

ГЕНЕРАЦИЯ АКУСТИЧЕСКОГО СУПЕРКОНТИНУУМА В РЕЖИМЕ САМОРАССЕЯНИЯ ГИПЕРЗВУКА

А. Н. Бугай^{a}, С. В. Сазонов^{b**}*

*Объединенный институт ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия*

*^bРоссийский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 17 марта 2010 г.

Проведено теоретическое исследование нелинейной генерации акустического суперконтинуума в твердом теле при наличии в нем примесных парамагнитных ионов. Показано, что генерация может быть наиболее эффективной при двух определенных значениях несущих частот входных импульсов, лежащих выше линии резонансного спин-фононного поглощения и определяемых соответственно временной и пространственной дисперсиями. Спектр же генерируемого суперконтинуума лежит значительно ниже линии резонансного поглощения. В одночастотном режиме генерация суперконтинуума сопровождается смещением спектра входного импульса, главным образом, в красную область. В двухчастотном же режиме возможно явление перекрестного рассеяния, когда импульс более высокой частоты рассеивается на мощном суперконтинууме, генерируемом импульсом с другой, более низкой, несущей частотой. В результате спектр высокочастотного импульса испытывает сильную модуляцию и уширение как в красную, так и в фиолетовую области. Как в одночастотном, так и в двухчастотном режимах эффективность генерации суперконтинуума способна достигать порядка одного процента.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейная когерентная оптика и нелинейная физическая акустика вот уже несколько десятилетий развиваются в параллельном режиме [1]. Это касается как резонансных, так и нерезонансных явлений. К первым можно отнести самоиндуцированную прозрачность оптической (СИП) [2, 3] и акустической (АСИП) [4–6] природы. Во втором случае следует выделить процессы обращения волнового фронта, вынужденного комбинационного рассеяния, и т. д. [1]. Представляет также интерес формирование электромагнитных и акустических солитонов в квадратично-нелинейных средах [7, 8], включая режимы генерации высокочастотными импульсами излучения значительно более низких частот за счет спонтанного параметрического рассеяния [9, 10]. В этой связи отметим, что в последнее время выходит большое количество работ по оптическим методам генерации терагерцевого излучения [11–20].

Среди них заслуживает внимания метод оптического выпрямления в квадратично-нелинейных средах. В этом случае генерация терагерцевых сигналов зачастую сопровождается смещением несущей частоты входного оптического импульса в «красную» область [14–17]. Это происходит вследствие рассеяния оптического импульса на порождаемом им же терагерцевом сигнале. Поэтому здесь можно говорить о саморассеянии оптического импульса. Спектр генерируемого таким образом терагерцевого излучения зачастую обладает свойствами суперконтинуума, так как из-за большой ширины в нем невозможно выделить центральную частоту [20].

Оптический суперконтинуум находит широкие приложения в абсорбционной и пикосекундной спектроскопии, импульсных лазерах с перестраиваемой частотой [21, 22]. Отметим, что вопросам генерации оптического суперконтинуума посвящен целый ряд работ (см., например, обзор [23] и цитированную в нем литературу). Этому нельзя сказать об акустическом суперконтинууме. На сегодняшний день практически отсутствуют теоретические и экспериментальные работы в данном направлении. Акусти-

*E-mail: bugay_aleksandr@mail.ru

**E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

ческий суперконтинуум, по-видимому, может найти не меньше приложений, чем оптический. Это касается, например, создания фоновых мазеров с перестраиваемой частотой. Кроме того может получить развитие акустическая абсорбционная спектроскопия. Сравнивая спектры акустического суперконтинуума на входе в исследуемую среду и на выходе из нее, можно определять частоты резонансного акустического поглощения различными центрами: парамагнитными примесями [24–26], ядерными спинами [27, 28], дислокациями [29, 30], туннельными переходами [31] и т. д. Эти приложения могли бы оказаться особенно эффективными там, где оптико-терагерцевая спектроскопия оказывается малоэффективной. В этой связи следует говорить о спектроскопии проводящих сред, например, металлов.

Проводя и далее параллель между оптическими и акустическими эффектами, следует вести поиск возможностей генерации акустического суперконтинуума и саморассеяния на нем исходного акустического импульса. При такой генерации, очевидно, спектр предполагаемого суперконтинуума должен лежать в области частот, которые на один-два порядка ниже несущей частоты входного импульса. Поэтому далее исследуемый суперконтинуум будем называть низкочастотным, а исходный импульс — высокочастотным.

Возможность излучения высокочастотным фононом низкочастотного за счет квадратичной акустической нелинейности проще всего проанализировать на основе законов сохранения энергии и импульса при элементарных актах фонон-фононных взаимодействий. Пусть высокочастотный фонон характеризуется частотой $\omega_{\mathbf{k}}$ и волновым вектором \mathbf{k} , а низкочастотный соответственно Ω и \mathbf{q} . Тогда закон сохранения энергии-импульса при элементарном акте излучения имеет вид $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \Omega$, где $\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$ и $\mathbf{k} - \mathbf{q}$ — соответственно частота и волновое число высокочастотного фонона после излучения им низкочастотного. Поскольку $q \ll k$ и $\Omega \ll \omega_{\mathbf{k}}$, $\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \partial\omega/\partial\mathbf{k} = \omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_g(\omega) = \omega_{\mathbf{k}} - qv_g(\omega) \cos\theta$, где $\mathbf{v}_g(\omega) = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ — групповая скорость входного акустического импульса, θ — угол между направлениями распространения высокочастотного волнового пакета и излучаемых низкочастотных фононов. Подставляя выражение для $\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$ в выражение для закона сохранения энергии, получим

$$\cos\theta = \frac{v_{ph}(\Omega)}{v_g(\omega)}, \quad (1)$$

где $v_{ph}(\Omega) = \Omega/q$ — величина фазовой скорости низкочастотного звука.

Таким образом, условие генерации низкочастотного звука высокочастотным имеет черенковский характер: $v_g(\omega) \geq v_{ph}(\Omega)$. Отсюда видно, что среда должна обладать акустической дисперсией. Ниже мы будем говорить о продольных упругих волнах в кристаллах. Акустическая дисперсия в кристаллах может быть обусловлена их дискретной структурой. В этом случае она носит пространственный характер и способна проявить себя при условии достаточной близости длины волны акустического импульса к расстоянию между ближайшими узлами кристаллической решетки. Это соответствует относительной близости значения волнового числа k к границе первой зоны Бриллюэна. Вдали от данной границы при малых значениях k акустическая пространственная дисперсия практически отсутствует, а потому в данной низкочастотной области $v_g = v_{ph}$. С приближением к границе первой зоны Бриллюэна величина групповой скорости уменьшается, обращаясь в нуль на самой границе. Поэтому в общем случае $v_g(\omega) < v_{ph}(\Omega)$, что вступает в противоречие с (1). Таким образом, пространственная дисперсия, обусловленная дискретной структурой кристалла, только препятствует реализации процесса саморассеяния.

Дополнительную акустическую дисперсию может вызвать взаимодействие поля упругого импульса с парамагнитными ионами, внедренными в кристалл, помещенный во внешнее магнитное поле \mathbf{B} (спин-фононное взаимодействие) [4, 24–26, 32–34]. Если частота импульса находится относительно недалеко от частот зеemanовских расщеплений спектральных линий парамагнитных примесей, существенную роль играет временная дисперсия, обусловленная спин-фононным взаимодействием. Знак такой дисперсии определяется знаком отстройки несущей частоты ω входного импульса от характерной резонансной частоты ω_0 зеemanовского расщепления квантовых уровней парамагнитных ионов. Поэтому есть основания надеяться, что спин-фононное взаимодействие при определенных условиях способно привести к выполнению неравенства $v_g(\omega) \geq v_{ph}(\Omega)$, чтобы удовлетворить (1).

В коллинеарном режиме ($\theta = 0$) неравенство (1) переходит в равенство

$$v_g(\omega) = v_{ph}(\Omega), \quad (2)$$

называемое в теории нелинейных волн условием резонанса Захарова–Бенни (РЗБ) [35–37].

Настоящая работа посвящена исследованию возможности реализации в парамагнитном кристалле процесса саморассеяния высокочастотного

($\omega \sim 10^{11}-10^{12} \text{ с}^{-1}$) гиперзвука, сопровождаемого генерацией относительно низкочастотного акустического суперконтинуума. При этом ограничимся рассмотрением коллинеарного режима, требующего выполнения условия (2).

Статья построена следующим образом. В разд. 2 содержится постановка задачи и на основе предложенной физической модели выводится самосогласованная система материальных и волнового уравнений, описывающая процесс акустического саморассеяния. В разд. 3 с помощью исключения материальных переменных выводятся системы нелинейных волновых уравнений, описывающие взаимодействие высоко- и низкочастотного гиперзвуков. Здесь же определяются условия наиболее эффективной генерации низкочастотного суперконтинуума на всем интервале возможных несущих частот входных импульсов. В разд. 4 мы исключаем материальные переменные, выразив их через динамические параметры акустического поля. Таким образом, дальнейшее исследование сводится к анализу нелинейной системы волновых уравнений, описывающих распространение высокочастотного импульса и порождаемого им низкочастотного суперконтинуума. Раздел 5 содержит результаты аналитического и численного анализов нелинейных систем волновых уравнений, полученных в разд. 4. На основе полученных решений проведен анализ особенностей генерации суперконтинуума на начальных и асимптотических стадиях. В Заключение на основе полученных результатов подводятся основные итоги работы и намечаются возможные перспективные исследования в данном направлении.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть продольный акустический импульс с несущей частотой ω распространяется вдоль оси x симметрии четвертого порядка кубического кристалла, перпендикулярно \mathbf{B} . При этом магнитное поле параллельно другой оси z симметрии четвертого порядка. Гамильтониан акустического поля запишем в виде [38]

$$H_a = \frac{1}{2} \int \left(\frac{p_x^2}{\rho_m} + c_{11} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} c_{11} \Gamma \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^3 - \frac{l^2}{12} c_{11} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\mathbf{r}, \quad (3)$$

где ρ_m — средняя плотность среды, p_x и u_x — соответственно декартовы компоненты плотности им-

пульса и вектора локальных смещений кристалла, c_{11} — линейный модуль упругости, соответствующий объемной деформации, c_{111} — составляющая тензора нелинейного модуля упругости третьего порядка, l — постоянная кристаллической решетки в направлении оси x , $\Gamma = -3/2 (1 + c_{111}/3c_{11})$ — постоянная Грюнайзена; интегрирование в формуле (3) осуществляется по всему объему среды.

Хорошо известно, что наиболее сильное взаимодействие с колебаниями кристаллической решетки испытывают парамагнитные ионы, обладающие эффективным спином $S = 1$ [4, 24, 25]. В качестве примеров можно взять ионы Fe^{2+} или Ni^{2+} [4]. Ниже будем считать, что кристалл допирован именно такими ионами.

Распространяясь в кристалле, упругий импульс взаимодействует с примесными эффективными спинами за счет механизма Ван Флека [24–26]. Согласно данному механизму, акустическая волна, распространяясь в кристалле, вызывает в нем локальные деформации, которые модулируют градиенты внутрикристаллического электрического поля. Последние, в свою очередь, вызывают электрические квадрупольные переходы между квантовыми зеемановскими подуровнями парамагнитных примесей.

Дополним (3) гамильтоновыми операторами зеемановского \hat{H}_Z и спин-фононного \hat{V} взаимодействий для выделенного иона [4]:

$$\hat{H}_Z = \frac{1}{2} \hbar \tilde{\omega}_0 \hat{S}_z, \quad (4)$$

$$\hat{V} = \frac{3}{2} G_{11} \hat{S}_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (5)$$

где \hbar — постоянная Планка, $\tilde{\omega}_0 = 2g\mu_B B_0/\hbar$ — частота расщепления зеемановского триплета рассматриваемого парамагнитного иона, g — фактор Ланде, μ_B — электронный магнетон Бора, G_{11} — компонента тензора спин-фононного взаимодействия, связывающая эффективные спины с продольным акустическим полем, $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ — трехрядные спиновые матрицы [25].

Ниже для исследования самосогласованной динамики акустического поля и эффективных спинов используем полуклассический подход, согласно которому поведение эффективных спинов описывается уравнением для соответствующей матрицы плотности $\hat{\rho}$:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_Z + \hat{V}, \hat{\rho}], \quad (6)$$

а распространение акустических импульсов — классическими уравнениями Гамильтона для сплошной среды [39]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{\delta}{\delta u_x} \left(H_a + \langle \hat{V} \rangle \right), \\ \frac{\partial p_x}{\partial t} &= -\frac{\delta}{\delta u_x} \left(H_a + \langle \hat{V} \rangle \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\langle \hat{V} \rangle \equiv Sp(\hat{\rho}\hat{V})$ — квантовое среднее гамильтониана спин-фононного взаимодействия.

Из уравнений (4)–(6) приходим к материальным уравнениям типа уравнений Блоха:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\tilde{\omega}_0 V - \frac{U}{T_2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \tilde{\omega}_0 U - \frac{V}{T_2} - \kappa \varepsilon W, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \kappa \varepsilon V, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} U &\equiv \frac{\rho_{31} + \rho_{13}}{2}, \quad V \equiv \frac{\rho_{13} - \rho_{31}}{2i}, \\ W &\equiv \frac{\rho_{33} - \rho_{11}}{2}, \quad \kappa = \frac{3G_{11}}{2\hbar}, \end{aligned}$$

$\varepsilon = \partial u_x / \partial x$ — относительная продольная деформация, создаваемая акустическим импульсом.

В первые два уравнения (8) стандартным образом [40] введены феноменологические слагаемые, учитывающие фазовую релаксацию, характеризуемую временем T_2 . В последнем уравнении (8) пренебрежено энергетической релаксацией, определяемой временем T_1 , так как обычно $T_1 \gg T_2, \tau_p$, где τ_p — длительность акустического импульса.

Уравнения (8) описывают динамику двухуровневой системы в поле импульса деформации. Обе компоненты акустического импульса в рассматриваемой геометрии вызывают квантовый переход $1 \leftrightarrow 3$ в системе спиновых зеэмановских подуровней. Средний уровень при этом не вовлекается во взаимодействие с полем. Заметим, что это положение справедливо, пока не учитываются процессы энергетической релаксации.

Используя выражения (3), (5) и (7), получим волновое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} &= -a^2 \Gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varepsilon^2) + \\ &+ \frac{l^2}{12} a^2 \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^4} + \frac{3nG_{11}}{2\rho_m} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где n — концентрация парамагнитных ионов, скорость продольного звука в их отсутствие определяется выражением

$$a = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \quad \bar{U} = \int_{-\infty}^{\infty} U f(\Delta) d\Delta,$$

$f(\Delta)$ — контур неоднородного уширения, $\Delta = \tilde{\omega}_0 - \omega_0$ — отстройка частоты зеэмановского перехода выделенного иона от центральной частоты ω_0 контура.

Правая часть уравнения (9) содержит слагаемые, описывающие соответственно квадратичную нелинейность, пространственную акустическую дисперсию и спин-фононное взаимодействие. Нелинейность и пространственная дисперсия здесь представлены в виде малых поправок, соответственно, к линейному закону Гука и к модели сплошной среды [41].

Интенсивность спин-фононного взаимодействия, описываемого третьим слагаемым в правой части уравнения (9), определяется безразмерным параметром $\eta = -9G_{11}^2 n W_{\infty} / (16\hbar\omega_0 \rho_m a^2)$ [39], где W_{∞} — разность населенностей до импульсного воздействия, формально соответствующая $t = -\infty$. В состоянии термодинамического равновесия

$$W_{\infty} = -\frac{1}{2} \text{th} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T} \right),$$

где k_B — постоянная Больцмана. Взяв $G_{11} \sim 10^{-13}$ эрг, $n \sim 10^{19}$ см $^{-3}$, $\omega_0 \sim 10^{11}$ с $^{-1}$, $\rho_m \sim 1$ г/см 3 , $a \sim 10^6$ см/с, $W_{\infty} \sim 0.1$ [4, 24–26], найдем $\eta \sim 10^{-4} \ll 1$.

Таким образом, каждое слагаемое в правой части уравнения (9) много меньше каждого из двух слагаемых в левой части. Поэтому можно использовать приближение медленноменяющегося профиля (ММП) [37, 42]. В соответствии с этим приближением профиль импульса медленно меняется в системе отсчета, движущейся в направлении оси x со скоростью a . Тогда запишем $\varepsilon = \varepsilon(\tilde{\tau}, \zeta)$, $U = U(\tilde{\tau}, \zeta)$, где $\tilde{\tau} = t - x/a$ — «локальное время», $\zeta = \nu x$ — «медленная координата», малый безразмерный параметр ν учитывает влияние слагаемых в правой части (9). Переходя к новым независимым переменным, запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} + \nu \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\tau}^2} - \frac{2\nu}{a} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \tilde{\tau}}. \end{aligned}$$

В последнем выражении мы пренебрегли слагаемым, пропорциональным ν^2 . В соответствии с этим в правой части (10) будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\tau}^2}.$$

Тогда после интегрирования по $\tilde{\tau}$ с учетом нулевых значений поля и его производных на бесконечности

и возвращения к исходным независимым переменным приведем уравнение (9) к виду

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\Gamma}{2a} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial t} + \frac{1}{6a\omega_D^2} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t^3} + \frac{3nG_{11}}{4\rho_m a^3} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t}, \quad (10)$$

где $\omega_D = 2a/l$ — дебаевская частота.

Дальнейшее исследование основано на анализе системы (8), (10).

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ГЕНЕРАЦИИ СУПЕРКОНТИНУУМА

Из системы (8) находим, что

$$\bar{U} = \kappa \int_0^\infty e^{-t'/T_2} \varepsilon(x, t-t') \sin \omega_0 t' \times \int_{-\infty}^\infty f(\Delta) W(\Delta, x, t-t') \cos \Delta t' d\Delta. \quad (11)$$

Рассмотрим вначале ситуацию, когда несущая частота ω входного импульса лежит вне контура линии резонансного поглощения, т. е. $|\omega - \omega_0| > 1/T_2^*$, $1/T_2$, где T_2^* — время обратимой фазовой релаксации. Поэтому взаимодействие импульса с парамагнитными примесями можно считать относительно слабым. В этом случае соответствующие вклады в дисперсию и нелинейность носят характер разложений по относительно малым параметрам. Как следует из уравнений (8), изменение разности населенностей $\Delta W \sim F^2 \sim \varepsilon^2$. Тогда из первого уравнения следует, что $\Delta U \sim \varepsilon^3$. Отсюда и из уравнения (10) вытекает, что минимальная степень нелинейности, обусловленная спин-фононным взаимодействием, равна трем. Нелинейность же, привносимая параметром Грюнайзена, имеет квадратичный характер. Здесь ограничимся учетом только квадратичной нелинейности. Поэтому, пренебрегая изменением населенностей зеемановских подуровней, положим $W = W_\infty$. Кроме того, будем считать контур неоднородного уширения лоренцевым:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\pi} \frac{T_2^*}{1 + (T_2^* \Delta)^2}. \quad (12)$$

Тогда отсюда и из уравнения (11) найдем

$$\bar{U} = \frac{3G_{11}}{2\hbar} W_\infty \int_0^\infty G(t') \varepsilon(x, t-t') dt', \quad (13)$$

где функция Грина

$$G(t') = \exp\left(-\frac{t'}{\tau_2}\right) \sin \omega_0 t', \quad (14)$$

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_2^*}.$$

Подставляя выражение (14) в (10), получим нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\Gamma}{a} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{6a\omega_D^2} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t^3} - 2\eta \frac{\omega_0}{a} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty G(t') \varepsilon(x, t-t') dt'. \quad (15)$$

Представим относительную деформацию акустического поля в виде суммы низкочастотной ε_0 и высокочастотной квазимонохроматической составляющих:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\psi e^{i(\omega t - kx)} + \text{c.c.}). \quad (16)$$

Здесь высокочастотная компонента характеризуется медленноменяющейся огибающей $\psi = \psi(x, t)$.

Тогда (15) расщепится на два связанных волновых уравнения. Пренебрегая относительно быстро осциллирующими слагаемыми и третьей производной от ψ по t , из формул (15), (16) получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\omega^2}{2\omega_D^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = i \left(k - \frac{\omega}{a} - \frac{\omega^3}{6a\omega_D^2}\right) \psi + i \frac{\omega}{2a\omega_D^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - i\beta \varepsilon_0 \psi - 2\eta \frac{\omega_0}{a} \left(i\omega + \frac{\partial}{\partial t}\right) \int_0^\infty G(t') e^{-i\omega t'} \psi(x, t-t') dt', \quad (17)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} = -g \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0^2 + 2|\psi|^2\right) - \sigma \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty G(t') \varepsilon_0(x, t-t') dt'. \quad (18)$$

Здесь $\beta = \Gamma\omega/a$, $g = \Gamma/2a$, $\sigma = 2\eta\omega_0/a$.

В нелинейном слагаемом (17) мы оставили только производную от быстроосциллирующей мнимой экспоненты, так как в силу квазимонохроматичности входного импульса $(\omega\tau_p) \gg 1$. Кроме того, в уравнении (18) для низкочастотной компоненты мы пренебрегли пространственной дисперсией.

Как было сказано выше, несущая частота входного импульса лежит вне контура линии резонансного поглощения гиперзвука парамагнитными ионами. Поэтому ниже будем считать также выполненным условие $|\omega - \omega_0| \tau_p \gg 1$. При этом частоты ω и ω_0 не обязательно должны значительно отличаться друг от друга, но важным остается условие $|\omega - \omega_0| > 1/\tau_2$ нерезонансного характера спин-фононного взаимодействия. Тогда, беря многократно по частям интеграл в формуле (17) при учете (14), придем к разложению

$$\int_0^\infty G(t') e^{-i\omega t'} \psi(x, t-t') dt' = \omega_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega/\tau_2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \psi - \frac{2i\omega\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \omega_0 \frac{3\omega^2 + \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \dots \quad (19)$$

Здесь, приняв во внимание, что $1/\tau_2 \ll \omega, \omega_0$, мы оставили диссипативное слагаемое только в первом члене разложения. Данное разложение можно рассматривать как обобщение разложения Криспа [43] на случай, когда в материальных уравнениях не используется приближение вращающейся волны. После подстановки выражения (19) в (17) преобразуем систему (17), (18) к виду

$$i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha \psi \right) = -\frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \beta \varepsilon_0 \psi, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \tau} = -g \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon_0^2 + 2|\psi|^2 \right) - \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\int_0^\infty G(\tau') \varepsilon_0(x, \tau - \tau') d\tau' - \mu \varepsilon_0 \right], \quad (21)$$

где $\tau = t - x/v_g$, дисперсионное уравнение для высокочастотной компоненты имеет вид

$$k = \frac{\omega}{a} \left(1 + \frac{\omega^2}{6\omega_D^2} + 2\eta \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right),$$

ее линейная групповая скорость v_g определяется соотношением

$$\frac{1}{v_g} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{v_{gs}} + 2\eta \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 + \omega^2)}{a (\omega^2 - \omega_0^2)^2}, \quad (22)$$

v_{gs} — часть групповой скорости, в которую вносит вклад пространственная дисперсия, определяемая выражением

$$\frac{1}{v_{gs}} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\omega^2}{2\omega_D^2} \right),$$

второе слагаемое в правой части (22) обусловлено присутствием парамагнитных примесей,

$$\delta = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{v_g}, \quad \frac{1}{a_0} = \frac{1}{a} (1 + 2\eta),$$

a_0 — скорость звука на нулевой частоте в присутствии парамагнитных примесей,

$$\alpha = \frac{4\eta}{a\tau_2} \frac{\omega_0^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} = 2\alpha_r \frac{\omega^2}{\tau_2 T_2^* (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

— коэффициент затухания высокочастотного импульса, обусловленный спин-фононным взаимодействием, $\alpha_r = 2\eta\omega_0^2 T_2^*/a$ — коэффициент резонансного поглощения гиперзвука парамагнитными ионами [4],

$$k_2 = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = \frac{\omega}{a\omega_D^2} \left[1 - 8\Lambda \frac{\omega_0^4 (\omega^2 + 3\omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^3} \right]$$

— параметр дисперсии групповой скорости (ДГС) высокочастотного сигнала

$$\mu = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \tau_2^{-2}}, \quad \Lambda = \eta \frac{\omega_D^2}{2\omega_0^2}.$$

Параметр Λ характеризует отношение временной дисперсии, вызванной спин-фононным взаимодействием, к пространственной, — обусловленной дискретной структурой кристалла. При $\Lambda > 1$ доминирует временная дисперсия, при $\Lambda < 1$ — пространственная (см. ниже).

Слагаемые, содержащиеся в квадратных скобках (21), описывают влияние дисперсии и диссипации на низкочастотный сигнал.

Из выражений (20), (21) следует, что высокочастотный импульс способен за счет нелинейности генерировать в кристалле низкочастотный сигнал. В то же время, если на кристалл подавать низкочастотный импульс, то генерации высокочастотного сигнала не произойдет.

Выясним, при каких условиях в нашем случае возможна эффективная генерация низкочастотного излучения. Для этого необходимо выполнение равенства (1). Фазовую скорость $v_{ph}(\Omega)$ низкочастотного сигнала найдем, линеаризуя уравнение (21) и полагая $\varepsilon_0 \sim \exp[i(\Omega t - qx)]$. Тогда волновое число q представится в виде $q = q_R - iq_I$, где коэффициент затухания

$$q_I = 4\eta \frac{\omega_0^2}{a\tau_2} \frac{\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 2\tau_2^{-2} (\omega_0^2 + \Omega^2)}, \quad (23)$$

а действительная часть

$$q_R = \frac{\Omega}{a} \left[1 + 2\eta + 2\eta\Omega^2 \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 2\tau_2^{-2}(\omega_0^2 + \Omega^2)} \right].$$

Отсюда

$$\frac{1}{v_{ph}(\Omega)} = \frac{q_R}{\Omega} = \frac{1}{a} \left[1 + 2\eta + 2\eta\Omega^2 \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 2\tau_2^{-2}(\omega_0^2 + \Omega^2)} \right]. \quad (24)$$

Приравнивая друг к другу правые части (22) и (24), запишем в пренебрежении слагаемыми, содержащими время релаксации τ_2 , условие РЗБ в виде

$$\Omega^2 = \omega_0^2 \omega^2 \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 8\Lambda\omega_0^2(3\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 8\Lambda\omega_0^4(\omega_0^2 + \omega^2)}. \quad (25)$$

Отсюда следует, во-первых, что частота низкочастотного сигнала удовлетворяет условию $\Omega < \omega_0$. Кроме того, из условия неотрицательности правой части (25) имеем ограничения на несущую частоту входного импульса:

$$\omega \leq \omega_1 \equiv \omega_0 \left[1 + 4\Lambda - 4\sqrt{\Lambda(\Lambda - 1)} \right]^{1/2} \quad (26)$$

или

$$\omega \geq \omega_2 \equiv \omega_0 \left[1 + 4\Lambda + 4\sqrt{\Lambda(\Lambda - 1)} \right]^{1/2}. \quad (27)$$

Знаки равенства в (26) и (27) соответствуют $\Omega = 0$ и $\delta = 0$ (см. (21)). Условие РЗБ (2), как следует из его вывода, имеет смысл при $\omega \gg \Omega$. Поэтому несущая частота входного импульса должна быть либо чуть меньше ω_1 , либо чуть больше ω_2 . Как следует из выражений (26) и (27), разделенные интервалом частоты ω_1 и ω_2 превышают значение ω_0 . Таким образом, характерные частоты входного и генерируемого сигналов лежат по разные стороны от линии резонансного поглощения гиперзвука.

Нетрудно видеть, что параметр ДГС удовлетворяет неравенствам $k_2(\omega_1) < 0$, $k_2(\omega_2) > 0$. Знак ДГС, как будет видно ниже, играет существенную роль в динамике высоко- и низкочастотных составляющих акустического импульса.

Условием существования двух характерных частот ω_1 и ω_2 должно быть доминирование временной дисперсии над пространственной:

$$\Lambda = \eta \frac{\omega_D^2}{2\omega_0^2} > 1. \quad (28)$$

Во Введении отмечалось, что пространственная дисперсия препятствует процессу генерации низкочастотного звука высокочастотным. Неравенство (1)

как раз и показывает, насколько сильным должно быть спин-фононное взаимодействие, чтобы подавить данное препятствование. Если $\Lambda < 1$, то расстройка скоростей δ всегда отлична от нуля. При значительном доминировании пространственной дисперсии ($\Lambda \rightarrow 0$), как следует из (25), $\Omega \rightarrow \omega_0$, т. е. генерируемая волна попадает в область сильного резонансного поглощения. И так, при $\Lambda < 1$ генерация низкочастотного звука становится неэффективной. С увеличением параметра Λ при $\Lambda > 1$ интервал между частотами также растет. При этом ω_1 приближается к линии резонансного поглощения, а ω_2 , напротив, удаляется от нее. При значительном доминировании временной дисперсии ($\Lambda \gg 1$) из уравнений (26) и (27) имеем

$$\omega_1 \approx \sqrt{3}\omega_0 \approx 1.73\omega_0, \quad \omega_2 \approx \sqrt{8\Lambda}\omega_0 = 2\sqrt{\eta}\omega_D. \quad (29)$$

Из формул (26)–(28) следует, что выполнение условий эффективной генерации существенно зависит от значения частоты ω_0 , которая, в свою очередь, определяется величиной внешнего магнитного поля. Варьируя значение B можно изменять величину ω_0 в широких пределах. Заметим, что в соответствующих оптических экспериментах такая возможность отсутствует.

Как отмечалось выше, $\Omega < \omega_0$. Пусть теперь несущая частота входного импульса настолько близка к ω_1 или ω_2 , что выполняется условие $\Omega \ll \omega_0$. В этом случае влияние дисперсии и поглощения на генерируемый сигнал является слабым. Тогда в подынтегральном выражении уравнения (21) справедливо разложение

$$\varepsilon_0(x, \tau - \tau') = \varepsilon_0(x, \tau) - \tau' \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \tau} + \frac{\tau'^2}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial \tau^2} - \dots$$

В результате уравнение (21) приобретает вид

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \tau} = -g \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon_0^2 + 2|\psi|^2 \right) + \gamma \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial \tau^2} + b \frac{\partial^3 \varepsilon_0}{\partial \tau^3}, \quad (30)$$

где $\gamma = 4\eta / (a\tau_2\omega_0^2)$, $b = 2\eta / (a\omega_0^2)$.

Коль скоро есть две возможные несущие частоты, при которых выполняется условие РЗБ, ниже исследуем возможность двухчастотной генерации акустического суперконтинуума. В этом случае на кристалл одновременно подаются два акустических импульса с огибающими $\psi_1(x, t)$, $\psi_2(x, t)$ и несущими частотами ω_1 и ω_2 (см. (26), (27)).

Согласно сказанному, обобщим представление (16) следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\psi_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + \psi_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} + \text{с.с.}). \quad (31)$$

Выполнив далее процедуру, аналогичную проделанной при выводе системы (20), (30), приходим к системе уравнений

$$i \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \alpha_1 \psi_1 \right) = -\frac{k_2^{(1)}}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} + \beta_1 \varepsilon_0 \psi_1, \quad (32)$$

$$i \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \alpha_2 \psi_2 \right) = -\frac{k_2^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \tau^2} + \beta_2 \varepsilon_0 \psi_2, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} = -2g \frac{\partial}{\partial \tau} \left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \right) + \gamma \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial \tau^2} + b \frac{\partial^3 \varepsilon_0}{\partial \tau^3}. \quad (34)$$

Здесь группы параметров α_1 , $k_2^{(1)}$, β_1 и α_2 , $k_2^{(2)}$, β_2 определяются выражениями для α , k_2 , β с заменами в них соответственно $\omega \rightarrow \omega_1$ и $\omega \rightarrow \omega_2$.

Пусть теперь несущая частота входного акустического импульса лежит внутри контура его поглощения парамагнитными ионами, что соответствует резонансному спин-фононному взаимодействию. В этом случае распространение импульса при выполнении определенных пороговых условий должно происходить в солитонном режиме АСИП [4–6]. Как известно, в данном режиме групповая скорость импульса v_g значительно уменьшается из-за временных затрат на сильное возбуждение резонансных примесей. Данное обстоятельство еще дальше уводит от выполнения условия (2). Поэтому здесь не приходится говорить о сколь-нибудь эффективной генерации акустического суперконтинуума. Проведенный нами формальный анализ подтверждает это положение.

Заметим, что для аналогичной оптической задачи, которая решалась в работе [44], данный вывод несправедлив. Вызвано это тем, что линейная групповая скорость в диапазоне оптических частот для различных диэлектриков заметно превышает линейную фазовую скорость в терагерцевом диапазоне. Данное обстоятельство связано с тем, что в терагерцевой области частот дополнительный вклад в показатель преломления вносят колебательные моды молекул в узлах кристаллических решеток. В то же время излучение оптического диапазона нечувствительно к данным модам. Поэтому сильное оптическое возбуждение резонансных примесей приводит к незначительному изменению терагерцевого показателя преломления. В то же время групповая скорость оптического импульса замедляется и возникает принципиальная возможность удовлетворить

условию (2). В рассмотренном же здесь случае на скорости распространения как низко-, так и высокочастотной компонент оказывают влияние парамагнитные ионы и пространственная дисперсия. Оба фактора сильнее сказываются на высокочастотной компоненте, приводя к ее большему замедлению. Таким образом, в условиях, когда несущая частота гиперзвукового импульса лежит внутри контура его резонансного поглощения парамагнитными примесями, генерация низкочастотного акустического суперконтинуума невозможна.

В следующем разделе будут проанализированы решения, полученные на основе уравнений (20), (30), а также (32)–(34).

4. ОДНО- И ДВУХЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМЫ ГЕНЕРАЦИИ СУПЕРКОНТИНУУМА

Вначале приведем возможные числовые значения некоторых важных параметров. В качестве конкретного примера рассмотрим кубический кристалл MgO, содержащий примеси парамагнитных ионов Fe^{2+} [4]. Взяв $\omega_0 \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$, $G_{11} = 1.5 \cdot 10^{-13} \text{ эрг}$, $n = 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $\rho_m = 3.85 \text{ г/см}^3$ [4], $T = 0.1 \text{ К}$, $T_2^* = 3 \cdot 10^{-9} \text{ с} \ll T_2 = 12 \cdot 10^{-9} \text{ с}$, $a = 9.05 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ [8], найдем $\eta = 2.0 \cdot 10^{-4}$, а коэффициент резонансного поглощения $\alpha_r \approx 5.3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. Воспользовавшись данными работы [8], найдем в пересчете на наши обозначения $l = 2.1 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Отсюда $\omega_D = 8.57 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$, $\Lambda = 18.6$. Таким образом, условие (28) выполнено. Из выражений (26), (27) имеем $\omega_1 = 1.73\omega_0 = 3.46 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = 12.2\omega_0 = 2.44 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$. Для соответствующих коэффициентов затухания высокочастотной компоненты и ДГС находим значения $\alpha(\omega_1) = 0.28 \text{ см}^{-1}$, $\alpha(\omega_2) = 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$, $k_2(\omega_1) = -2.73 \cdot 10^{-21} \text{ c}^2/\text{см}$, $k_2(\omega_2) = +7.34 \cdot 10^{-22} \text{ c}^2/\text{см}$. Полагая в обоих случаях $\tau_p = 0.1 \text{ нс}$, будем иметь для длин поглощения $l_{abs} = 1/\alpha$ и дисперсионных длин $l_d = 2\tau_p^2/|k_2|$ высокочастотной компоненты $l_{abs}(\omega_1) = 3.61 \text{ см}$, $l_d(\omega_1) = 3.66 \text{ см}$, $l_{abs}(\omega_2) \approx 3.88 \cdot 10^2 \text{ см}$, $l_d(\omega_2) = 13.6 \text{ см}$. Для коэффициентов затухания и дисперсии низкочастотной компоненты в обоих случаях имеем $\gamma \approx 9.4 \cdot 10^{-24} \text{ c}^2/\text{см}$, $b = 1.1 \cdot 10^{-32} \text{ c}^3/\text{см}$. Отсюда и из уравнения (30) для абсорбционной и дисперсионной длин низкочастотной составляющей по порядку величины имеем соответственно $l_{abs}^{(0)} \sim \tau_p^2/\gamma \sim 10^3 \text{ см}$, $l_d^{(0)} \sim \tau_p^3/b \sim 10^2 \text{ см}$.

Теперь проведем простое аналитическое исследование системы (20), (30). Это поможет нам лучше понять представленные ниже результаты соответствующим

ющих численных экспериментов. Пусть $\delta = 0$. Тогда $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_2$ и $\Omega = 0$, а в уравнении (30) в нулевом приближении можно пренебречь поглощением и дисперсией. Кроме того, предположим, что $\varepsilon_0^2 \ll |\psi|^2$. Данное предположение согласуется с тем, что на входе в кристалл $\varepsilon_0 = 0$.

Начальную стадию генерации низкочастотного гиперзвука на дистанциях $x \ll l_d, l_{abs}, l_d^{(0)}, l_{abs}^{(0)}$ с хорошей точностью можно исследовать в приближении заданного поля для оптической компоненты. С учетом сказанного выше уравнение для ε_0 запишем в виде

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} = -2g \frac{\partial}{\partial \tau} (|\psi|^2). \quad (35)$$

При условии, что высокочастотная компонента имеет вид бегущей со скоростью v_g волны, т.е. $|\psi| = |\psi|(t - x/v_g)$ и при строгом выполнении условия (2) найдем отсюда в лабораторной системе

$$\varepsilon_0 = -2gx \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2. \quad (36)$$

Таким образом, поле деформации низкочастотного импульса растет пропорционально пройденному пути x , а его профиль определяется производной от интенсивности высокочастотной компоненты. Полагая

$$\psi = \psi_m \operatorname{sch} \left(\frac{t - x/v_g}{\tau_p} \right),$$

получим из (36)

$$\varepsilon_0 = \frac{4g}{\tau_p} \psi_m^2 x \operatorname{th} \left(\frac{t - x/v_g}{\tau_p} \right) \operatorname{sch}^2 \left(\frac{t - x/v_g}{\tau_p} \right). \quad (37)$$

Отсюда видно, что профиль низкочастотной составляющей на начальной стадии генерации представляет собой одноволновый всплеск поля деформации (рис. 1а). Спектр данного сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} |F_0(\Omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0 \exp \left(i\Omega \left(t - \frac{x}{v_g} \right) \right) dt \right| = \\ &= \frac{8g}{\pi} \psi_m^2 x \frac{\zeta^2}{\operatorname{sh} \zeta}, \quad (38) \end{aligned}$$

где $\zeta = \pi \tau_p \Omega / 2$.

Его ширина $\delta\Omega$ по порядку величины равна $1/\tau_p$, а максимум соответствует частоте $\Omega_m = 1.04/\tau_p$ (рис. 1б). Таким образом, $\delta\Omega \sim \Omega_m$. Следовательно, спектр низкочастотной компоненты уже на начальной стадии ее генерации обладает свойством суперконтинуума.

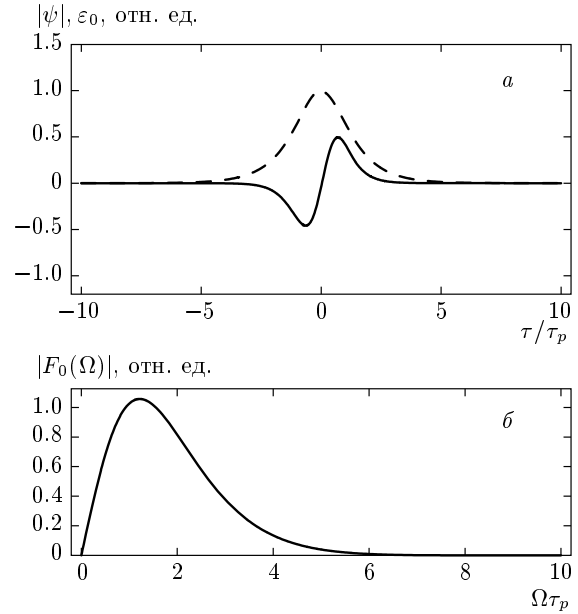


Рис. 1. Переходная стадия генерации. Приведены временные профили (а) и спектр низкочастотного импульса (б) на дистанции распространения $x = 0.25l_d(\omega_1) = 0.9$ см. Штриховыми и сплошными линиями изображены временные профили высокочастотного и низкочастотного импульсов. Величины относительных деформаций нормированы соответственно на $6 \cdot 10^{-7}$ и $2 \cdot 10^{-8}$. Спектр нормирован на максимальное значение

Теперь рассмотрим асимптотический случай, когда $x \gg l_d$. При таких дистанциях распространения существенным является обратное воздействие за счет нелинейности низкочастотной составляющей на высокочастотную и могут формироваться солитоны. Формально отбросим поглощение как высокочастотной, так и низкочастотной составляющих, т.е. в (20) положим $\alpha = 0$, а для ε_0 примем уравнение (35). В таком виде система (20), (35) известна как система Ядзимы — Ойкавы, интегрируемая с помощью МОЗР [36]. Ее односолитонное решение в лабораторной системе координат имеет вид

$$\psi = \psi_m \exp [-i(\Omega t - px)] \operatorname{sch} \left(\frac{t - x/v}{\tau_p} \right), \quad (39)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0m} \operatorname{sch}^2 \left(\frac{t - x/v}{\tau_p} \right), \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_m &= \frac{|k_2|a}{\Gamma \tau_p} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}}, \quad \varepsilon_{0m} = -\frac{k_2 a}{\Gamma \omega \tau_p^2}, \\ p &= \frac{1}{v_g} + \frac{k_2}{2} \left(\frac{1}{\tau_p^2} - \Omega^2 \right), \end{aligned}$$

а скорость солитона определяется выражением

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_g} - k_2 \Omega. \quad (41)$$

Решение (39)–(41) является двухпараметрическим, т. е. зависит от двух свободных параметров. В качестве таковых удобно рассматривать длительность солитона τ_p и параметр Ω . Как следует из формул (16) и (39), Ω имеет смысл нелинейного смещения несущей частоты акустического импульса. Из выражения для ψ_m следует, что $\Omega > 0$. Таким образом, частота импульса в среде смещается в «красную» область в полном согласии с законом сохранения энергии в элементарных актах рассеяния (см. Введение). Величина Ω зависит от входных параметров оптического импульса и может быть определена из соответствующей обратной спектральной задачи [36]. Другой способ определения частотного сдвига состоит в непосредственном численном интегрировании системы (20), (30) при различных входных параметрах импульсов. Здесь же можно заметить, что, как следует из выражения для ψ_m , асимптотическое значение красного частотного сдвига увеличивается пропорционально интенсивности ψ_m^2 входного импульса. Вследствие данного сдвига скорость солитона отклоняется от v_g , что приводит к нарушению условия РЗБ (2). В результате нелинейное взаимодействие между компонентами акустического импульса ослабевает и красный частотный сдвиг испытывает насыщение, достигая максимума на некоторой длине своего распространения.

Если пренебречь поглощением, уравнение (20) по форме совпадает с уравнением Шредингера в квантовой механике, где роль «потенциальной энергии» играет низкочастотная компонента ε_0 . С другой стороны, «глубина» этой «потенциальной ямы» определяется интенсивностью самой высокочастотной компоненты. Согласно (21), ε_0 растет с увеличением $|\psi|^2$. Из данной квантовомеханической аналогии становится понятным, что энергия высокочастотных фононов, захваченных, «потенциальной ямой», должна уменьшаться. Данное уменьшение тем более заметно, чем больше интенсивность $|\psi|^2$ самой высокочастотной компоненты. На языке настоящей статьи это означает, что сопровождающий генерацию низкочастотного гиперзвука «красный» частотный сдвиг высокочастотной компоненты должен расти с увеличением ее интенсивности. Такая же ситуация имеет место при оптическом методе генерации терагерцевого электромагнитного излучения [15, 20].

Таким образом, в рассмотренном солитонном ре-

жиме параметр Ω , имея смысл сдвига несущей частоты входного импульса в красную область, при установленных ограничениях сверху может принимать непрерывный ряд значений, возрастая с увеличением входной интенсивности поперечного упругого импульса. Входной высокочастотный импульс порождает в режиме РЗБ низкочастотный импульс, а затем сам же на нем и рассеивается. Таким образом, решение (39)–(41) соответствует описанному во Введении процессу саморассеяния. Здесь мы заимствуем термин «саморассеяние» (intra-pulse scattering) из оптических работ [45–47], посвященных вынужденному комбинационному рассеянию фемтосекундных лазерных импульсов, где их спектр также испытывает непрерывное смещение в красную область.

Низкочастотная компонента в солитонном решении представлена однополярным («полуволновым») всплеском волны деформации, т. е. его спектр центрирован на нулевой частоте и является широкополосным. Это можно рассматривать как один из примеров суперконтинуума. Заметим, что если несущая частота входного импульса равна ω_1 , то генерируемая в кристалле низкочастотная компонента представляет собой деформацию растяжения ($\varepsilon_{0m} > 0$), так как $k_2(\omega_1) < 0$. Напротив, при $\omega = \omega_2$ данная компонента является деформацией сжатия. Скорость солитона, как видно из уравнения (41), также зависит от знака ДГС: $v(\omega_1) < v_g$, $v(\omega_2) > v_g$.

Воспользовавшись численными параметрами, приведенными в конце предыдущего раздела и полагая $\Omega/\omega \sim 0.1$, найдем для амплитудных значений деформации высоко- и низкочастотных компонент: $\psi_m(\omega_1) \sim 10^{-6}$, $\varepsilon_{0m}(\omega_1) \sim 10^{-7}$; $\psi_m(\omega_2) \sim 3 \cdot 10^{-7}$, $\varepsilon_{0m}(\omega_2) \sim 4 \cdot 10^{-9}$.

Солитоны формируются на дистанциях порядка дисперсионных длин. Чтобы проследить трансформацию одноволнового всплеска (37) в полуволновый (40), а также соответствующую эволюцию спектров низко- и высокочастотных компонент, приведем ниже результаты численных экспериментов с системой (20), (30).

На дистанциях распространения $x < l_d$ наблюдается переходная стадия генерации низкочастотного суперконтинуума с помощью высокочастотного сигнала как на частоте ω_1 , так и на частоте ω_2 : порождается биполярный сигнал типа изображенного на рис. 1а. Приближение заданного поля хорошо соответствует численному расчету эволюции импульсов. Формы профиля и спектра низкочастотного сигнала хорошо согласуются соответственно с аналитическими выражениями (37) и (38).

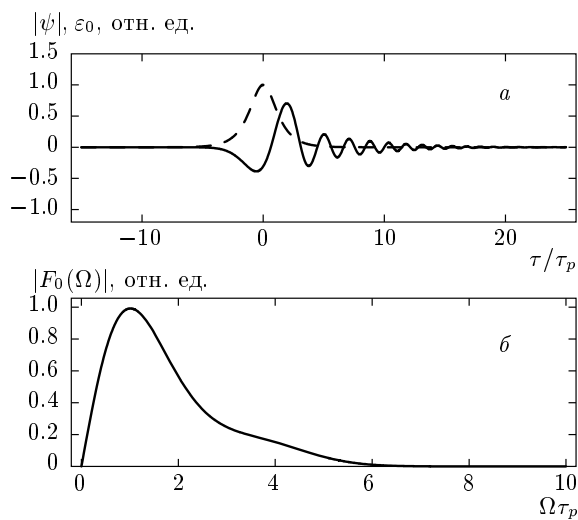


Рис. 2. Асимптотическая стадия генерации. Случай РЗБ на частоте ω_1 . Приведены временные профили (а) и спектр низкочастотного импульса (б) на дистанции распространения $x = 5l_d(\omega_1) = 18$ см. Штриховой и сплошной линиями изображены временные профили высокочастотного (на входе в среде) и низкочастотного импульсов. Величины относительных деформаций нормированы соответственно на $1.8 \cdot 10^{-6}$ и $1.8 \cdot 10^{-7}$. Спектр нормирован на максимальное значение

Асимптотическая стадия генерации при РЗБ на частоте ω_1 . Характерные длины поглощения и дисперсионного расплывания при указанных параметрах примерно совпадают, так что можно ожидать заметного поглощения еще на переходной стадии генерации. Действительно, численное моделирование (рис. 2) демонстрирует сильное поглощение высокочастотного импульса накачки. Солитон при этом не образуется, а форма и спектр низкочастотного импульса соответствуют распространению в среде с нормальной дисперсией. Как видно на рис. 2, спектр генерируемого низкочастотного сигнала, как и на переходной стадии, центрирован на частоте $\Omega_m \sim 1/\tau_p \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$.

Асимптотическая стадия генерации при РЗБ на частоте ω_2 . В отличие от предыдущего случая поглощение высокочастотной накачки не столь сильное, что допускает образование длинно-коротковолнового солитона. На дистанции распространения порядка длины дисперсионного расплывания высокочастотный и низкочастотный импульсы испытывают разделение на солитонную и несолитонную части. Двухкомпонентный солитон распространяется несколько быстрее несолитонной части, как

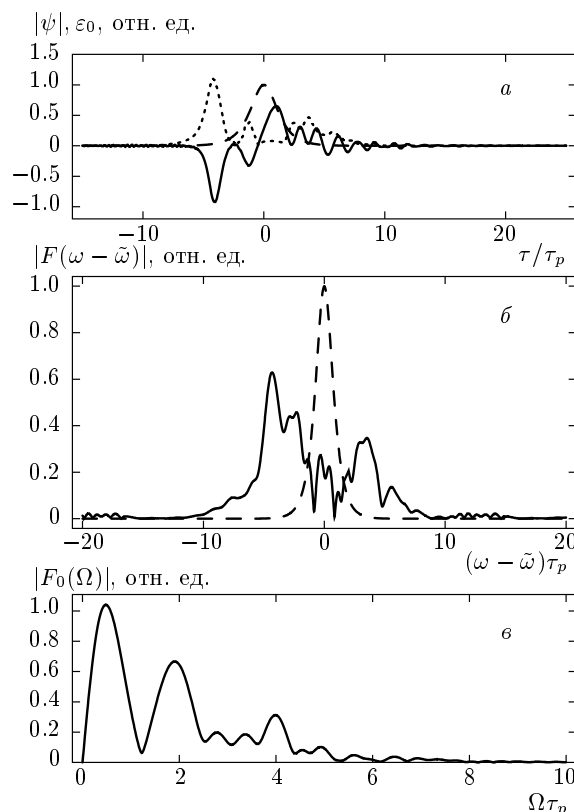


Рис. 3. Асимптотическая стадия генерации. Случай РЗБ на частоте ω_2 . Изображены временные профили (а), спектры высокочастотного (б) и низкочастотного (в) импульсов на дистанции распространения $x = 5l_d(\omega_1) = 18$ см. а) Штриховой и пунктирной линиями изображены временные профили высокочастотного импульса на входе в среду и на дистанции распространения $x = 5l_d(\omega_1)$, сплошной линией — временной профиль низкочастотного импульса. б) Штриховой линией обозначен спектр высокочастотного импульса на входе в среду. Величины относительных деформаций нормированы соответственно на $6 \cdot 10^{-7}$ и $6 \cdot 10^{-8}$. Спектры нормированы на максимальные значения при $x = 0$ (б) и $x = 5l_d(\omega_1)$ (в)

это следует из уравнения (41) при $k_2 > 0$. В приведенном примере происходит образование двух расположенных рядом солитонов разной амплитуды (рис. 3а). Солитон с большей амплитудой распространяется несколько быстрее. Следовательно, его спектр в согласии с уравнением (41) и с выражением для ψ_m сильнее смещен в красную область, нежели спектр малоамплитудного солитона. Суммарный спектр высокочастотного импульса испытывает красный сдвиг, достигающий насыщения

при формировании солитона. Часть спектра, соответствующая малоамплитудной несолитонной части высокочастотного импульса, как видно на рис. 3б, смещается в фиолетовую область. Это также связано с обратным воздействием низкочастотного широкополосного сигнала и соответствует процессам слияния генерируемых низкочастотных фононов с высокочастотными, которые описываются вторым слагаемым в правой части (20). Спектр низкочастотного импульса (рис. 3в) становится модулированным вследствие суперпозиции спектров солитонной и несолитонной частей импульса. В нем четко видны локальные максимумы на частотах $1/\tau_p$, $2/\tau_p$ и $4/\tau_p$.

Теперь исследуем двухчастотный режим генерации суперконтинуума, описываемый нелинейной системой (32)–(34). На переходной стадии ($x < l_{abs}(\omega_1)$, $l_d(\omega_1)$) обе высокочастотные компоненты генерируют низкочастотные двухполярные сигналы типа (38), суммарный спектр которых является простым наложением спектров вида (37). Поскольку в нашем случае $l_d(\omega_1) \ll l_d(\omega_2)$, на дистанциях порядка $l_d(\omega_1)$ обратное воздействие низкочастотного суперконтинуума сказывается сильнее на импульсе с частотой ω_1 . Но так как $l_d(\omega_1)$ практически равна $l_{abs}(\omega_1)$, то на этих дистанциях данный импульс сильно затухает из-за близости его спектра к линии резонансного спин-фононного поглощения. Здесь мы рассмотрели ситуацию, когда входная амплитуда ψ_1 в три раза превышает входную амплитуду ψ_2 . Из-за этого вклад в низкочастотный сигнал от высокочастотного импульса с несущей частотой ω_1 значительно превышает соответствующий вклад от импульса с несущей частотой ω_2 . Поэтому при дальнейшем распространении импульс ψ_2 в большей степени рассеивается на низкочастотном суперконтинууме, порожденном затухшим сигналом на частоте ω_2 . Здесь можно говорить о перекрестном рассеянии. Данное обстоятельство, как показывает численный эксперимент, приводит не только к красному сдвигу, но и к заметному уширению и модуляции спектра высокочастотного импульса накачки (рис. 4б). На асимптотической стадии ($x > l_d(\omega_2)$) низкочастотный суперконтинуум вновь разделяется на солитонную и несолитонную части (рис. 4а). При этом более значительный вклад в спектр низкочастотного суперконтинуума (рис. 4в) вносит несолитонная часть, порожденная затухшим импульсом с несущей частотой ω_1 . Меньшая по интенсивности солитонная часть порождается импульсом ψ_2 .

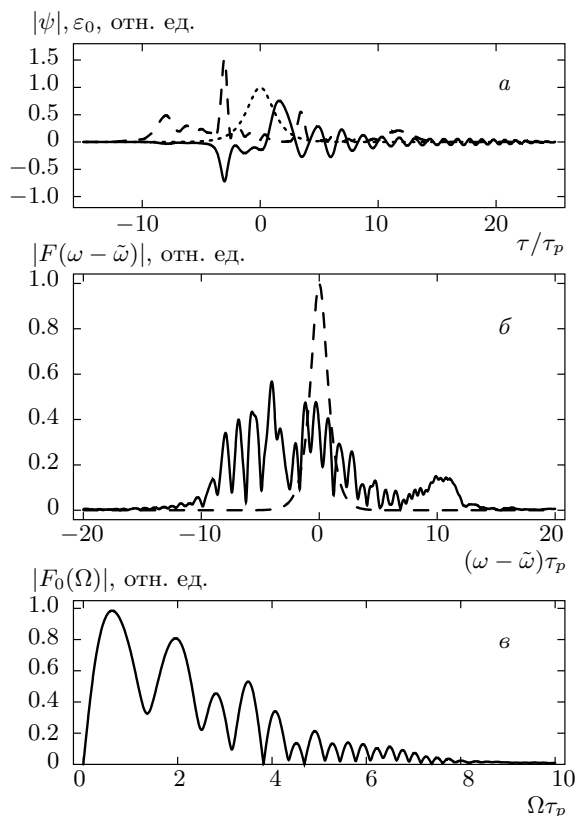


Рис. 4. Асимптотическая стадия генерации. Случай двухчастотного РЗБ. Изображены временные профили (а), спектры высокочастотного (с частотой ω_1) (б) и низкочастотного (в) импульсов на дистанции распространения $x = 5l_d(\omega_1) = 18$ см. а) Штриховой и пунктирной линиями изображены временные профили высокочастотного импульса на входе в среду и на дистанции распространения $x = 5l_d(\omega_1)$, сплошной линией — временной профиль низкочастотного импульса. б) Штриховой линией обозначен спектр высокочастотного импульса на входе в среду. Величины относительных деформаций импульсов с несущими частотами ω_1, ω_2 нормировались соответственно на $1.8 \cdot 10^{-6}$ и $6 \cdot 10^{-7}$, а импульса на низкой частоте на $1.8 \cdot 10^{-7}$. Спектры нормированы на максимальные значения при $x = 0$ (б) и $x = 5l_d(\omega_1)$ (в)

Численные оценки показывают, что на асимптотических стадиях, где суперконтинуум разделяется на солитонную и несолитонную части, эффективность его генерации по энергии достигает порядка одного процента. В условиях экспериментов, проводимых при температурах жидкого гелия, размеры парамагнитных твердотельных образцов составляют обычно несколько сантиметров. Это, как показывают приведенные выше количественные оцен-

ки, значительно меньше дисперсионных длин. Поэтому в условиях реального эксперимента скорее всего может быть реализована переходная стадия генерации акустического суперконтинуума в режиме РЗБ. Асимптотическая же стадия служит хорошей иллюстрацией процесса саморассеяния, выраженного в форме аналитического солитонного решения (39)–(41). Именно из этого решения следует, что основной результат обратного влияния акустического суперконтинуума на порождающий его гиперзвуковой сигнал состоит в сдвиге спектра этого сигнала в красную область. Как показали приведенные здесь численные эксперименты, данный сдвиг заметен уже на переходной стадии, а эффективность генерации суперконтинуума по энергии составляет порядка десятых долей процента.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено всестороннее исследование вопроса о генерации низкочастотного (по отношению к частотам входных сигналов) акустического суперконтинуума и преобразовании импульсных спектров в нелинейном кристалле, содержащем парамагнитные примеси. Наиболее эффективная генерация низкочастотного суперконтинуума возможна при двух значениях несущих частот, лежащих выше резонансной линии и определяемых выражениями (26), (27). При этом конечное значение верхней частоты ω_2 обеспечивается ролью пространственной дисперсии, вызванной дискретной структурой кристалла. В то же время значение нижней частоты ω_1 определяется, главным образом, величиной зеэмановского расщепления ω_0 триплетов парамагнитных ионов, создающих временную дисперсию. Сказанное особенно ярко демонстрируется выражениями (29).

В одночастотных режимах генерация суперконтинуумов сопровождается смещением спектров входных импульсов главным образом в красную область. Импульс на частоте ω_1 в процессе генерации низкочастотного суперконтинуума испытывает быстрое затухание и дисперсионное расплывание в силу того, что ω_1 лежит достаточно близко к линии резонансного поглощения. Однако в двухчастотном режиме генерации данный импульс уже на начальной стадии способен породить достаточно мощный суперконтинуум, который может оказать существенное влияние на динамику импульса с несущей частотой ω_2 . В результате такого перекрестного рассеяния спектр последнего импульса

испытывает существенную модуляцию и уширение как в красную, так и в фиолетовую области.

При попадании несущей частоты входного импульса внутрь контура резонансного поглощения говорить о сколько-нибудь эффективной генерации суперконтинуума не приходится из-за невозможности удовлетворить здесь условию РЗБ (2). Связано это с тем, что в отсутствие парамагнитных примесей из-за пространственной дисперсии групповая скорость в области высоких частот меньше низкочастотной фазовой скорости. Наличие резонансных примесей еще больше усугубляет данную ситуацию. В аналогичной оптической задаче, где идет речь о генерации терагерцевого суперконтинуума, ситуация в отсутствие резонансных примесей обратная: групповая скорость в области высоких частот существенно превышает фазовую скорость в терагерцевом диапазоне. Поэтому здесь резонансные примеси способны замедлить групповую скорость оптической компоненты и привести к выполнению условия (2) [44]. В акустике подобная ситуация также может быть реализована, если в дополнение к рассмотренным здесь парамагнитным примесям кристалл допировать еще и ядерными спинами. Как известно, характерные зеэмановские расщепления ядерных спиновых уровней на четыре-пять порядков меньше электронных из-за аналогичного различия в массах электрона и ядра. В таком случае ядерные спины способны уменьшить фазовую скорость акустических волн низкочастотного диапазона. В то же время высокочастотные волны нечувствительны к ядерным спином, поэтому их групповая скорость даже при существенной роли пространственной дисперсии может быть больше фазовой скорости низкочастотного звука. Тогда присутствие электронных парамагнитных примесей будет способно привести к выполнению условия (2) эффективной генерации низкочастотного акустического суперконтинуума при попадании несущей частоты входного импульса внутрь линии резонансного поглощения, как это имеет место в оптике. С другой стороны, из-за существенного различия между значениями групповой скорости в оптическом диапазоне и фазовой скоростью при терагерцевых частотах в родственных оптических задачах практически не приходится говорить о возможности двухчастотного режима генерации низкочастотного суперконтинуума, который достаточно эффективно способен проявить себя в акустике.

В качестве конкретного твердотельного образца, в котором могут проявить себя описанные в настоящей работе эффекты, мы предлагаем кубический кристалл MgO с примесными вкрапле-

ниями парамагнитных ионов Fe^{2+} . Количественные оценки параметров данного кристалла и распространяющихся в нем гиперзвуковых импульсов, проведенные нами в разд. 4, свидетельствуют о реальной возможности экспериментально обнаружить генерацию акустического суперконтинуума в режиме саморассеяния гиперзвука.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00503а).

Один из авторов (А. Н. Б.) благодарит за финансовую поддержку фонд «Династия».

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. В. Бункин, Ю. А. Кравцов, Г. А. Ляхов, УФН **149**, 391 (1986).
2. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).
3. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. **183**, 457 (1969).
4. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
5. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2270 (1971).
6. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974).
7. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).
8. Н.-У. НАО and Н. J. Maris, Phys. Rev. B **64**, 064302 (2001).
9. У. А. Абдуллин, Г. А. Ляхов, О. В. Руденко, А. С. Чиркин, ЖЭТФ **66**, 1295 (1974).
10. D. H. Auston, K. P. Cheung, J. A. Valdmanis, and D. A. Kleinman, Phys. Rev. Lett. **53**, 1555 (1984).
11. M. Schall, H. Helm, and S. R. Keiding, Int. Infr. Mill. Waves **20**, 595 (1999).
12. P. Y. Han and X.-C. Zhang, Meas. Sci. Tech. **12**, 1747 (2001).
13. J. Hebling, G. Almasi, and I. Z. Cosma, Opt. Express **10**, 1161 (2002).
14. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, Письма в ЖЭТФ **75**, 746 (2002).
15. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, КЭ **35**, 1019 (2005).
16. А. Г. Степанов, А. А. Мельников, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, Письма в ЖЭТФ **85**, 279 (2007).
17. T. Hattori and K. Takeuchi, Opt. Express **15**, 8076 (2007).
18. G. Kh. Kitaeva, Laser Phys. Lett. **5**, 559 (2008).
19. M. I. Vakunov, S. V. Bodrov, and M. V. Tsarev, J. Appl. Phys. **104**, 073105 (2008).
20. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **87**, 470 (2008).
21. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Основы фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
22. П. Г. Крюков, *Фемтосекундные импульсы*, Наука, Москва (2008).
23. А. М. Желтиков, УФН **176**, 623 (2006).
24. Э. Такер, в кн.: *Физическая акустика*, под ред. У. Мэзона, Т. 4, Ч. А, Гл. 2, Мир, Москва (1969).
25. Дж. Такер, Р. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975).
26. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловьев, Б. М. Хабибуллин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, Москва (1977).
27. Д. Болеф, в кн.: *Физическая акустика*, под ред. У. Мэзона, Т. 4, Ч. А, Гл. 3, Мир, Москва (1969).
28. А. Р. Кессель, *Ядерный акустический резонанс*, Наука, Москва (1969).
29. А. Гранато, К. Люке, в кн.: *Физическая акустика*, под ред. У. Мэзона, Т. 4, Ч. А, Гл. 6, Мир, Москва (1969).
30. В. В. Леманов, Г. А. Смоленский, УФН **108**, 465 (1972).
31. Р. Блинц, Б. Жэкш, *Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики*, Мир, Москва (1975).
32. E. V. Tucker, Phys. Rev. Lett. **6**, 183 (1961).
33. C. Kittel, Phys. Rev. Lett. **6**, 449 (1961).
34. У. Х. Копвиллем, В. Д. Корепанов, ФТТ **3**, 2014 (1961).
35. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1745 (1972).
36. N. Yajima and M. Oikawa, Progr. Theor. Phys. **56**, 1719 (1976).
37. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва (1988).
38. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, ФТТ **49**, 113 (2007).

39. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **118**, 20 (2000).
40. Р. Пантелл, Г. Путхофф, *Основы квантовой электроники*, Мир, Москва (1972).
41. В. Э. Гусев, А. А. Карбутов, *Лазерная оптоакустика*, Наука, Москва (1991).
42. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A.: Math., Nucl. & Gen. **6**, 1337 (1973).
43. M. D. Crisp, Phys. Rev. A **8**, 2128 (1973).
44. A. N. Bugay and S. V. Sazonov, Phys. Lett. A **374**, 1093 (2010).
45. Е. М. Дианов, А. Я. Карасик, П. В. Мамышев, А. М. Прохоров, В. Н. Серкин, М. Ф. Стельмах, А. А. Фомичев, Письма в ЖЭТФ **41**, 242 (1985).
46. F. M. Mitschke and L. F. Mollenauer, Opt. Lett. **11**, 659 (1986).
47. В. Н. Серкин, Т. Л. Беяева, Г. Х. Корро, М. Агуеро Гранадос, КЭ **33**, 325 (2003).