2=\frac{m}{8\pi}\,\omega_1A_{10}^2,\\ &\frac{m}{8\pi}\,\omega_2\alpha_2^2-\hbar^2\omega_0\alpha_0^2=0,\\ &\omega_1\alpha_1^2+\omega_2\alpha_2^2=\omega_1A_{10}^2,\end{aligned} \tag{53}$$

а первое уравнение системы (27) оказывается следующим ($g=1$):

$$\frac{dx}{dt}=\delta\omega x^2\sqrt{1-x^2}\,. \tag{54}$$

Здесь

$$\begin{gathered}x^2(t)=\frac{\alpha_0^2(t)}{n_{max}/\gamma_0}\,,\\ \delta\omega=(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\sqrt{\frac{1}{8}\,\frac{V_{10}^2}{c^2}\,\omega_{L0}^2\,\frac{m^2c^4\gamma^2}{\hbar^2\omega_2\omega_-}}\,,\\ \omega_{L0}^2=\frac{4\pi e^2n_{max}}{m},\end{gathered} \tag{55}$$

а n_{max} — величина, определенная в (47). Решение уравнения (54) имеет вид

$$\begin{aligned}&n_0(t)=n_-(t)=\frac{n_{max}}{1+\exp(-2\delta\omega t)},\\ &W_1=W_{10}\frac{\exp(-2\delta\omega\, t)}{1+\exp(-2\delta\omega\, t)},\\ &W_2=\frac{\omega_2}{\omega_1}\,W_{10}\frac{1}{1+\exp(-2\delta\omega\, t)}, \quad -\infty<t<\infty.\end{aligned} \tag{56}$$

Переписывая при $s=1$, $q=-1$ условие (19) и учитывая первое соотношение (12), находим следующие условия резонанса

$$\omega_1=\omega_0+\omega_-+\omega_2, \quad \mathbf{k}_1=\mathbf{k}_0+q\mathbf{k}_-+\mathbf{k}_2. \tag{57}$$

Легко видеть, что условия (57) выполнены быть не могут. Действительно, перейдем в систему координат (штрихованную), где суммарный импульс частицы и античастицы равен нулю, $\mathbf{k}'_0+q\mathbf{k}'_-=0$. В этой системе $\omega'_1=\omega'_2+\omega'_0+\omega'_-$ и $\mathbf{k}'_1=\mathbf{k}'_2$, что противоречит инвариантным соотношениям $\omega'^2_{1,2}=k'^2_{1,2}c^2$. Однако при наличии среды, когда $\omega_{1,2}^2\neq k_{1,2}^2c^2$, соотношения (57) могут быть выполнены. Тогда они выражают законы сохранения энергии и импульса и являются условиями вынужденного распада фотона на пару частица–античастица и фотон.

8. ВЫНУЖДЕННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЕЙ ДВУХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ

И наконец, последний возможный случай $s=-1$, $q=1$. В этом случае рождение пар не происходит. Из (28) следует возможный сценарий процесса $\alpha_0\downarrow$, $\alpha_-\uparrow$, $\alpha_1\uparrow$, $\alpha_2\uparrow$. Поэтому зададим следующие начальные условия для уравнений (27):

$$\alpha_0=\sqrt{n_{00}/\gamma_0}, \quad \alpha_-=0, \quad \alpha_1=0, \quad \alpha_1=2, \tag{58}$$

где n_{00} — невозмущенная плотность частиц в пучке. С учетом (58) интегралы (28) записываются в виде

$$
\begin{aligned}
&\omega_0\alpha_0^2 + \omega_-\alpha_-^2 = \omega_0 n_{00}/\gamma_0,\\
&\frac{m}{8\pi}\,\omega_1\alpha_1^2 + \hbar^2\omega_0\alpha_0^2 = \hbar^2\omega_0 n_{00}/\gamma_0,\\
&\frac{m}{8\pi}\,\omega_2\alpha_2^2 + \hbar^2\omega_0\alpha_0^2 = \hbar^2\omega_0 n_{00}/\gamma_0,\\
&\omega_1\alpha_1^2 - \omega_2\alpha_2^2 = 0,
\end{aligned} \tag{59}
$$

а первое уравнение системы (27) сводится к следующему ($g=-1$):

$$
\frac{dx}{dt} = -\delta\omega(1-x^2)^{3/2}, \tag{60}
$$

где $x(t)=\alpha_0(t)\sqrt{\gamma_0/n_{00}}$,

$$
\delta\omega = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\sqrt{\frac{\omega_1\omega_0}{\omega_2\omega_-}}\,\frac{\omega_b^2}{\omega_1\gamma_0}. \tag{61}
$$

Решение уравнения (60) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&n_0(t) = n_{00}\frac{(\delta\omega\, t)^2}{1+(\delta\omega\, t)^2},\\
&n_-(t) = n_{00}\frac{1}{1+(\delta\omega\, t)^2},\\
&W_1 = n_{00}\hbar\omega_1\frac{1}{1+(\delta\omega\, t)^2},\\
&W_2 = n_{00}\hbar\omega_2\frac{1}{1+(\delta\omega\, t)^2}, \quad -\infty<t<\infty.
\end{aligned} \tag{62}
$$

Переписывая при $s=-1$, $q=1$ условие (19) и учитывая первое соотношение (12), находим

$$
\omega_0 = \omega_- + \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_- + \mathbf{k}_1 + s\mathbf{k}_2. \tag{63}
$$

Соотношения (63) являются условиями вынужденного излучения частицей двух фотонов. Так же, как и (57), соотношения (63) могут быть выполнены только при наличии среды.

9. АНАЛОГИЯ С ПУЧКОВЫМИ НЕУСТОЙЧИВОСТЯМИ В ПЛАЗМЕ. ИНКРЕМЕНТЫ ВЫНУЖДЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотренные вынужденные процессы можно трактовать как резонансные неустойчивости типа параметрических пучковых неустойчивостей в плазме [10] или черенковской пучково-плазменной неустойчивости [8–11]. При $s=1$, $q=1$, основываясь на начальных условиях (36), в уравнениях (27) можно зафиксировать амплитуды α_0 и α_2, а оставшиеся амплитуды представить в виде $\sim\exp(-i\Omega t)$. В результате для комплексной частоты Ω получается дисперсионное уравнение $\Omega^2=-(\delta\omega)^2$, где $\delta\omega$ — величина, определенная в (39). Мнимая частота $\Omega=i\delta\omega$ есть инкремент неустойчивости, обусловленной вынужденным комптоновским рассеянием электромагнитной волны на пучке частиц с нулевым спином.

При $s=-1$, $q=-1$, как видно из начальных условий (44), можно зафиксировать амплитуды α_1 и α_2. Тогда из оставшихся уравнений (27) получается дисперсионное уравнение

$$
\begin{aligned}
&\Omega^2 = -(\delta\omega)^2,\\
&\delta\omega = \frac{1}{4}\,\frac{V_{10}}{c}\,\frac{V_{20}}{c}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_-}}\,\omega_0.
\end{aligned} \tag{64}
$$

В частном случае $A_{20}=A_{10}\sqrt{\omega_1/\omega_2}$ величина $\delta\omega$ из (64) совпадает с величиной $\delta\omega$, приведенной в (47). Уравнение (64) определяет инкремент $\Omega=i\delta\omega$ неустойчивости, обусловленной вынужденным образованием пар в поле двух электромагнитных волн.

Если $s=1$, $q=-1$, то в соответствии с начальными условиями (52) можно зафиксировать только одну амплитуду $\alpha_1=A_{10}$. Тогда из уравнений (27) имеем следующую систему ($g=1$):

$$
\begin{aligned}
&\omega_0\frac{d\alpha_0}{dt} = \frac{e^2}{4\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)A_{10}\alpha_2\alpha_-,\\
&\omega_-\frac{d\alpha_-}{dt} = \frac{e^2}{4\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)A_{10}\alpha_2\alpha_0,\\
&\omega_2\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)A_{10}\alpha_-\alpha_0.
\end{aligned} \tag{65}
$$

Известно, что решения систем уравнений типа (65) имеют взрывной характер. Действительно, систему (65) можно свести к одному уравнению

$$
\frac{dx}{dt} = \delta\omega\, x^2, \tag{66}
$$

которое при $x\ll 1$ следует также и из уравнения (54) (все обозначения те же). Решение уравнения (66) имеет вид

$$
x(t) = \frac{x_0}{1-x_0\,\delta\omega\, t}, \quad t>0. \tag{67}
$$

Таким образом, процесс вынужденного образования пар с излучением электромагнитной волны в поле другой волны по принятой в электродинамике плазмы терминологии (см., например, [10, 13]) является взрывной неустойчивостью.

Наконец, при $s=-1$, $q=1$ зафиксировать можно амплитуду $\alpha_0=\sqrt{n_{00}/\gamma_0}\equiv\alpha_{00}$ (см. условия (58)). При этом из уравнений (27) получается система ($g=-1$)

$$
\begin{aligned}
&\omega_-\frac{d\alpha_-}{dt} = \frac{e^2}{4\hbar^2}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_1\alpha_2\alpha_{00},\\
&\omega_1\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_2\alpha_-\alpha_{00},\\
&\omega_2\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{2\pi e^2}{m}(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)\alpha_1\alpha_-\alpha_{00},
\end{aligned} \tag{68}
$$

по виду совпадающая с системой (65). Таким образом, процесс вынужденного излучения пучком частиц двух электромагнитных волн также является взрывной неустойчивостью. Напомним, что системы (65) и (68) могут быть записаны только при наличии среды, когда выполняются соответствующие условия резонанса для частот и волновых векторов взаимодействующих волн.

10. РОЛЬ СПОНТАННЫХ ПРОЦЕССОВ. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку в работе рассмотрены только вынужденные процессы, следует обсудить роль различных спонтанных процессов, например, вынужденно-спонтанного двухфотонного процесса, при котором один фотон испускается спонтанно, а второй вынужденно. Очевидно, что такой процесс может развиваться параллельно с процессом вынужденного двухфотонного излучения (см. разд. 8) и, в принципе, должен приниматься во внимание при построении решений (62). Укажем в связи с этим общее условие пренебрежимости спонтанными эффектами. Независимо от механизма спонтанного и вынужденного излучений плотность энергии W излучения определяется из известного уравнения (см., например, [11])

$$\frac{dW}{dt} = \alpha + 2\delta\omega\, W, \tag{69}$$

где $\delta\omega$ — инкремент неустойчивости (любой процесс вынужденного излучения является неустойчивостью [11]), а α — постоянная, пропорциональная вероятности спонтанного процесса (эту величину мы здесь конкретизировать не можем). Пусть в некоторый момент времени t_0 плотность энергии излучения равна W_0. Тогда из (69) имеем

$$W = W_0 \exp\left[2\delta\omega(t-t_0)\right] + \frac{\alpha}{2\delta\omega}\left\{\exp\left[2\delta\omega(t-t_0)\right] - 1\right\}. \tag{70}$$

Первое слагаемое в формуле (70) описывает вынужденное излучение. Очевидно, что на развитой стадии процесса, когда $t - t_0 \gg (\delta\omega)^{-1}$, и при достаточно большой амплитуде начальных возмущений, когда $W_0 \gg \alpha(\delta\omega)^{-1}$, спонтанное излучение можно вообще не учитывать. Именно так и делалось в настоящей работе.

В заключение отметим, что в настоящей работе, в отличие от того, как это традиционно делается в релятивистской квантовой теории (см., например, [1]), процессы рассеяния и рождения пар рассмотрены как коллективные вынужденные процессы в самосогласованном электромагнитном поле. Такой подход разработан и существенно развит в классической электродинамике плазмы и в теории плазменных неустойчивостей [10, 13, 14]. Его использование в настоящей работе позволило не только иначе взглянуть на известные квантовые явления, но и учесть нелинейные эффекты, которые в квантовых задачах подобного рода ранее не рассматривались.

Автор благодарен А. А. Рухадзе за интерес к работе и полезные дискуссии. Автор благодарит также участников семинара теоретического отдела ИОФ РАН за конструктивное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Д. Бьёркен, С. Д. Дрелл, *Релятивистская квантовая теория*, Наука, Москва (1978).
2. М. В. Кузелев, Физика плазмы **36**, 132 (2010).
3. М. В. Кузелев, КЭ **40**, 83 (2010).
4. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Атомиздат, Москва (1961).
5. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1982).
6. М. В. Кузелев, ЖЭТФ **137**, 807 (2010).
7. М. В. Кузелев, Физика плазмы **36**, 627 (2010).
8. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, УФН **152**, 285 (1987).
9. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, в сб. *Проблемы теоретической физики и астрофизики* (к 70-летию В. Л. Гинзбурга), под ред. Л. В. Келдыша и В. Я. Файнберга, Наука, Москва (1989), с. 70.
10. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Электродинамика плотных электронных пучков в плазме*, Наука, Москва (1990).
11. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, УФН **178**, 1025 (2008).
12. А. С. Давыдов, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1973).
13. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, Москва (1976).
14. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988).