

ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В КВАЗИДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

С. В. Кострыкин^{a,b,}, А. А. Хапаев^{a,**}, И. Г. Якушкин^{a,***}*

^a *Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
119017, Москва, Россия*

^b *Институт вычислительной математики Российской академии наук
119333, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 3 июня 2010 г.

Получено решение модифицированной задачи Кармана, описывающее стационарное вихревое течение в тонком слое вязкой вращающейся жидкости. Рассмотрено влияние придонного трения на поведение циклонических и антициклонических вихрей при произвольных значениях числа Россби. Исследованы различные режимы антициклонических вихревых течений. Приближенное аналитическое решение для стационарных течений сравнивается с численным решением нестационарной задачи. Приведены результаты экспериментального исследования циклонических и антициклонических вихрей в квазитурбулентном многовихревом течении, и дана их интерпретация на основе решения модельной задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема возникновения и эволюции когерентных структур в геофизических течениях, к числу которых относятся атмосферные и океанические вихри с большими горизонтальными масштабами, в настоящее время вызывает значительный интерес как с теоретической, так и с прикладной точки зрения [1–3]. Когерентные структуры фиксируются также при численном изучении двумерной турбулентности в вязкой жидкости, для которой, как известно, характерен перенос энергии вниз по спектру и укрупнение масштаба вихрей [4]. Объединяясь, вихри создают интенсивные струйные течения, неустойчивость которых снова приводит к возникновению отдельных вихрей. Аналогичные явления наблюдаются при лабораторных экспериментах с течениями, возбуждаемыми магнитогидродинамическим способом в тонких слоях жидкости [5–7].

Одной из особенностей крупномасштабных структур во вращающейся жидкости является асимметрия вихрей, имеющих разное направление вращения (циклонов и антициклонов). Первоначально эта асимметрия связывалась с β -эффектом

(зависимостью параметра Кориолиса f от координаты) [8]. В дальнейшем те же явления были обнаружены при моделировании двумерной турбулентности (в приближении мелкой воды) при $f = \text{const}$ [9]. В этом случае асимметрия может быть интерпретирована как результат двумерной сжимаемости жидкости, приводящей к нелинейной модуляции масштаба Россби–Обухова и по-разному влияющей на циклоническое и антициклоническое движения [3, 10].

Двумерная сжимаемость, в свою очередь, связана с циркуляцией жидкости в вертикальной плоскости и, таким образом, возникает вопрос о том, какую роль играет эта циркуляция в формировании квазидвумерных структур, а также о способах перехода от полного трехмерного описания к двумерным или многоуровневым моделям, упрощающим численное решение уравнений Навье–Стокса. Такой переход (параметризация вертикальных движений) часто используется при малой величине отношения вертикального и горизонтального масштабов, а следовательно, также вертикальной и горизонтальной скоростей течения (условие квазидвумерности) [1, 11].

Несмотря на значительное число экспериментальных [5, 10, 12] и теоретических [1, 13, 14] работ, посвященных этой проблеме, точные условия такой параметризации, а также особенности трехмерной

*E-mail: kostr@inm.ras.ru

**E-mail: aakhapaev@gmail.com

***E-mail: iyakushkin@yandex.ru

циркуляции в случае циклонических и антициклонических структур остаются не до конца выясненными [1, 11]. Разрешение возникающих вопросов требует как проведения лабораторных экспериментов, так и разработки соответствующих теоретических моделей. Значительные возможности здесь связаны с экспериментами, использующими магнитогидродинамическое возбуждение вихревых течений, и их теоретической интерпретацией [15].

Вихревые течения в тонких слоях вязкой, однородной, несжимаемой жидкости, вращающейся в поле силы тяжести под действием однородной по z сторонней силы, при условии малости вертикальных масштабов течения по сравнению с горизонтальными ($h/L \ll 1$) описываются уравнениями квазистатики для горизонтальной скорости \mathbf{U} и возвышения свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ над уровнем $z = h$:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + w\mathbf{U}_z + f\mathbf{k} \times \mathbf{U} - \nu\mathbf{U}_{zz} - \nu\Delta\mathbf{U} = \mathbf{F} - g\nabla\eta, \quad (1)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = w|_{z=h}, \quad (2)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla, \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\mathbf{F} = F_0\mathbf{k} \times \nabla G(x, y, t)$$

— внешняя сила, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Граничные условия для вязкой жидкости на нижней и верхней границах слоя имеют вид

$$\mathbf{U}|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{U}_z|_{z=h} = 0. \quad (3)$$

Вертикальная скорость w определяется условием несжимаемости $w_z = -\nabla \cdot \mathbf{U}$ и условием $w|_{z=0} = 0$.

Чтобы выделить циркуляцию жидкости в вертикальной плоскости, представим поле горизонтальной скорости в виде суммы вихревой и потенциальной составляющих:

$$\mathbf{U} = \mathbf{k} \times \nabla\Psi + \nabla\Phi. \quad (4)$$

Движение жидкости будем описывать с помощью вертикальной компоненты завихренности $\omega = \Delta\Psi$ и дивергенции горизонтальной скорости $\delta = \Delta\Phi$.

Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} & \omega_t + [\Psi, \omega] + \nabla((f + \omega)\nabla\Phi) + w\omega_z + \\ & + \mathbf{k} \cdot \nabla w \times \mathbf{U}_z - \nu\omega_{zz} - \nu\Delta\omega = F_0\Delta G, \\ & \delta_t + [\Phi, \omega] - \nabla((f + \omega)\nabla\Psi) + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{U}^2 + w\delta_z + \\ & + \nabla w \cdot \mathbf{U}_z - \nu\delta_{zz} - \nu\Delta\delta = -g\Delta\eta, \\ & \frac{d\eta}{dt} = w|_{z=h}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\omega|_{z=0} = \delta|_{z=0} = 0, \omega_z|_{z=h} = \delta_z|_{z=h} = 0, \quad (6)$$

где введено обозначение $[A, B] = A_x B_y - B_x A_y$.

Система (5), (6) наглядно показывает, что асимметрия циклонов и антициклонов непосредственно связана с двумерной сжимаемостью жидкости.

Простейшим способом параметризации трехмерной циркуляции без учета подстилающей поверхности является использование теоремы Тэйлора–Праудмена, приводящее к системе уравнений мелкой воды относительно не зависящей от вертикальной координаты горизонтальной скорости [1]. Вертикальная скорость при этом линейно зависит от z , так что на поверхности она выражается через дивергенцию горизонтальной скорости $w(h) = -\delta(x, y, t)h$. Это приближение учитывает инерционные волны, являющимися одной из причин проявления двумерной сжимаемости.

Более точное описание требует представления вертикальной скорости в виде

$$w(h) = -\delta h + w_h,$$

где величина w_h связана с дополнительной трехмерной циркуляцией, зависящей от пограничных слоев вблизи дна и свободной поверхности. Эта величина имеет важное значение в геофизических приложениях, и ее определение представляет особый интерес для описания циркуляции атмосферы и океана в целом [11].

В случае медленных движений жидкости из уравнения для потенциальной компоненты течения, предполагая ее относительную малость, получаем обобщение обычных соотношений геострофического и циклострофического баланса

$$\nabla(f + \omega)\nabla\Psi - \frac{\Delta(\nabla\Psi)^2}{2} = g\Delta\eta(x, y).$$

Отсюда следует оценка относительных возвышений поверхности

$$\frac{\eta}{h} \sim \frac{L}{L_0} Fr^{1/2} + Fr,$$

где $L_0 = (gh)^{1/2}/f$ — масштаб Обухова–Россби, $Fr = U^2/gh$ — число Фруда.

При $L/L_0, Fr \ll 1$ возвышения поверхности не оказывают существенного влияния на течение и уравнение свободной поверхности можно заменить условием непротекания [13, 15]

$$w(h) = -\delta h + w_h = 0. \quad (7)$$

Определение величины w_h требует учета трения о дно, для чего обычно используется линейное, рэлеевское или экмановское (для вращающейся жидкости) приближение, справедливое для стационарных или квазистационарных течений при малых числах Рейнольдса $Re = Uh^2/L\nu$ или Россби $Ro = U/Lf$. При малых значениях числа Экмана $E_k = Ro/Re = \nu/fh^2$ вблизи подстилающей поверхности возникает пограничный слой, в котором генерируется потенциальная компонента течения, приводящая к циркуляции в вертикальной плоскости [1, 16].

Вместе с тем для достаточно интенсивных вихревых образований имеет место нелинейное трение, исследованное для вихрей простейшей конфигурации над вращающимся диском в ряде работ, начиная с Кармана [17]. Уже из этих работ следует, что для таких течений нелинейное трение о подстилающую поверхность влияет на двумерную сжимаемость жидкости и определяет различие между циклоническим и антициклоническим движениями [16, 18–20].

Для течений с более общей пространственной структурой влияние нелинейных членов при $Ro \ll 1$ с помощью теории возмущений рассматривалось в работе [13, 14, 21, 22]. Приближенное решение с учетом нелинейного пограничного слоя в отсутствие вращения было дано в работе [15]. Наиболее сложным для анализа является случай $Ro \sim 1$, когда асимметрия вихревых течений достигает максимума [23]. Как указывалось в ряде работ [12, 24, 25], в этом случае пограничный слой оказывается неустойчивым и вертикальный профиль скорости течения приобретает более сложный характер.

Для преодоления возникающих трудностей, как в самой теории, так и при анализе результатов эксперимента, целесообразно использовать модель вихревого течения (модель Кармана), модифицированную для описания течения в тонком слое жидкости в присутствии внешней силы. Целью настоящей работы является теоретическое (численное и аналитическое) исследование такой модели в широком диапазоне параметров и интерпретация на ее основе результатов лабораторных экспериментов, проведенных на установке, разработанной в ИФА им. А. М. Обухова. Разработка методики эксперимента и обсуждение его предварительных результатов проводились с активным участием покойного В. М. Пономарева.

Раздел 2.1 содержит постановку модифицированной задачи Кармана, предназначенной для исследования и анализа различных режимов поведения циклонических и антициклонических вихрей. В

разд. 2.2 приведены результаты по численному решению данной задачи при разных значениях параметров. В разд. 2.3 на основе аналитического решения квазилинейной задачи рассмотрены различные стационарные режимы циркуляции жидкости и проведено их сопоставление с численным решением. В разд. 3 приведены результаты экспериментального исследования циклонических и антициклонических структур в квазитурбулентном течении вращающейся жидкости и дана их интерпретация с точки зрения развитой в работе теоретической модели. Заключение содержит обсуждение результатов работы.

2. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА КАРМАНА

2.1. Постановка задачи

Задача Кармана дает описание осесимметричного движения вязкой жидкости в бесконечном горизонтальном слое жидкости над вращающимся диском или между двумя вращающимися дисками [16, 17]. Для этих постановок задачи ранее были получены различные теоретические и численные результаты [18–20]. Особые трудности при этом вызывает анализ случая, когда вращение на нижней и верхней границах происходит с разнонаправленными и примерно одинаковыми угловыми скоростями и стационарные состояния оказываются неустойчивыми.

Ниже рассматривается модифицированная по сравнению с классической постановка задачи, удобная для анализа наблюдающихся в эксперименте течений, создаваемых магнитогиродинамическим способом в тонких слоях жидкости.

Рассмотрим осесимметричное течение в слое вязкой жидкости глубиной h со свободной поверхностью, расположенной над вращающейся плоскостью. Движение жидкости, происходящее в результате действия сторонней вихревой силы, описывается системой (5). Предположим, что вихревая сила не зависит от координат и времени, а в качестве условия на свободной поверхности возьмем условие непротекания. Такая постановка задачи позволяет получить не зависящее от горизонтальных координат решение для завихренности, дивергенции и вертикальной скорости течения. Физически, такое решение правильно описывает центральные части вихрей на масштабах меньших масштаба Россби–Обухова. В результате приходим к уравнениям, записанным в неподвижной системе отчета:

$$\begin{aligned} F_t + HF_z &= EF_{zz} + G^2 - F^2 + p(t), \\ G_t + HG_z &= EG_{zz} - 2FG + q, \\ 2F &= -H_z \end{aligned} \quad (8)$$

с граничными

$$\begin{aligned} G|_{z=0} = s, \quad F|_{z=0} = G_z|_{z=1} = F_z|_{z=1} = 0, \\ H|_{z=0} = H|_{z=1} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

и начальными условиями

$$G(z, 0) = s, F(z, 0) = 0, H(z, 0) = 0. \quad (10)$$

Здесь $F = \delta/2$, $G = \omega/2$, $H = w/h$, $E = \nu/h^2$, $2q$ — вертикальная компонента ротора внешней силы, $2p(t) = -g\Delta\eta$, s — угловая скорость вращения основания.

Легко заметить, что замена переменных в уравнениях (8)–(10)

$$\begin{aligned} \tilde{t} = tE, \quad \tilde{G} = \frac{G}{E}, \quad \tilde{F} = \frac{F}{E}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{E}, \\ \tilde{q} = \frac{q}{E^2}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{E^2}, \quad \tilde{s} = \frac{s}{E} \end{aligned} \quad (11)$$

приводит к уравнениям движения, не зависящим явным образом от параметра E . Поэтому, если считать, что в уравнениях (8) $E = 1$ и иметь в виду преобразование (11), то в задаче останется только два независимых параметра — q и s . При этом s представляет собой обратное число Экмана, а величина $Ro_q = \sqrt{|q|}/s$ может рассматриваться как аналог числа Россби, вычисленного по внешней силе.

2.2. Численные результаты

Модифицированная модель Кармана (8)–(10) численно интегрировалась до момента установления стационарного течения. Для интегрирования использовался алгоритм, основанный на численной схеме «кабаре» [26]. Данная схема является двухслойной явной схемой второго порядка точности по пространству и времени и обладает высокой вычислительной эффективностью. Другой привлекательной особенностью этой схемы является компактность ее сеточного шаблона, что позволяет естественным образом задавать граничные условия при численном моделировании граничных задач.

При решении задачи (8)–(10) явным образом учитывались только слагаемые из уравнений (8), описывающие адвективный перенос и нелинейное взаимодействие. Диффузионные слагаемые рассчитывались по стандартной неявной схеме с трехточечным пространственным шаблоном. Для расчетов использовалась равномерная сетка по пространству, состоящая из $N = 100$ узлов ($\Delta z = 0.01$). При этом, как

показали численные эксперименты, дополнительное измельчение сетки не приводило к заметному изменению решения. Шаг по времени τ подбирался таким образом, чтобы обеспечивалось выполнение условия Куранта $\max(|H(z_i, t^n)|)\tau/\Delta z \leq 0.5$ на каждом временном слое t^n .

Численное решение исходной нестационарной задачи проводилось в широком диапазоне значений q и $s \geq 0$. Основное внимание уделялось нелинейным режимам, возникающим при $|q| \gg E^2$. Наряду с вертикальными профилями компонент течения рассчитывались также усредненные по глубине характеристики G_0, H_0 . Число Россби для усредненного течения имеет вид $Ro_0 = G_0/s - 1$.

Результаты расчетов показывают, что при $q > -q_1(s)$, т.е. для циклонов и слабых (относительно общего вращения) антициклонов ($Ro_0 < 0$, $|Ro_0| \ll 1$) быстро устанавливается стационарный режим со слабой циркуляцией в вертикальной плоскости (квазидвумерный режим). При этом формируется придонный пограничный слой, а вертикальная скорость имеет положительное направление для циклонов и отрицательное для антициклонов. Квазидвумерный режим с придонным пограничным слоем и слабой положительной вертикальной скоростью устанавливается также при $q < -q_2(s)$ для интенсивных относительно общего вращения антициклонов $|Ro_0| \gg 1$. При $q_1(s) < -q < q_2(s)$ формирующийся первоначально квазидвумерный режим с придонным пограничным слоем оказывается неустойчивым и происходит скачкообразный перебор ко вторичному режиму интенсивной трехмерной циркуляции. В этом режиме $|Ro_0| \gtrsim 1$, а вертикальная скорость имеет положительное направление.

На рис. 1 представлены стационарные профили $G - s$ и H , полученные численным методом при $E = 1/50$, $s = 1$ для разных значений параметра q , т.е. фактически при изменении числа Россби. На рис. 2 показана зависимость угловой скорости течения на поверхности жидкости $G(1)$ от вихревой силы при разных угловых скоростях общего вращения. На рис. 3 показаны области существования различных режимов на плоскости s, q .

В целом, проведенные расчеты показывают, что в отсутствие вращения ($s = 0$) имеет место симметрия в поведении циклонов и антициклонов. При наличии вращения симметрия нарушается, и для антициклонической силы реализуются различные режимы поведения вихрей: квазидвумерные режимы с придонным пограничным слоем и режим развитой трехмерной циркуляции.

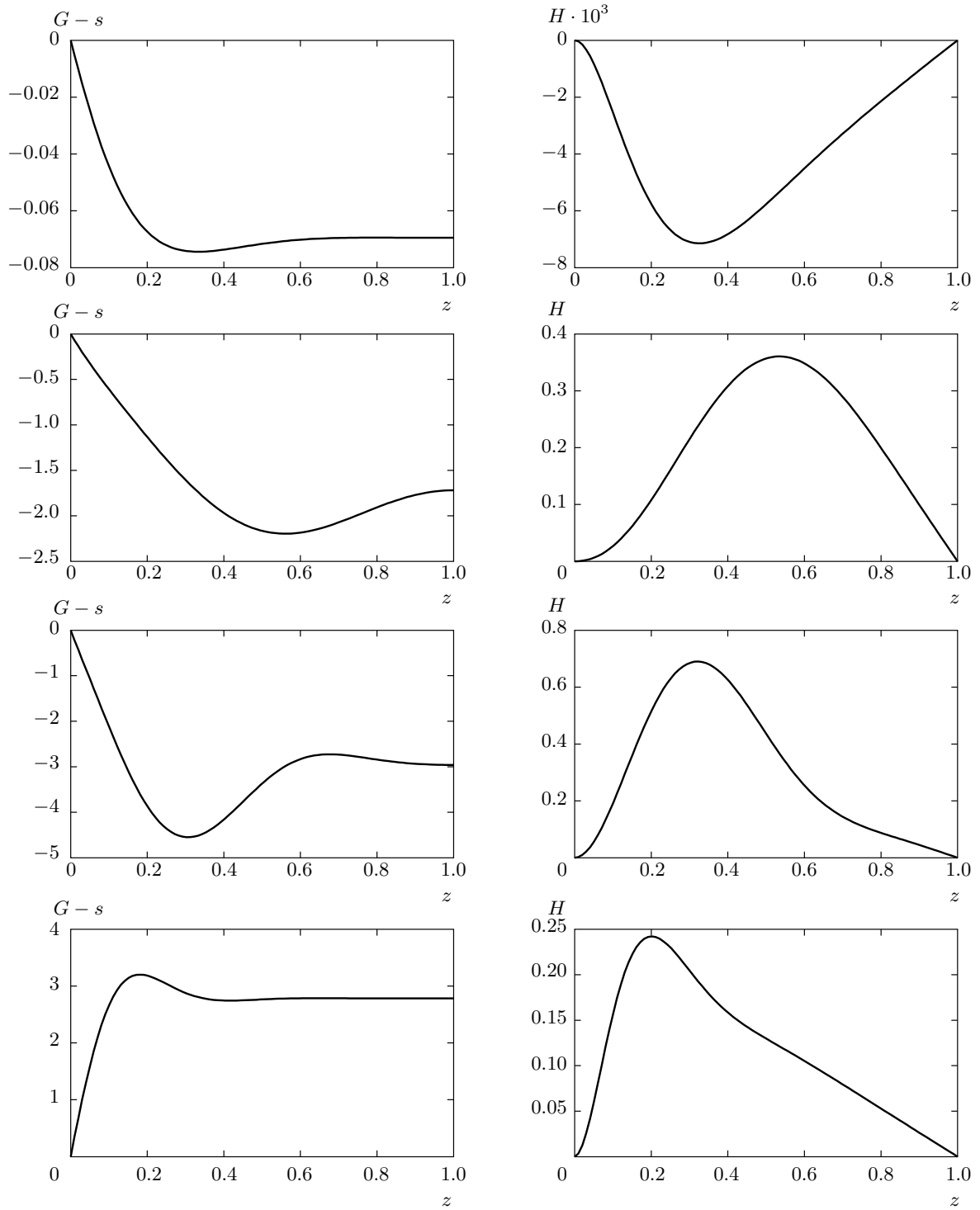


Рис. 1. Стационарные профили $G - s, H$ для модели Кармана при $E = 1/50, s = 1$ и при разных значениях q . Верхний ряд соответствует $q = -0.01$, второй сверху — $q = -0.5$, третий сверху — $q = -1$, нижний — $q = 1$

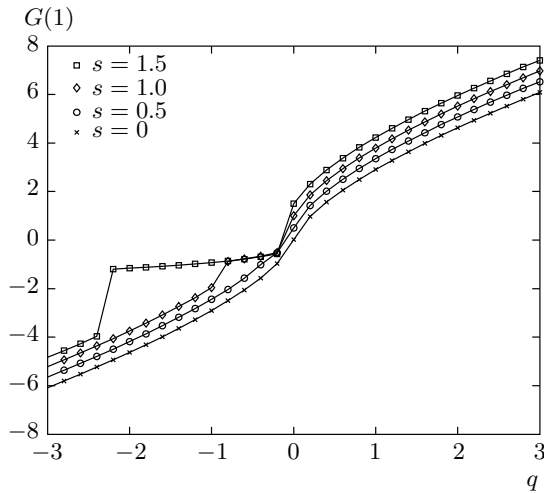


Рис. 2. Зависимость угловой скорости на верхней границе $G(1)$ от q , полученная в результате численного решения задачи Кармана для $E = 1/50$ при разных s

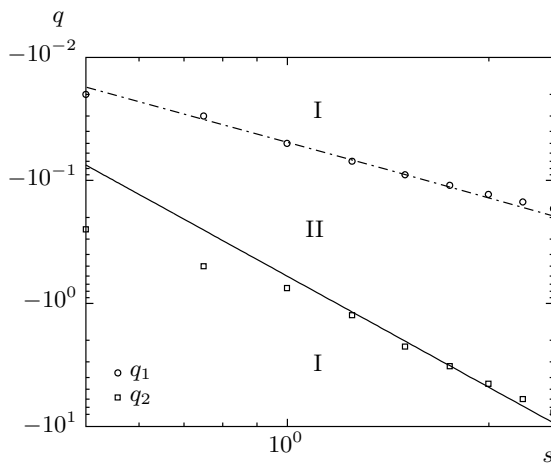


Рис. 3. Зависимости в логарифмическом масштабе критических значений внешней силы от параметра s , полученные в результате численного моделирования задачи Кармана для $E = 1/50$. Сплошной и штрихпунктирной линиям соответствуют теоретические зависимости для этих величин. Область I — квазидвумерный режим, II — режим трехмерной циркуляции

2.3. Квазилинейное приближение для уравнений Кармана

Рассмотрим приближенное решение задачи (8)–(10), позволяющее получить аналитическое описание различных стационарных режимов течения. Полагая в дальнейшем $E = 1$, представим

характеристики течения в виде суммы усредненных по вертикальной координате величин и отклонений от средних:

$$G(z) = G_0 + G'(z), \quad H(z) = H_0 + H'(z).$$

Предположим, что течение в слое жидкости мало отклоняется от среднего состояния, и пренебрежем в уравнениях квадратичными по возмущениям слагаемыми. При малых $|q|$ и $G_0 \approx s$ получаем результат, совпадающий с обычным линейным приближением. При $q > 1$ используемое приближение пригодно для интегрального описания течения (8)–(10), что подтверждается сравнением с численными расчетами.

После введения функции $K(z) = G'(z) + iF(z)$ проблема описания стационарных режимов течения сведется к решению следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} -K_{zz} + H_0 K_z - 2iG_0 K &= q + i(p + G_0^2), \\ K(0) = s - G_0, K'(1) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

с дополнительными условиями для функции K :

$$\int_0^1 K dz = 0, \quad \text{Im} \left(\int_0^1 dz \int_0^z K(\xi) d\xi \right) = -\frac{H_0}{2}. \quad (13)$$

Решение (12), (13) запишем в виде

$$K(z) = (s - G_0) \frac{B(z)}{B(0)},$$

где

$$B(z) = 1 + \frac{1}{A} \left(\frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1(z-1)} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2(z-1)} \right),$$

$$A = \frac{1}{\lambda_2^2} (1 - e^{-\lambda_2}) - \frac{1}{\lambda_1^2} (1 - e^{-\lambda_1}).$$

При этом из уравнений (12), (13) следуют «дисперсионные» соотношения для G_0, H_0 при заданных s, q :

$$\begin{aligned} (s - G_0) \text{Im} \left(\frac{1}{B(0)} \right) &= \frac{q}{2G_0}, \\ (s - G_0) \text{Im} \left(\frac{1}{B(0)} \left[1 + \frac{2}{A} \left(\frac{1 - \lambda_1 e^{-\lambda_1} - e^{-\lambda_1}}{\lambda_1^3} - \right. \right. \right. & (14) \\ \left. \left. \left. - \frac{1 - \lambda_2 e^{-\lambda_2} - e^{-\lambda_2}}{\lambda_2^3} \right) \right] \right) &= -H_0, \end{aligned}$$

а собственные числа λ_i записываются в виде

$$\lambda_{1,2} = \frac{H_0}{2} \pm \left(\frac{H_0^2}{4} - 2iG_0 \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Важная особенность решения состоит в том, что оно не является однозначным, но имеет разные ветви, соответствующие разным режимам течения. Собственные числа, определяющие эти режимы, в свою очередь, зависят от величин G_0 и $\beta = 8G_0/H_0^2$.

Если $\beta \geq 1$, то вертикальная скорость существенно меньше горизонтальной, т. е. течение можно считать квазидвумерным. При этом собственные числа имеют вещественную часть, указывающую на формирование пограничных слоев около дна и свободной поверхности. При медленном вращении ($|q| \ll 1$) следующий из нашего анализа квазидвумерный режим совпадает с линейным приближением, приводящим к рэлеевскому трению и квадратичному (пуазейлевскому) вертикальному профилю завихренности [15, 23].

В случае быстрого вращения ($\sqrt{|G_0|} \gg 1, |\lambda| \gg 1$) пограничный слой вблизи свободной поверхности слабо влияет на среднее течение и для величин G_0, H_0 можно выписать уравнения

$$\begin{aligned} K(z) &= (s - G_0) \left(\frac{1}{\lambda} + e^{\lambda z} \right), \\ \frac{q}{2G_0} &= (s - G_0) \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = H_0, \\ \lambda &= \frac{H_0}{2} - \left(\frac{H_0^2}{4} - 2iG_0 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из этих формул следует, что нормированные решения зависят от параметра $q/s^{3/2}$, т. е. представимы в виде

$$G_0 = sg_0 \left(\frac{q}{s^{3/2}} \right), \quad H_0 = s^{1/2} h_0 \left(\frac{q}{s^{3/2}} \right). \quad (17)$$

При $q \geq 0$ уравнение для G_0 имеет одно положительное, а при $q/s^{3/2} < q_1/s^{3/2} \approx -0.4$ одно отрицательное действительные решения. В интервале $-0.4 < q/s^{3/2} < 0$ уравнение имеет два положительных и одно отрицательное действительные решения.

При $|q|/s^{3/2} \gg 1$ и больших числах Россби для усредненных характеристик течения справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} G_0 &\approx s + 0.8 \operatorname{sign}(q)|q|^{2/3}, \\ H_0 &\approx 0.6 \operatorname{sign}(q)|q|^{1/3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Если $\beta \ll 1, H_0 > 0$, то корни характеристического уравнения принимают вид

$$\lambda_1 \approx H_0, \quad \lambda_2 \approx 2i\alpha, \quad (19)$$

где

$$\alpha = \frac{G_0}{H_0}.$$

Таким образом, формируется только один пограничный слой около свободной поверхности, который слабо влияет на усредненные характеристики. Второе собственное число чисто мнимое, что указывает на существенно трехмерный характер течения. В этом случае вертикальная скорость имеет значительную величину. Выражения для G_0, H_0 принимают вид

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{q}{2s}, \quad G_0 = -\frac{\alpha q}{2s}, \\ \frac{2s^2}{q} (1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha)^2 &= \alpha^3. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение, соответствующее этим уравнениям, существует при $q < 0$ (для антициклонов). Основной ветвью решения является ветвь $-\pi < \alpha < 0$. В данном случае нормированные характеристики течения зависят от параметра $|q|^{1/2}/s$ и представимы как

$$G_0 = sg_0 \left(\frac{|q|^{1/2}}{s} \right), \quad H_0 = sh_0 \left(\frac{|q|^{1/2}}{s} \right).$$

Сравнение приближенного решения, полученного по квазилинейной теории, с численным решением нелинейной задачи при $E = 1/50$ проводилось для величин G_0, H_0 . Из рис. 4 следует, что аналитическое решение представляет собой достаточно хорошее приближение к численному. Аналитическое решение предсказывает существование нескольких режимов антициклонического вращения, из которых при фиксированном значении параметров реализуется только один. Численное решение дает возможность найти значения параметров, при которых происходят переходы течения с квазидвумерного режима на трехмерный и обратно. Первый переход, имеющий скачкообразный характер, происходит вблизи граничной точки существования трех действительных корней уравнения (16), $-q_1/s^{3/2} \approx 0.4$. Второй переход для характеристик усредненного течения, в отличие от поверхностного течения, является непрерывным и имеет место вблизи точки $-q_2 \sim s^3$, которая является точкой пересечения кривых $G_0(q)$ для трехмерного и квазидвумерного режимов. Аналитические оценки положения точек перехода достаточно хорошо соответствуют численным расчетам, представленным на рис. 3.

Что касается вертикальных профилей скорости течения и ее значений на поверхности, то достаточно близкое соответствие аналитических и численных результатов имеет место только в квазидвумерном режиме. Для того чтобы получить аналогичное соответствие в режиме трехмерной циркуляции, необходимо уточнение приближенного решения с использованием итерационной процедуры.

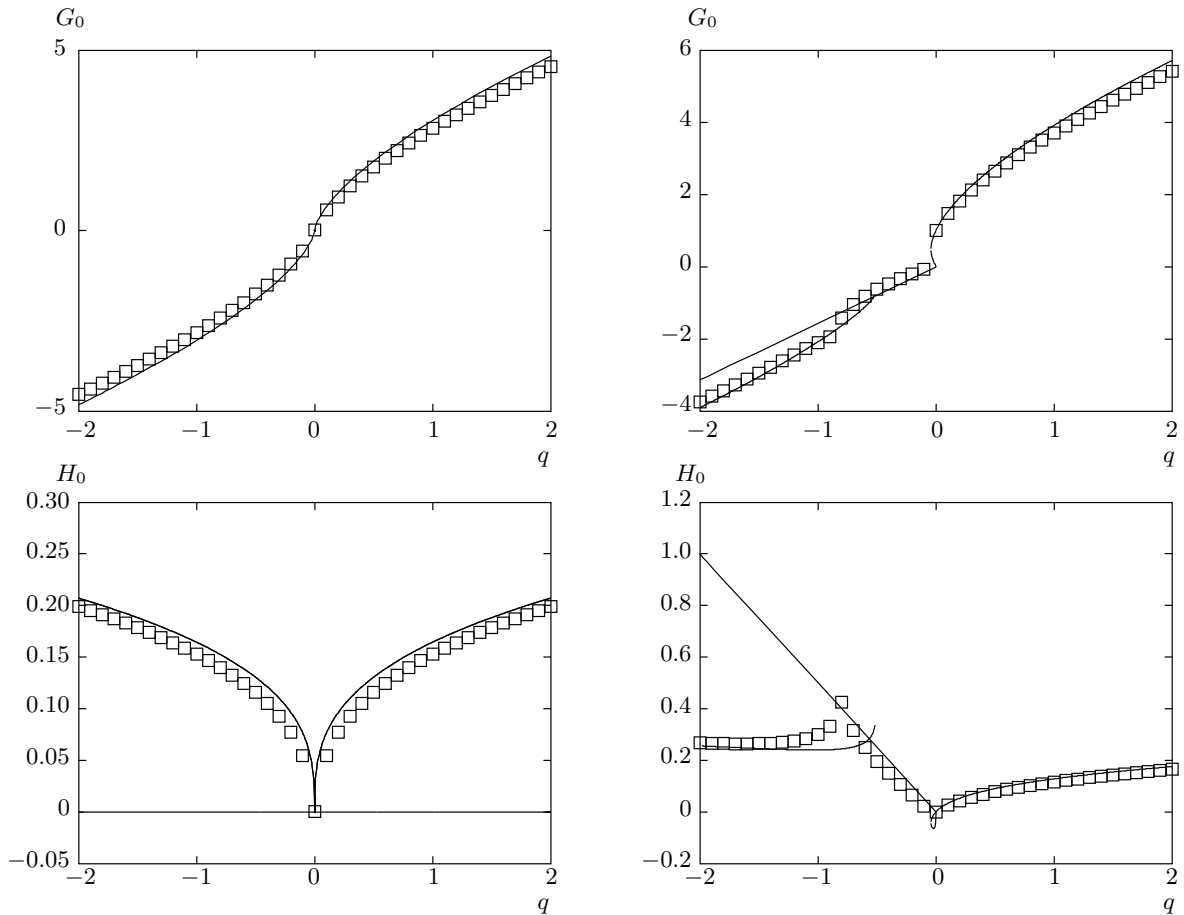


Рис. 4. Зависимости $G_0(q)$, $H_0(q)$, полученные в результате численного решения задачи Кармана для $E = 1/50$ (квадраты) и аналитического решения квазилинейной задачи Кармана (сплошные линии). Левая колонка соответствует $s = 0$, правая — $s = 1$

Для параметризации циркуляции жидкости в вертикальной плоскости в квазидвумерном режиме может быть использована формула для коэффициента нелинейного трения μ , связывающая поверхностное течение с вихревой силой. Из формулы (12), пренебрегая малыми членами, получим соотношение

$$G(1) - s = \frac{q}{\mu}, \quad \mu = -2G_0 \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

Величина $1/\lambda$ определяет высоту пограничного слоя. При малых числах Россби, когда $|G_0 - s| \ll s$, получаем формулу для линейного экмановского трения [23]. Важная для приложений величина вертикальной скорости на верхней границе пограничного слоя выражается как $w_h = 2F(1)$.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для лабораторных наблюдений квазидвумерного вихревого течения использовалась установка, представляющая собой прямоугольную кювету, заполненную проводящей жидкостью ($\rho \approx 1 \text{ г/см}^3$, $\nu \approx 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$) с высотой слоя $h = 0.75 \text{ см}$ и поставленную на вращающуюся платформу с регулируемой угловой скоростью [23]. Условиям эксперимента соответствовал параметр $E = \nu/h^2 \approx 0.02 \text{ с}^{-1}$. На противоположных боковых сторонах кюветы установлены электроды площадью $S = 30 \text{ см}^2$, с помощью которых через жидкость пропускается постоянный электрический ток. Многовихревое течение в кювете создается с помощью системы постоянных магнитов с шахматным изменением полярности. Вертикальная компонента индукции магнитного поля в тонком слое жидкости приближенно может быть описана выражением

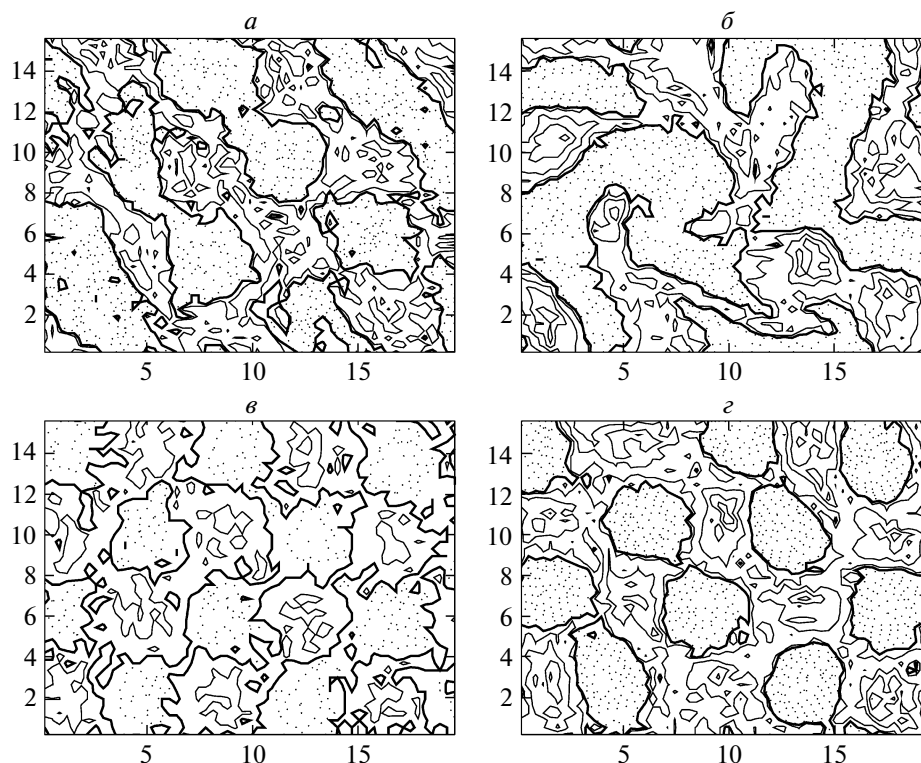


Рис. 5. Поле относительной завихренности экспериментального течения на поверхности в один из моментов времени, *a* — $I = 25$ мА, без вращения, *б* — $I = 125$ мА, без вращения, *в* — $I = 25$ мА, $T = 4.7$ с, *г* — $I = 125$ мА, $T = 4.7$ с. Интервал изолиний составляет 10 с^{-1} , начиная с 5 с^{-1} . Пунктир соответствует отрицательным значениям, а жирная линия — нулевой изолинии

$$B = B_0 \exp\left(-\frac{z}{l_z}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{l_y}\right),$$

где $B_0 = 3200$ Гс, $l_z = 0.94$ см, $l_x = 8$ см, $l_y = 8.8$ см.

При пропускании электрического тока на жидкость действует вихревая сила, которая после усреднения по вертикальной координате записывается в виде

$$\mathbf{F} = F_0 \Delta G(x, y) \mathbf{k},$$

$$G(x, y) = -\cos(k_1 x) \sin(k_2 y),$$

$$k_1 = 2\pi/l_x, \quad k_2 = 2\pi/l_y,$$

$$F_0 = \frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} \frac{B_0 I}{10S} \left\langle \exp\left(-\frac{z}{l_z}\right) \right\rangle \approx 4I \text{ с}^{-2},$$

где I — величина тока в амперах.

Наблюдения за течением проводились как в состоянии покоя, так и при вращении установки против часовой стрелки с периодами 4–20 с при значениях тока 25–200 мА. Для измерения скорости течения проводилась регистрация смещений частиц плавучей примеси с помощью видеокамеры и последующая обработка видеоклипов [15]. Измерения и

дальнейшие расчеты проводились во вращающейся системе координат. В силу направления вращения установки циклонические вихри имели положительную относительную завихренность, а антициклонические вихри — отрицательную.

Как показывают наблюдения, в состоянии покоя (без общего вращения) при токах более 5 мА в системе возникает вторичный квазитурбулентный режим. В этом режиме происходит объединение и разъединение исходных вихрей и возникновение струйных течений. При этом в системе имеет место симметрия между вихрями с разным знаком завихренности. При вращении установки наблюдается ослабление турбулентных пульсаций, а также визуально заметное усиление вращения антициклонических вихрей и ослабление вращения циклонических. Циклонические вихри при этом занимают большую площадь и имеют тенденцию к объединению. Центральные части антициклонических вихрей вращаются фактически твердотельно. Увеличение угловой скорости вращения установки или амплитуды вихревой силы (увеличение или уменьшение числа

Россби) ведет к выравниванию характеристик вихрей разной направленности. На рис. 5 представлены усредненные по небольшому интервалу времени пространственные распределения завихренности в системе соседних вихрей в состоянии покоя и при постоянном общем вращении и разных значениях силы тока, показывающие разницу в структуре вихрей. Гистограммы относительной завихренности, вычисленные для некоторого момента времени, также указывают на то, что антициклонические вихри (с отрицательной завихренностью) имеют большую скорость вращения и занимают меньшую площадь, чем циклонические (с положительной завихренностью).

Для описания течения при относительно небольших токах в работе [23] вычислялись усредненные по пространству и времени моменты завихренности течения $\langle \omega \rangle$, $\langle \omega^2 \rangle$, $\langle \omega^3 \rangle$. Как показали измерения, согласующиеся с предсказаниями теории, значения средней завихренности пренебрежимо малы. Асимметрия течения характеризовалась величиной $\langle \omega^3 \rangle$. Интерпретация эксперимента была дана на основе описания течения в виде суммы двух мод с преимущественным развитием циклонической и антициклонической компонент. Однако визуальные наблюдения показывают, что вихревые структуры имеют скорее пространственный, чем модовый характер, и должны описываться соответствующим образом. Поэтому в настоящей работе использовалась обработка данных отдельно для областей с положительной и отрицательной завихренностями. При этом для этих областей в каждый момент времени проводились вычисления среднего квадрата завихренности. В дальнейшем эти данные усреднялись по всему временному интервалу. Отсюда получались среднеквадратичные значения завихренности $\sqrt{\langle \omega^2 \rangle}$, характеризующие циклонические и антициклонические вихри. На рис. 6, 7 показаны полученные путем обработки экспериментальных данных зависимости среднеквадратичных значений положительной и отрицательной завихренностями от частоты вращения установки при заданном токе и от тока при заданной частоте вращения. На тех же рисунках показаны результаты расчета по теоретической модели при той же частоте общего вращения s и значениях параметра $q = \pm I$ [A], $E = 0.02 \text{ c}^{-1}$. Сравнение эксперимента и теории показывает их качественное соответствие. Количественные расхождения являются следствием того, что теоретическая модель не учитывает такие черты реальной ситуации, как наличие нестационарной компоненты течения, взаимодействие вихрей с разными знаками, диссипация на границах между циклонами и антициклонами.

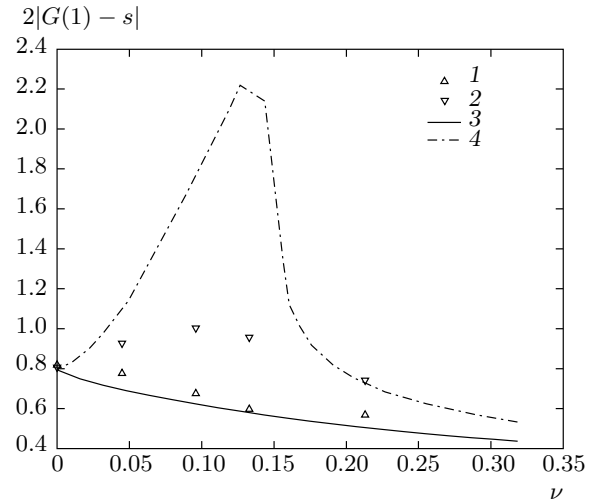


Рис. 6. Среднеквадратичная относительная завихренность одного знака от частоты вращения по данным эксперимента $I = 50 \text{ mA}$ (1 — антициклоническая часть, 2 — циклоническая) и численного расчета, $E = 1/50 \text{ c}^{-1}$, $q = \pm 0.05$ (3 — антициклоническая сила, 4 — циклоническая)

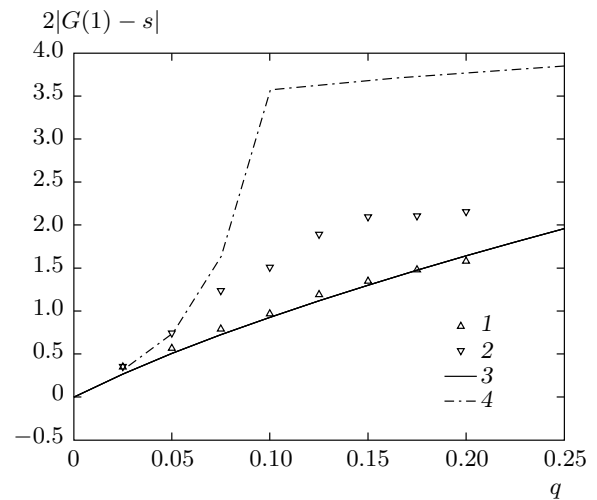


Рис. 7. Среднеквадратичная относительная завихренность одного знака от силы тока по данным эксперимента (1 — антициклоническая часть, 2 — циклоническая) и численного расчета (3 — антициклоническая сила, 4 — циклоническая), $T = 4.7 \text{ s}$, $E = 1/50 \text{ c}^{-1}$

На рис. 8 показаны экспериментальные и рассчитанные по модели Кармана зависимости среднеквадратичной завихренности для областей с циклоническим и антициклоническим вращением при различных значениях величины тока и частоты вра-

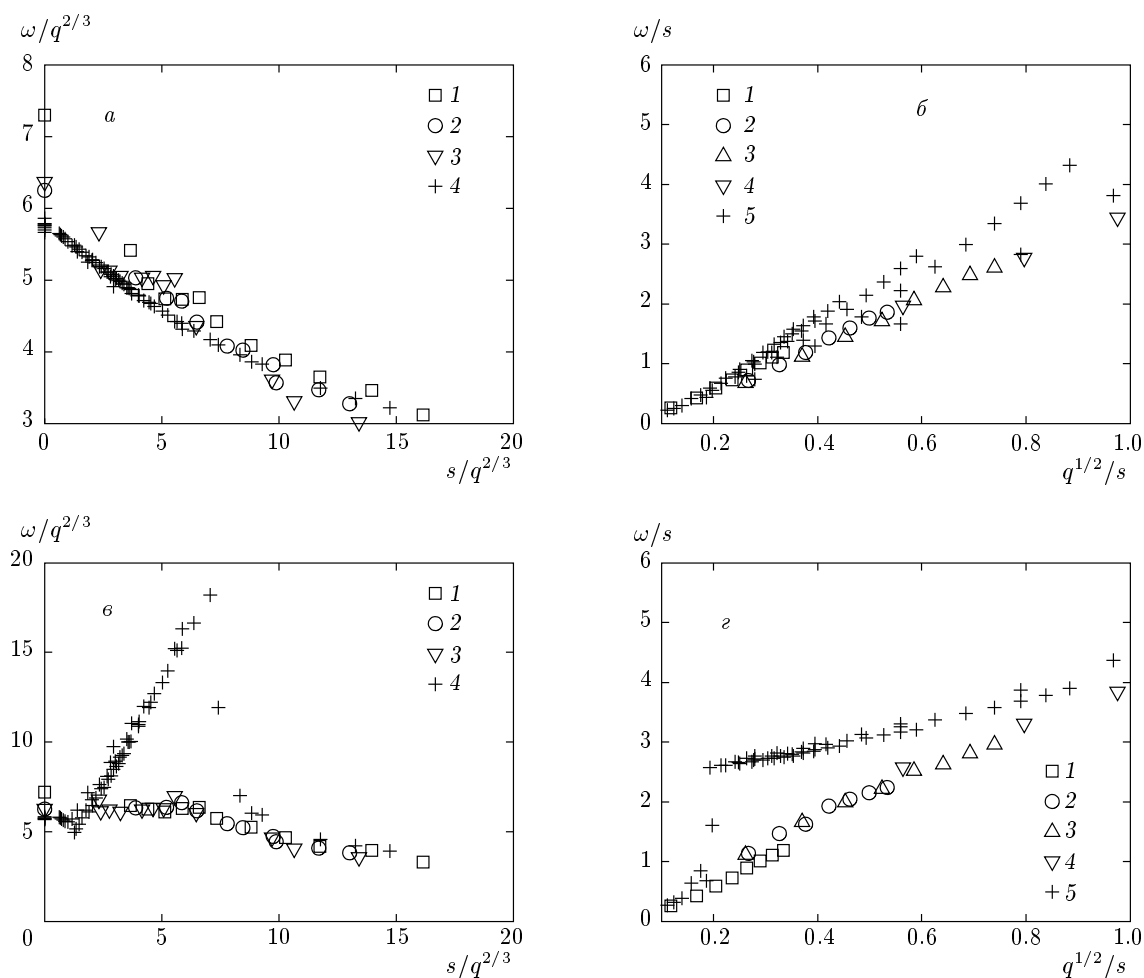


Рис. 8. Масштабированная среднеквадратичная относительная завихренность одного знака по данным экспериментов и численных расчетов: *а, б* — циклоническая часть, *в, г* — антициклоническая; *а, в* — масштабирование вида $\omega/|q|^{2/3}$ от $s/|q|^{2/3}$ для данных полученных при разной величине силы тока: 1 — 25 мА, 2 — 30 мА, 3 — 50 мА, 4 — численный расчет; *б, г* — вида ω/s от $|q|^{1/2}/s$ для данных, полученных при разных периодах вращения, 1 — 4.7 с, 2 — 7.5 с, 3 — 10.4 с, 4 — 22.4 с, 5 — численный расчет

щения, построенные с учетом соотношений подобия, следующих из теоретического описания.

Для чисел Россби $|\omega|/2s < 1$ (рис. 8*а, в*), т. е. в режиме пограничного слоя имеется зависимость от тока и частоты вращения в виде

$$\omega = E^{-1/3}|q|^{2/3}\Omega \left(\frac{E^{1/3}s}{|q|^{2/3}} \right).$$

Графики показывают хорошее согласие эксперимента и теории в данном режиме, который реализуется для антициклонов при $E^{1/3}s/|q|^{2/3} > 0.4$. Для циклонов этот режим существует всюду за исключением области медленного вращения (большие числа Россби), где сказывается нестационарность течения.

Для больших чисел Россби $|\omega|/2s \gtrsim 1$ (рис. 8*б, г*)

более удачным оказывается представление, справедливое в случае, когда вязкость оказывает меньшее влияние на структуру течения:

$$\omega = s\Omega(|q|^{1/2}/s).$$

В данном случае мы видим, что соотношения подобия для экспериментальных данных выполняются при достаточно больших значениях величины $|q|^{1/2}/s$. Теоретические результаты при этом демонстрируют некоторое количественное расхождение с экспериментом, хотя для антициклонов в определенной области выполняются те же соотношения подобия (режим трехмерной циркуляции). Выполнимость тех же соотношений для циклонов связано с сильной нестационарностью течения.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в работе теоретическое исследование вихревого течения в тонких слоях вязкой вращающейся жидкости показало, что в таком течении имеет место сильное различие в поведении циклонических и антициклонических вихревых структур. Подобная асимметрия является следствием нелинейного характера придонного трения, которое определяет структуру пограничного слоя вблизи подстилающей поверхности. Для антициклонических вихрей высота пограничного слоя достигает максимальных значений при числах Россби близких к единице. В этом случае, как показывают расчеты, проведенные на основе модифицированной модели Кармана, режим пограничного слоя оказывается неустойчивым и возникает сильная циркуляция жидкости в вертикальной плоскости.

Результатом анализа модифицированной модели Кармана в квазилинейном приближении являются соотношения между компонентами течения, позволяющие перейти к замкнутому двумерному описанию вихревой компоненты. Можно рассчитывать, что эти соотношения могут быть использованы для параметризации течений с более сложной пространственной структурой. Такое использование предполагает, что в тонких слоях жидкости вертикальная структура течения в точке с фиксированными координатами в горизонтальной плоскости определяется значением поверхностной или усредненной по вертикали завихренности в данной точке. При этом, однако, надо иметь в виду два ограничения. Во-первых, как показано в работе [15], вертикальная структура течения зависит не только от завихренности течения, но и от степени эллиптичности вихрей. Во-вторых, применимость локальных по пространству соотношений явно нарушается вблизи сильных градиентов завихренности, соответствующих вертикальным сдвиговым слоям, вносящим, помимо того, значительный вклад в диссипацию. В настоящей работе проверка применимости кармановской модели для описания многовихревых течений проводилась путем сопоставления с экспериментальными данными.

Теоретические результаты позволяют качественно и частично количественно объяснить поведение циклонических и антициклонических вихрей, наблюдаемых в эксперименте с многовихревыми течениями. Для лучшей количественной интерпретации таких экспериментов необходима разработка модели, учитывающей взаимодействие вихрей разных знаков. Вместе с тем требуется проведение дополни-

тельных лабораторных экспериментов, предусматривающих измерение скорости течения на разных глубинах.

Авторы многим обязаны покойным Ф. В. Должанскому и В. М. Пономареву, внесшим значительный вклад в теоретические и экспериментальные исследования влияния придонного трения на квазидвумерные течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 08-05-00764, 10-05-00457а) и в рамках программы «Нелинейные волны».

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин, УФН **160**, 1 (1990).
2. С. Д. Данилов, Д. Гурарий, УФН **170**, 921 (2000).
3. М. В. Незлин, Е. Н. Снежкин, *Вихри Россби и спиральные структуры*, Наука, Москва (1990).
4. L. M. Polvani, J. C. McWilliams, M. A. Spell et al., *Chaos* **4**, 177 (1994).
5. С. Д. Данилов, В. А. Довженко, Ф. В. Должанский и др., ЖЭТФ **122**, 57 (2002).
6. С. Д. Данилов, В. А. Довженко, И. Г. Якушкин, ЖЭТФ **118**, 483 (2000).
7. L. J. A. van Bokhoven, H. J. H. Clercx, G. J. F. van Heist et al., *Phys. Fluids* **21**, 096601 (2009).
8. В. И. Петвиашвили, Письма в ЖЭТФ **32**, 632 (1980).
9. L. P. Graves, J. C. McWilliams, and M. T. Montgomery, *Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn.* **100**, 151 (2006).
10. G. Peret, A. Stenger, and M. Farge, *Phys. Fluids* **18**, 1 (2006).
11. P. R. Bannon, *JAS* **55**, 1446 (1997).
12. D. Suos, N. Bonnetona, and J. Sommeria, *Phys. Fluids* **16**, 2886 (2004).
13. L. Zavala Sanson and G. J. F. van Heist, *J. Fluid Mech.* **412**, 75 (2000).
14. M. P. Satin, A. W. Cense, R. Verzicco et al., *Phys. Fluids* **13**, 1932 (2001).
15. В. М. Пономарев, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, Изв. РАН, ФАО **44**, 1 (2008).

16. Х. Гринспен, *Теория вращающейся жидкости*, Гидрометеиздат, Ленинград (1975).
17. Т. von Karman, ZAMM **1**, 233 (1921).
18. R. E. Hewitt and M. Al-Azhari, J. Eng. Math. **63**, 259 (2009).
19. P. J. Zandbergen and D. Dijkstra, Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 465 (1987).
20. M. Holodniok, M. Kubicek, and V. Havacek, J. Fluid Mech. **108**, 227 (1981).
21. S. I. Ishida and T. Iwayama, J. Met. Soc. Jpn. **84**, 839 (2006).
22. J. E. Hart, Phys. Fluids **12**, 131 (2000).
23. В. М. Пономарев, А. А. Хапаев, И. Г. Якушкин, ДАН **425**, 1 (2009).
24. R. A. D. Akkermans, A. R. Cieslik, L. P. J. Kamp et al., Phys. Fluids **20**, 116601 (2008).
25. R. C. Foster, J. Fluid Mech. **333**, 97 (1997).
26. В. М. Головизнин, С. А. Карабасов, И. М. Кобринский, Журн. мат. моделирования **15**, 29 (2003).