ЖЭТФ, 2011, том 139, вып. 1, стр. 55–70

ДИНАМИКА ОБРАЗОВАНИЯ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В ПРОЦЕССЕ РАЗВИТИЯ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕМНЫХ СОЛИТОНОВ

В. А. Миронов, А. И. Смирнов, Л. А. Смирнов***

Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 16 июня 2010 г.

Проведено аналитическое и численное исследование нелинейной стадии модуляционной неустойчивости темных солитонов. Предложено асимптотическое описание динамики этих солитонов в терминах локальной скорости их движения и кривизны линий, около которых они сосредоточены. Исследованы особенности разрушения темных солитонов и, в частности, процесс формирования из них вихревых структур.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных и быстро развивающихся областей современной нелинейной динамики является теория турбулентности в сверхтекучих жидкостях, к которым относится и бозе-эйнштейновский конденсат (БЭК) атомов щелочных элементов. Для таких сред характерно существование квантовых вихрей, представляющих собой особые линии в распределении скорости потенциального течения. Циркуляция скорости вокруг этих линий равна не нулю, а $2\pi\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — целое число (топологический заряд вихря). При изучении турбулентности в БЭК важно знать, как образуются и взаимодействуют между собой вихри, какую роль они играют в процессе перехода конденсата в турбулентное состояние [1, 2]. В последние годы поток публикаций, посвященных проблемам квантовой турбулентности, только нарастает.

В квазидвумерном облаке бозе-газа вихревые нити возникают естественным образом при «распаде» созданных в нем изначально протяженных безвихревых структур, неустойчивых по отношению к пространственной модуляции параметров [3–7]. Часто для «локального» описания таких квазиодномерных объектов можно использовать модель «темного солитона». Темные солитоны наблюдались экспериментально в облаке БЭК в виде темных планарных полос [7–9]. Они возбуждаются также при сверхзвуковом обтекании БЭК препятствий [10–15]. Лабораторные и численные эксперименты подтверждают, что в бозе-конденсате квазиодномерные нелинейные структуры неустойчивы по отношению к поперечным модуляциям и могут распадаться на пары вихрей с противоположными топологическими зарядами.

Динамика БЭК хорошо описывается (не только качественно, но и количественно) в приближении среднего поля с помощью волновой функции, удовлетворяющей так называемому уравнению Гросса–Питаевского (ГП) [16–18]. Формально такой конденсат представляет собой сжимаемую жидкость со специфическим «квантово-механическим давлением». Следует особо отметить, что для понимания многих процессов, происходящих в БЭК, полезной и весьма конструктивной является аналогия между уравнением ГП и нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) в классической физике (нелинейной оптике, физике плазмы и др.) [19, 20].

К настоящему времени вопросы устойчивости темных солитонов неоднократно обсуждались в литературе в рамках НУШ для сред с дефокусирующей нелинейностью [21–29]. В частности, в работе [21] было показано, что полосы темных солитонов всегда неустойчивы относительно поперечных длинноволновых модуляций, и исследована линейная стадия этой неустойчивости. Что же касается нелинейного режима, то он в основном изучался численно [22–25], и характерные его закономерности ин-

*E-mail: smirnov@appl.sci-nnov.ru
**E-mail: smirnov_lev@appl.sci-nnov.ru

терпретировались лишь на качественном уровне. В работах [25, 26] для описания нелинейных эффектов при поперечной неустойчивости темных солитонов был развит аналитический метод, справедливый вблизи границы области устойчивости.

В данной работе предлагается асимптотический подход, позволяющий детально изучить динамику изогнутых темных солитонов и, в частности, процесс вихреобразования на нелинейной стадии их модуляционной неустойчивости.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 приведен вывод самосогласованной системы уравнений для локальной скорости солитона и кривизны линии, около которой он сосредоточен. Общие свойства этой системы и ее частные решения рассматриваются в разд. 3. В разд. 4, анализируется поведение изогнутых темных солитонов на нелинейной стадии поперечной неустойчивости, когда начинают зарождаться вихревые структуры. Там же проводится сравнение развитой теории с результатами численного моделирования, выполненного непосредственно в рамках уравнения ГП. В Заключении (разд. 5) формулируются основные выводы и результаты.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ДИНАМИКИ ИЗОГНУТЫХ ТЕМНЫХ СОЛИТОНОВ

2.1. Исходные уравнения и приближения

Волновая функция $\Psi(\mathbf{r},t)$ исходно однородного конденсата в приближении среднего поля удовлетворяет уравнению Гросса–Питаевского, которое в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$i\partial_t\Psi + \Delta\Psi/2 + \left(1-|\Psi|^2\right)\Psi = 0. \qquad (1)$$

Координаты $\mathbf{r}$ нормированы на корреляционный радиус $r_0 = \hbar\big/\sqrt{mgn_0}$, время t — на время $t_0 = r_0/c_s$ пробега корреляционного радиуса со скоростью звука $c_s = \sqrt{gn_0/m}$, волновая функция $\Psi(\mathbf{r},t)$ — на $\sqrt{n_0}$, где $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ определяется длиной a s-рассеяния атомов друг на друге, n_0 — значение концентрации невозмущенного конденсата, m — масса одного бозона. При этом длину рассеяния a считаем положительной величиной ($a > 0$), что соответствует взаимному отталкиванию между атомами конденсата. Кроме того, ограничимся двумерной задачей, $\mathbf{r} = (x,y)$, предположив, что от координаты z ничего не зависит.

Воспользовавшись преобразование Маделунга

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r},t)\exp\left(i\theta(\mathbf{r},t)\right),$$

от уравнения ГП (1) можно перейти к уравнениям гидродинамики сжимаемой невязкой жидкости вида

$$\partial_t\psi^2 + \mathrm{div}\left(\psi^2\nabla\theta\right) = 0, \qquad (2)$$

$$\partial_t\theta + (\nabla\theta)^2/2 = 1 - \psi^2 + \Delta\psi/2\psi\,. \qquad (3)$$

Здесь $\psi(\mathbf{r},t)$ и $\theta(\mathbf{r},t)$ — действительные функции координат и времени, которые определяют концентрацию атомов конденсата $n(\mathbf{r},t) = \psi^2$ и его скорость движения $\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \nabla\theta$, а со слагаемым $\Delta\psi/2\psi$ в (3) связывают так называемое «квантово-механическое давление».

У уравнения (1) имеется однопараметрическое семейство одномерных «уединенных» решений, называемых «темными» солитонами [19, 30, 31]. Они представляют собой движущиеся с постоянной скоростью v_{sol} $\left(v_{sol}^2 \leqslant 1\right)$ провалы концентрации БЭК на фоне постоянной плотности. Такой темный солитон, расположенный, например, вдоль оси y, описывается волновой функцией

$$\Psi_{sol} = \frac{1}{\Lambda_{sol}}\,\mathrm{th}\,\frac{x - v_{sol}t}{\Lambda_{sol}} + iv_{sol}, \qquad (4)$$

где

$$\Lambda_{sol} = \frac{1}{\sqrt{1-v_{sol}^2}}$$

— ширина солитона. Неподвижный солитон ($v_{sol} = 0$, $\Lambda_{sol} = 1$) часто называют «черным». В нем плотность конденсата проваливается до нуля, а фаза волновой функции скачком изменяется на π. В подвижных (или «серых») солитонах минимальное значение концентрации n_{min} растет пропорционально квадрату скорости,

$$n_{min} = v_{sol}^2,$$

а фаза изменяется плавно. Когда $v_{sol}^2 \to 1$, концентрация n_{min} достигает фонового значения (в безразмерных переменных равного единице). При этом ширина Λ_{sol} стремится к бесконечности, $\Lambda_{sol} \to \infty$, и солитон исчезает.

Нас будут интересовать квазисолитонные структуры в БЭК, локально очень похожие на (4), но локализованные в каждый момент времени t около плавной кривой линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s,t)$, заданной для определенности как функция длины дуги s. Эти структуры мы будем называть в дальнейшем изогнутыми темными солитонами, опуская приставку «квази». Они появляются, например, в результате развития поперечной неустойчивости из обычных темных солитонов [21–29]. Об этом подробно речь пойдет в разд. 4.

Говорить об изогнутых темных солитонах имеет смысл, только когда их поперечный размер

$$\Lambda(s,t) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2(s,t)}}$$

медленно изменяется вдоль кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s,t)$ и остается на протяженном ее участке малым по сравнению с радиусом кривизны $R(s,t)$, т. е. при выполнении следующих условий:

$$|\partial_s \Lambda(s,t)| \ll 1, \quad |\kappa(s,t)\,\Lambda(s,t)| \ll 1, \tag{5}$$

где

$$\kappa(s,t) = \frac{1}{R(s,t)} = \left|\partial^2_{ss}\mathbf{r}_0(s,t)\right|$$

— кривизна «опорной» линии солитона.

Основываясь на неравенствах (5), опишем динамику изогнутых темных солитонов, которая определяется поведением во времени, во-первых, опорной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s,t)$, а, во-вторых, скорости (ширины) солитона $v(s,t)$ $(\Lambda(s,t))$. Причем локальное изменение опорной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s,t)$ обусловливается значением скорости $v(s,t)$ в точке s, на которое, в свою очередь, оказывает влияние происходящая трансформация линии изгиба солитона.

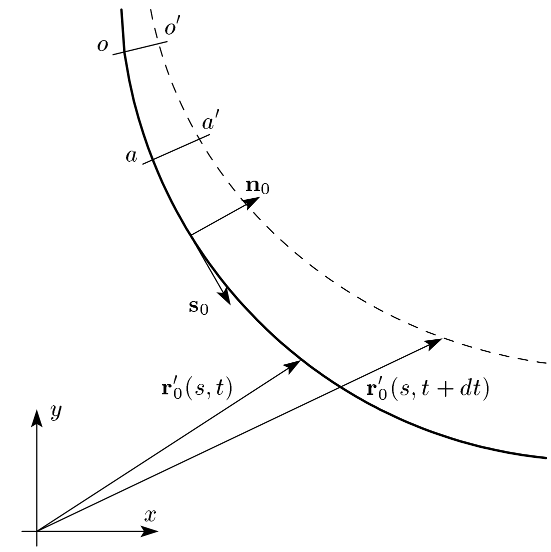

Рис. 1. Опорная кривая $\mathbf{r}_0(s,t)$ изогнутого темного в моменты времени t (сплошная линия) и $t+dt$ (штриховая линия); $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{s}_0$ — единичные векторы нормали и касательной; o, o' и a, a' — точки, перемещающиеся вместе с кривой $\mathbf{r}_0(s,t)$

2.2. Опорная кривая и связанная с ней система координат

При выполнении соотношений (5), являющихся, по существу, условиями квазиодномерности задачи, можно утверждать, что каждый дифференциально малый участок опорной кривой $\mathbf{r}_0(s,t)$ смещается в перпендикулярном к ней направлении с локальной скоростью темного солитона $v(s,t)$ ($v(s,t)$ — проекция скорости на нормаль $\mathbf{n}_0(s,t)$ к линии $\mathbf{r}_0(s,t)$).

Исходя из простых кинематических соображений, получим уравнение для кривизны $\kappa(s,t)$ изогнутого темного солитона[1)]. При этом будем считать, что линия изгиба $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s,t)$ солитона всегда представляет собой гладкую кривую без самопересечений (см. рис. 1). Выделим точку a на этой кривой. Ее радиус-вектор определяется как $\mathbf{r}_0(s_a,t)$, где длина дуги s_a отсчитывается от некоторой выбранной за «нулевую» точки o. Через малый промежуток времени dt темный солитон будет изогнут уже вдоль линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_0(s,(t+dt))$. При этом точка o переместится в точку o', которая станет новым началом отсчета длины дуги s, а окрестность точки a — в окрестность точки a' с радиусом-вектором

$$\mathbf{r}'_0(s_{a'},(t+dt)) = \mathbf{r}_0(s_a,t) + v(s_a,t)\,dt\,\mathbf{n}_0(s_a,t). \tag{6}$$

Если известна скорость смещения $v(s,t)$, то для приращения длины дуги $ds = (s_{a'} - s_a)$ за время dt нетрудно получить выражение

$$ds = (s_{a'} - s_a) = -\left(\int_0^{s_a} v(s',t)\,\kappa(s',t)\,ds'\right) dt. \tag{7}$$

Соотношение (7) описывает увеличение длины дуги за счет изменения радиусов кривизны в каждой точке кривой $\mathbf{r}_0(s,t)$ при ее трансформации в кривую $\mathbf{r}'_0(s,(t+dt))$.

Продифференцируем дважды соотношение (6) по s_a. Используя формулы дифференциальной геометрии [32], а также связь (7) между $s_{a'}$ и s_a, приходим к следующему равенству:

[1)] Всякую линию на плоскости можно задать ее естественным уравнением $\kappa = \kappa(s)$, которое устанавливает связь между длиной дуги линии s и ее кривизной κ в соответствующей точке. Естественное уравнение определяет линию с точностью до ее положения на плоскости. При рассмотрении динамики изогнутого темного солитона необходимо учитывать, что кривизна линии, вдоль которой он изогнут, будет также зависеть и от времени t: $\kappa = \kappa(s,t)$.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_0'(s_{a'},(t+dt))}{\partial s_{a'}^2}\left[1-v(s_a,t)\kappa(s_a,t)\,dt\right]^2 - \\ -\frac{\partial \mathbf{r}_0'(s_{a'},(t+dt))}{\partial s_{a'}}\frac{\partial\left[v(s_a,t)\kappa(s_a,t)\right]}{\partial s_a}\,dt = \\ =\left(\kappa(s_a,t)+\left[\frac{\partial^2 v(s_a,t)}{\partial s_a^2}-\kappa^2(s_a,t)v(s_a,t)\right]dt\right)\mathbf{n}_0 - \\ -\left[v(s_a,t)\frac{\partial\kappa(s_a,t)}{\partial s_a}+2\kappa(s_a,t)\frac{\partial v(s_a,t)}{\partial s_a}\right]dt\,\mathbf{s}_0. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{n}_0=\mathbf{n}_0(s_a,t)$ и $\mathbf{s}_0=\mathbf{s}_0(s_a,t)$ — соответственно вектор нормали и вектор касательной к кривой $\mathbf{r}_0(s,t)$ в точке a.

Возьмем модуль от обеих частей равенства (8) и разложим получившееся выражение в ряд Тейлора по параметру dt. Оставив только линейные по dt слагаемые, находим, как изменилась кривизна темного солитона за время dt:

$$d\kappa=\kappa(s_{a'},(t+dt))-\kappa(s_a,t)= \\ =\left(\kappa^2(s_a,t)v(s_a,t)+\partial_{s_a s_a}v(s_a,t)\right)\,dt. \quad (9)$$

Учтем, что

$$d\kappa=\partial_s\kappa ds+\partial_t\kappa dt,$$

где приращение длины дуги ds определяется выражением (7). В итоге из соотношения (9) получим уравнение для кривизны темного солитона вида

$$\partial_t\kappa-\left(\int\limits_0^s v\kappa\,ds'\right)\partial_s\kappa=\kappa^2 v+\partial_{ss}^2 v. \quad (10)$$

Таким образом, зная как изменяется во времени и пространстве скорость солитона $v(s,t)$, с помощью уравнения (10) можно найти кривизну опорной линии солитона и по ней восстановить саму линию.

Отметим, что кинематическое уравнение (10) уже обсуждалось в литературе [33–35] в приложении к изучению спиральных волн в возбудимых средах.

Поведение изогнутых темных солитонов удобно анализировать в криволинейной ортогональной системе координат (s,ξ), связанной с опорной кривой $\mathbf{r}_0(s,t)$. Переход к ним осуществляется следующим образом:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(s,t)+\xi\mathbf{n}_0(s,t), \quad (11)$$

где $\mathbf{r}=x\,\mathbf{x}_0+y\,\mathbf{y}_0$ — радиус-вектор некоторой точки M в пространстве ($\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{y}_0$ — орты декартовой системы координат (x,y)), ξ — расстояние по нормали, опущенной из этой точки на опорную кривую $\mathbf{r}_0(s,t)$, $\mathbf{n}_0(s,t)$ — единичный вектор нормали к линии $\mathbf{r}_0(s,t)$, а s — длина дуги вдоль $\mathbf{r}_0(s,t)$, отсчитываемая от начальной точки o до основания нормали (см. рис. 1).

В каждый момент времени t коэффициенты Ламе системы координат (s,ξ), задающих положение точки на плоскости (x,y), соответственно равны

$$h_s=(1-\kappa\xi), \quad h_\xi=1. \quad (12)$$

Так как опорная кривая $\mathbf{r}_0(s,t)$ зависит от времени t, связанные с ней пространственные координаты s и ξ тоже будут функциями t. В дальнейшем нам потребуются частные производные $\partial_t s$ и $\partial_t\xi$. Для того чтобы их найти, продифференцируем (11) по времени t:

$$\partial_t\mathbf{r}_0+\partial_s\mathbf{r}_0\,\partial_t s+\partial_t\xi\,\mathbf{n}_0+\xi\,\partial_s\mathbf{n}_0\partial_t s+\xi\,\partial_t\mathbf{n}_0=0. \quad (13)$$

Учитывая уравнения (6), (7), (10) и формулы Френе–Серре [32], получаем, что

$$\partial_t\mathbf{r}_0=v\,\mathbf{n}_0+ \\ +\left(\int\limits_0^s v(s',t)\,\kappa(s',t)\,ds'\right)\mathbf{s}_0, \quad (14)$$

$$\partial_t\mathbf{n}_0=-\left(\partial_s v+\kappa\int\limits_0^s v(s',t)\,\kappa(s',t)\,ds'\right)\mathbf{s}_0. \quad (15)$$

Подставим уравнения (14), (15) в соотношение (13) и приравняем нулю проекции на направления $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{s}_0$. В итоге приходим к следующим выражениям:

$$\partial_t\xi=-v, \quad (16)$$

$$\partial_t s=-\int\limits_0^s v\kappa\,ds'+\frac{\xi}{(1-\kappa\xi)}\,\partial_s v. \quad (17)$$

2.3. Уравнение для скорости изогнутого темного солитона

Для определения локального значения скорости $v(s,t)$ обратимся далее к исследованию уравнения (1).

Рассмотрим изогнутый темный солитон (или, точнее, «квазисолитон»), который движется вместе с опорной кривой $\mathbf{r}_0(s,t)$. Для описания его структуры естественно перейти в систему координат (s,ξ) и воспользоваться вытекающей из неравенств (5) малостью параметра

$$\mu = \max\left[\left|\partial_s \Lambda\,(s,t)\right| ;\ \left|\kappa\,(s,t)\,\Lambda\,(s,t)\right| \right] \ll 1, \qquad (18)$$

где $\Lambda\,(s,t)$ — характерный масштаб локализации поля вблизи линии $\mathbf{r}_0\,(s,t)$.

Перепишем уравнение ГП (1) в новых координатах:

$$i\,\partial_t \Psi + i\,\partial_s \Psi\,\partial_t s + i\,\partial_\xi \Psi\,\partial_t \xi + \\ + (2h_s)^{-1}\left(\partial_s\left(h_s^{-1}\partial_s \Psi\right) + \partial_\xi\left(h_s \partial_\xi \Psi\right)\right) + \\ + \left(1 - |\Psi|^2\right)\Psi = 0. \qquad (19)$$

Будем искать решение уравнения (19) в виде асимптотического ряда по малому параметру μ: $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \ldots$, где Ψ_0, Ψ_1, $\ldots$ — члены разложения нулевого, первого и т. д. порядков малости. Подставим данное разложение в уравнение (19). В нулевом порядке по μ получим стандартное стационарное нелинейное уравнение Шредингера для одномерного темного солитона:

$$-iv\partial_\xi \Psi_0 + \partial^2_{\xi\xi}\Psi_0\,/2 + \left(1 - |\Psi_0|^2\right)\Psi_0 = 0. \qquad (20)$$

Здесь учтено, что $\partial_t \xi = -v$, где $v(s,t)$ — скорость темного солитона, положительным направлением которой является направление вектора нормали к кривой, вдоль которой изогнут солитон. Таким образом,

$$\Psi_0 = \sqrt{1-v^2}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{1-v^2}\xi\right) + iv, \qquad (21)$$

где ξ — расстояние по нормали от точки наблюдения до кривой $\mathbf{r}_0\,(s,t)$.

В первом порядке малости по μ получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение для функции Ψ_1:

$$-iv\partial_\xi \Psi_1 + \partial^2_{\xi\xi}\Psi_1\,/2 + \left(1 - 2\,|\Psi_0|^2\right)\Psi_1 - \Psi_0^2\Psi_1^* = \\ = -i\partial_t \Psi_0 + \kappa\partial_\xi \Psi_0\,/2 + i\left(\int\limits_0^s v\kappa\,ds'\right)\partial_s \Psi_0. \qquad (22)$$

Если продифференцировать уравнение (20) по ξ, то нетрудно заметить, что функция $\tilde{\Psi}_1\,(\xi) = \partial_\xi \Psi_0$ является решением однородного уравнения (22) (когда правая часть уравнения отсутствует). Можно показать, что условием существования у (22) локализованных по ξ решений является выполнение следующего равенства:

$$\mathrm{Re}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} F\big(\Psi_0\,(\xi)\,,v,\kappa\big)\,\tilde{\Psi}_1^*\,(\xi)\;d\xi\right] = 0, \qquad (23)$$

где под $F\big(\Psi_0\,(\xi)\,,v,\kappa\big)$ понимается правая часть уравнения (22). Соотношение (23) является по существу аналогом теоремы Фредгольма об альтернативе [32]. В итоге из уравнения (23) получим динамическое уравнение для локальной скорости изогнутого солитона v:

$$\partial_t v - \left(\int\limits_0^s v\kappa\,ds'\right)\partial_s v + \frac{\kappa\left(1 - v^2\right)}{3} = 0. \qquad (24)$$

Согласно уравнениям (24) и (10), поведение скорости $v\,(s,t)$ определяется кривизной $\kappa\,(s,t)$ опорной кривой $\mathbf{r}_0\,(s,t)$, а та, в свою очередь, зависит от $v\,(s,t)$.

3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА И ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СКОРОСТИ И КРИВИЗНЫ ИЗОГНУТОГО ТЕМНОГО СОЛИТОНА

Выпишем для удобства уравнения (10) и (24) вместе в виде отдельной самосогласованной системы:

$$\partial_t \kappa - \left(\int\limits_0^s v\kappa\,ds'\right)\partial_s \kappa = \kappa^2 v + \partial^2_{ss} v, \qquad (25)$$

$$\partial_t v - \left(\int\limits_0^s v\kappa\,ds'\right)\partial_s v = -\frac{\kappa\left(1 - v^2\right)}{3}. \qquad (26)$$

Проинтегрируем уравнение (25) по s между точками s_a и s_b на кривой, вдоль которой изогнут солитон. В итоге получим следующее полезное соотношение:

$$\int\limits_{s_a}^{s_b} \partial_t \kappa\,ds' = \left.\left(\kappa\int\limits_0^s v\kappa\,ds' + \partial_s v\right)\right|_{s_a}^{s_b}. \qquad (27)$$

Сделаем важное замечание по поводу случая, когда у линии изгиба солитона имеются точки перегиба, в которых кривизна $\kappa\,(s,t)$ обращается в нуль, а единичный вектор нормали $\mathbf{n}_0\,(s,t)$ и проекция $v\,(s,t)$ скорости квазисолитона на $\mathbf{n}_0\,(s,t)$ скачком меняются на противоположные. Чтобы избежать таких скачков, удобно вместо $\mathbf{n}_0\,(s,t)$, положительно определенной кривизны $\kappa(s,t)$ и проекции $v(s,t)$ ввести, соответственно, непрерывные в точках перегиба перпендикулярный опорной кривой $\mathbf{r}_0(s,t)$ единичный вектор $\mathbf{n}_0'(s,t)$, знакопеременную кривизну $\kappa'(s,t)$ и проекцию $v'(s,t)$ скорости солитона на направление вектора $\mathbf{n}_0'(s,t)$. При этом уравнения для $\kappa'(s,t)$ и $v'(s,t)$ будут в точности совпадать с (25), (26). В дальнейшем с целью упрощения записи верхний индекс «\» будем опускать.

Напомним еще раз, что самосогласованная система уравнений (25), (26) адекватно описывает эволюцию изогнутого темного солитона только при выполнении условий (18), которые нарушаются в пределе $v^2 \to 1$ ($\Lambda \to \infty$).

3.1. Кольцевой темный солитон

Рассмотрим частный случай, когда квазиодномерный темный солитон сосредоточен вдоль окружности большого радиуса. При этом скорость v и кривизна κ не зависят от длины дуги s, и уравнения (25), (26) принимают вид

$$\partial_t \kappa = \kappa^2 v, \tag{28}$$

$$\partial_t v = -\frac{\kappa\left(1-v^2\right)}{3}. \tag{29}$$

Для данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений нетрудно найти первый интеграл:

$$v^2 = 1 - \left(1 - v_0^2\right)\left(\kappa/\kappa_0\right)^{2/3}, \tag{30}$$

где v_0 и κ_0 — начальные (при $t=0$) значения скорости и кривизны кольцевого темного солитона. Очевидно, что в зависимости от знака v_0 кольцевой темный солитон может расширяться ($v_0 \le 0$) с уменьшением контраста или сначала с увеличением контраста сжиматься ($v_0 > 0$) до минимального радиуса

$$R_{min} = \frac{\left(1-v_0^2\right)^{3/2}}{\kappa_0},$$

а потом расширяться с уменьшением контраста. В точке поворота ($v=0$) темный солитон становится абсолютно черным.

Используя соотношение (30), можно еще раз проинтегрировать систему уравнений (28), (29) и, в частности, получить для квадрата скорости v^2 кубическое уравнение с коэффициентами, зависящими от времени t:

$$v^6 - 3v^4 + 3\frac{\left(\gamma^2(t)+3\right)}{\left(\gamma^2(t)+4\right)}v^2 - \frac{\gamma^2(t)}{\left(\gamma^2(t)+4\right)} = 0, \tag{31}$$

где

$$\gamma(t) = \frac{\kappa_0 t - v_0\left(3-2v_0^2\right)}{\left(1-v_0^2\right)^{3/2}}$$

— линейная функция времени. Можно показать, что данное кубическое уравнение относительно v^2 всегда имеет всего один действительный корень и два сопряженных комплексных корня. По формуле Кардано действительное решение равно

$$v^2(t) = 1 + \sqrt[3]{\frac{|\gamma| - \sqrt{\gamma^2+4}}{2\left(\gamma^2+4\right)^{3/2}}} - \sqrt[3]{\frac{|\gamma| + \sqrt{\gamma^2+4}}{2\left(\gamma^2+4\right)^{3/2}}}. \tag{32}$$

Полученные аналитические выражения совпадают с результатами работ [36, 37] и хорошо согласуются с численными расчетами в рамках уравнения ГП (1) (см. рис. 2). Это подтверждает справедливость развитых теоретических представлений и показывает, что уравнения (25), (26) действительно хорошо описывают эволюцию параметров изогнутых темных солитонов.

3.2. Автомодельное решение

Как легко видеть, при замене переменных

$$s' = s/\alpha, \quad t' = t/\alpha, \quad \kappa' = \alpha\kappa, \quad v' = v$$

уравнения для скорости v и кривизны κ не изменятся. Другими словами, решения системы (25), (26) будут «подобны», если соответствующие им начальные условия связаны друг с другом соотношениями:

$$\kappa_2(s, t=0) = \alpha\kappa_1(s/\alpha, t=0),$$

$$v_2(s, t=0) = v_1(s/\alpha, t=0).$$

Благодаря такому преобразованию масштабов можно уменьшить количество параметров, от которых зависит сценарий динамики изогнутых темных солитонов.

Тот факт, что одинаковое изменение масштабов независимых переменных s и t не меняет вид уравнений (25), (26), говорит о наличии у этой самосогласованной системы решения, зависящего от одной автомодельной переменной $\zeta = s/(t+t_0)$:

$$v = \upsilon(\zeta), \quad \kappa = \varkappa(\zeta)/(t+t_0), \tag{33}$$

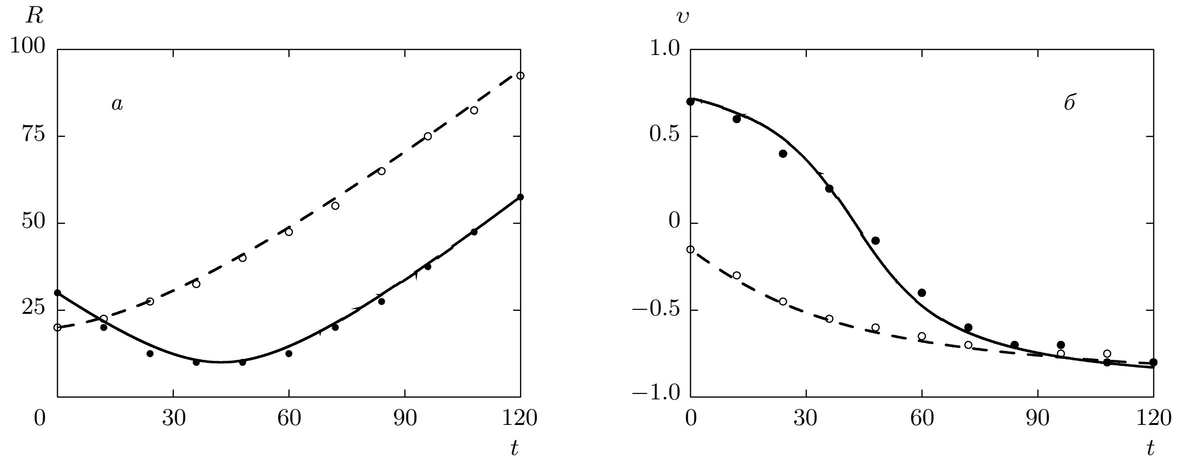

Рис. 2. Зависимости от времени t радиуса кривизны $R = 1/\kappa$ (a) и скорости v кольцевого темного солитона ($б$), рассчитанные с помощью самосогласованной системы уравнений (25), (26) для двух различных начальных условий: $\kappa_1(t=0) = 1/30$, $v_1(t=0) = 0.72$ (сплошная линия); $\kappa_2(t=0) = 1/20$, $v_2(t=0) = -0.15$ (штриховая линия). Темными и светлыми точками отмечены результаты численного моделирования динамики кольцевого темного солитона в рамках уравнения ГП (1) с соответствующими сплошной и штриховой линиям начальными параметрами

где t_0 — произвольная постоянная. Подставляя (33) в систему (25), (26), приходим к уравнениям, которым удовлетворяют функции $\upsilon(\zeta)$ и $\varkappa(\zeta)$:

$$\frac{d(\zeta\varkappa)}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta}\left(\varkappa\int_0^\zeta \upsilon\varkappa\, d\zeta'\right) = -\frac{d^2\upsilon}{d\zeta^2}, \qquad (34)$$

$$\zeta\frac{d\upsilon}{d\zeta} + \left(\int_0^\zeta \upsilon\varkappa\, d\zeta'\right)\frac{d\upsilon}{d\zeta} = \frac{1}{3}\varkappa\left(1-\upsilon^2\right). \qquad (35)$$

Введем новую функцию

$$\Phi(\zeta) = \zeta + \int_0^\zeta \upsilon\varkappa\, d\zeta', \qquad (36)$$

при этом

$$\varkappa = \frac{\dot{\Phi}_\zeta - 1}{\upsilon}, \quad \Phi(\zeta = 0) = 0.$$

Проинтегрировав уравнение (34) по ζ и выполнив ряд преобразований, получим для $\upsilon(\zeta)$ и $\Phi(\zeta)$ следующую автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\upsilon}{d\zeta} = \frac{A\left(1-\upsilon^2\right)}{(1-\upsilon^2) + 3\Phi^2}, \qquad (37)$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = 1 + \frac{3A\Phi\upsilon}{(1-\upsilon^2) + 3\Phi^2}, \qquad (38)$$

где A — постоянная интегрирования уравнения (34), которая, как нетрудно заметить, равна

$$A = \left.\frac{d\upsilon}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}. \qquad (39)$$

Не будем подробно исследовать общие свойства системы (37), (38), а остановимся лишь на анализе ее антисимметричного (относительно точки $\zeta = 0$) решения с $\upsilon(\zeta = 0) = 0$. На рис. 3 приведены соответствующие этому решению зависимости $\upsilon = \upsilon(\zeta)$ и $\varkappa = \varkappa(\zeta)$ при двух значениях параметра $A = 0.75$ и $A = 3$. Видно, что при $\zeta \to \pm\infty$ скорость υ стремится к постоянному значению $\pm\upsilon_0$, являющемуся функцией параметра A:

$$\upsilon \xrightarrow[\zeta\to\pm\infty]{} \pm\upsilon_0(A),$$

причем $|\upsilon_0|$ остается всегда меньше единицы. Чем больше $|A|$, тем ближе $|\upsilon_0|$ к своему предельному значению

$$\lim_{|A|\to\infty} |\upsilon_0| = 1.$$

Отметим также, что при $|\zeta| \to \infty$ функция $\varkappa(\zeta)$ всегда стремится к нулю:

$$\varkappa \xrightarrow[\zeta\to\pm\infty]{} 0.$$

Вблизи центральной точки $\zeta = 0$, когда $|\zeta| \ll |A|$, разложения в ряд Тейлора функций $\upsilon(\zeta)$ и $\varkappa(\zeta)$ начинаются с линейных по ζ слагаемых:

$$\upsilon(\zeta \to 0) \approx A\zeta, \quad \varkappa(\zeta \to 0) \approx 3A\zeta,$$

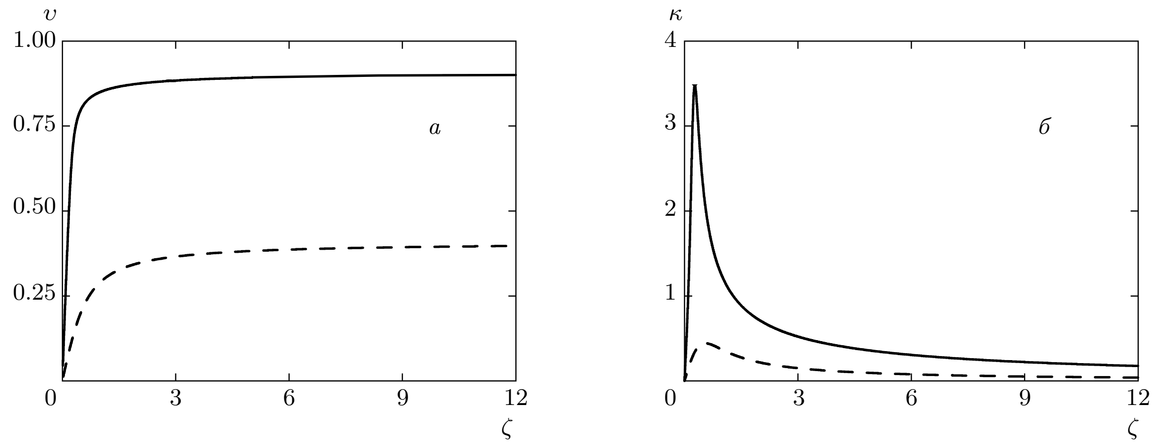

Рис. 3. Зависимости скорости $v = v(\zeta)$ (a) и функции $\varkappa = \varkappa(\zeta)$ ($б$), пропорциональной кривизне, от автомодельной переменной ζ при двух значениях параметра $A = 3$ (сплошная линия), 0.75 (штриховая линия)

а значит, поведение скорости и кривизны соответствующего данному автомодельному решению темного солитона в окрестности точки $s = 0$ будет описываться следующими выражениями:

$$v(s,t) \approx \frac{As}{t+t_0}, \quad \kappa(s,t) \approx \frac{3As}{(t+t_0)^2}. \qquad (40)$$

Нетрудно понять, что формуле (40) соответствует изогнутый солитон, вращающийся относительно покоящейся в пространстве точки $\mathbf{r}_0(s=0,t)$ с угловой скоростью

$$\omega = \frac{A}{t+t_0}. \qquad (41)$$

По существу автомодельные решения вида (33) представляют собой спиральные волны с сингулярностью в центре. Из выражения (41) видно наличие различных режимов вращения:

$$t_0 \lesseqgtr 0, \quad A \lesseqgtr 0.$$

Если $t_0 > 0$, то при $A > 0$ вращение происходит против часовой стрелки, а при $A < 0$ — по часовой. Когда же $t_0 < 0$, на временном интервале $t < |t_0|$ при $A > 0$ солитон вращается по часовой стрелке, а при $A < 0$ — против. Причем при $t_0 > 0$ с ростом t вращение замедляется ($|\omega|$ уменьшается), а при $t_0 < 0$ ($t < |t_0|$) наоборот ускоряется ($|\omega|$ растет до бесконечности при $t \to |t_0|$), что, как показывают численные расчеты, соответствует образованию вихря в БЭК (подробнее см. разд. 4).

В автомодельном решении с увеличивающейся со временем частотой вращения ($t_0 < 0$) скорость солитона v и его кривизна κ при любых $s \neq 0$ имеют разные знаки ($v\kappa < 0$). Такой солитон выгнут в направлении движения и, согласно уравнению (26), обязан ускоряться. С ростом t пространственные масштабы данного автомодельного решения уменьшаются. Когда t достигнет значения $t = |t_0|/2$, размер характерной области изменения скорости вдоль координаты s (длины опорной кривой) сократится ровно в два раза, а сам изогнутый солитон повернется при этом на угол

$$\alpha = \int\limits_0^{|t_0|/2} |A|\,dt/(|t_0|-t) = |A|\ln 2,$$

т. е. при $|A| > 2\pi/\ln 2$ совершается больше одного поворота. Другими словами, при условии $|A| > 2\pi/\ln 2$ можно говорить о медленной в пределах одного оборота перестройке структуры соответствующего автомодельному решению солитона.

В автомодельном изогнутом солитоне с $|A| > 1$ и $t_0 < 0$ глубокие провалы концентрации наблюдаются лишь при $(|t_0|-t)/|s| \gtrsim 2|A|$, что соответствует малым значениям скорости движения ($|v| \lesssim 1/2$). Когда $(|t_0|-t)/|s|$ становится существенно меньше $2|A|$ ($(|t_0|-t)/|s| \to |A|$), солитон расширяется ($|v| \to 1$) и «исчезает». Если t растет, то отрезок дуги $|s|$, где $|v| \lesssim 1/2$, становится все меньше и меньше, пока не сравняется с локальной шириной солитона

$$\Lambda(s,t) = \left(1-v^2\right)^{-1/2}.$$

А это означает, что нарушаются условия (5), выполнение которых необходимо для развитого асимптотического описания динамики темных солитонов в рамках самосогласованной системы уравнений (25), (26).

4. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕМНЫХ СОЛИТОНОВ

4.1. Линейная стадия неустойчивости

При очень слабых модуляциях центральной линии темного солитона и его скорости систему уравнений (25), (26) можно линеаризовать. В итоге получим

$$\partial_t \tilde{\kappa} = \partial_{ss}^2 \tilde{v}, \tag{42}$$

$$\partial_t \tilde{v} = -\tilde{\kappa}\left(1 - v_0^2\right)/3\,, \tag{43}$$

где $\kappa = \epsilon\tilde{\kappa}$, $v = v_0 + \epsilon\tilde{v}$, $\epsilon \ll 1$ — малый параметр, $v_0 = \mathrm{const}$ — скорость невозмущенного темного солитона.

Представляя решение линеаризованной системы (43), (42) в виде

$$\tilde{\kappa} = \mathrm{Re}\left(\bar{\kappa}\exp(iks + pt)\right), \quad \tilde{v} = \mathrm{Re}\left(\bar{v}\exp(iks + pt)\right),$$

находим, что темный солитон неустойчив по отношению к поперечным возмущениям, а инкремент этой неустойчивости p связан с $k = 2\pi/\lambda$ (λ — характерная длина возмущений) соотношением

$$p = k\sqrt{\left(1 - v_0^2\right)/3}. \tag{44}$$

Формула (44) совпадает в «длинноволновом» пределе ($k \ll 1$) с найденным в работе [21] выражением.

Как следует из (44), любые сколь угодно малые возмущения скорости и опорной линии темного солитона нарастают во времени до тех пор, пока не станут существенными нелинейные слагаемые в системе (25), (26). Дальнейшее поведение темных солитонов, как показано ниже, существенно зависит от начальных условий.

4.2. Нелинейная стадия неустойчивости

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ задан темный солитон, локализованный около косинусоиды:

$$x(y) = -X_0 \cos\left(2\pi y/\ell_y\right), \tag{45}$$

где X_0 ($X_0 > 0$) — амплитуда модуляции, ℓ_y — период модуляции. Кривизна κ_0 линии (45) и длина ее дуги s, как функции координаты y, соответственно равны [32]

$$\kappa_0(y) = \frac{X_0\left(2\pi/\ell_y\right)^2 \cos\left(2\pi y/\ell_y\right)}{\left(1 + X_0^2\left(2\pi/\ell_y\right)^2 \sin^2\left(2\pi y/\ell_y\right)\right)^{3/2}}, \tag{46}$$

$$s(y) = \\ = -\int_0^y \sqrt{1 + X_0^2\left(2\pi/\ell_y\right)^2 \sin^2\left(2\pi y'/\ell_y\right)}\, dy'. \tag{47}$$

При этом в (46) под кривизной мы понимаем знакопеременную величину.

Если амплитуда модуляции X_0 мала по сравнению с пространственным периодом ℓ_y, т. е. выполнено условие $(2\pi X_0/\ell_y) \ll 1$, то, пренебрегая слагаемыми второго и более высоких порядков малости по $(2\pi X_0/\ell_y)$, получим

$$\kappa(s, t = 0) \approx \kappa_0(s) = \\ = X_0\left(2\pi/\ell_y\right)^2 \cos\left(2\pi s/\ell_y\right), \tag{48}$$

где учтено, что $s \approx y$.

Для определенности будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ скорость (ширина) темного солитона неизменна вдоль линии, около которой он локализован[2)]:

$$v(s, t = 0) = v_0 = \mathrm{const}.$$

Как показывают приведенные ниже результаты численного моделирования, выполненные в рамках исходного уравнения ГП (1), сценарии развития модуляционной неустойчивости для черных ($v_0 = 0$) и серых ($v_0 \neq 0$) солитонов существенно различаются. Поэтому имеет смысл рассмотреть их раздельно.

4.2.1. Неустойчивость «черных» солитонов

Для изначально покоящегося черного солитона с $v_0 = 0$ и изогнутого вдоль косинусоиды (45) точки ($x = 0, y_{(m_y \pm 1/4)} = (m_y \pm 1/4)\ell_y$, $m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) остаются неподвижными. В процессе своей эволюции солитон поворачивается относительно них. Причем вращение вокруг точек $\left(x = 0, y_{(m_y + 1/4)} = (m_y + 1/4)\,\ell_y\right)$ происходит по часовой стрелке, а относительно точек

2) В качестве начального распределения можно задать и возмущение скорости солитона, оставляя невозмущенной его опорную линию $x(y) = 0$, картина неустойчивости от этого не изменится.

$\left(x=0, y_{(m_y-1/4)}=(m_y-1/4)\,\ell_y\right)$ — против часовой стрелки. Вначале (рис. 4*а,б,в*) такое вращение просто соответствует экспоненциальному росту с инкрементом (44) возмущения (45) (моменты времени $t=15$). Затем на динамику солитона начинает оказывать влияние нелинейность (рис. 4*г,д,е*), которая приводит к отрыву одних частей солитона от неподвижных точек и захвату других в режим самоускоряющегося закручивания, соответствующего формированию вихрей (рис. 4*ж,з,и*).

Из решения линеаризованной системы уравнений (42), (43) с начальным условием (48) для черного солитона ($v_0=0$) вытекает, что в окрестности неподвижных точек (например, $s_{1/4}$) разложения кривизны $\kappa(s,t)$ и скорости $v(s,t)$ начинаются с линейных по $\delta s=\left(s-s_{1/4}\right)$ слагаемых

$$\kappa(s,t)=\chi_1(t)\,\delta s, \quad v(s,t)=\omega_t(t)\,\delta s, \tag{49}$$

где

$$\chi_1(t)=-X_0\left(2\pi/\ell_y\right)^3 \operatorname{ch}\left(2\pi t\Big/\sqrt{3}\ell_y\right), \tag{50}$$

$$\omega_1(t)=\left(X_0\Big/\sqrt{3}\right)\left(2\pi/\ell_y\right)^2 \operatorname{sh}\left(2\pi t\Big/\sqrt{3}\ell_y\right). \tag{51}$$

На временах, когда $\left(2\pi t/\sqrt{3}\ell_y\right)\gg 1$, уравнение (51) соответствует нарастающей по экспоненциальному закону частоте вращения $\omega_1(t)$[3]. Такой рост продолжается, пока не станут существенными нелинейные слагаемые в системе уравнений (25), (26). Для оценок можно положить, что переход на нелинейный режим неустойчивости начинается с момента $t=t_{**}$, в который модуль максимальной скорости солитона (при $s=0$) станет сравним с $1/2$, т. е. при

$$\left(2\pi X_0\Big/\sqrt{3}\ell_y\right)\exp\left(2\pi t_{**}\Big/\sqrt{3}\ell_y\right)\sim 1.$$

При этом

$$\begin{gathered}\chi_1(t_{**})\approx-\sqrt{3}\left(2\pi/\ell_y\right)^2\Big/2,\\ \omega_1(t_{**})\approx\pi/\ell_y\,.\end{gathered} \tag{52}$$

[3] Выберем в (27) в качестве s_a и s_b значения дуги опорной кривой, отвечающие неподвижным точкам и учтем, что в них кривизна обращается в нуль $\left(\kappa\left(t,s_{a(b)}\right)=0\right)$. Тогда из (27) получаем соотношение

$$\omega_1(t)=\frac{1}{2}\int\limits_{s_a}^{s_b}\partial_t\kappa\,ds',$$

подставляя в которое решение линеаризованных уравнений $\kappa(s,t)=\kappa_0(s)\operatorname{ch}\left(2\pi t\Big/\sqrt{3}\ell_y\right)$, также приходим к выражению (51).

Результаты численного моделирования показывают, что при $t\gtrsim t_{**}$ вокруг неподвижных точек начинают формироваться автомодельные структуры (рис. 4) с соответствующими (52) параметрами

$$A=\frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad t_0=-\frac{\ell_y}{2\pi\sqrt{3}}. \tag{53}$$

За один оборот пространственный масштаб такого автомодельного решения изменяется в $2\pi\sqrt{3}\times\times\exp\left(4\pi\sqrt{3}\right)/\ell_y$ раз, а область глубокого провала концентрации значительно сокращает свои размеры (см. рис. 4).

В качестве совершенно другого развития модуляционной неустойчивости рассмотрим изогнутый «черный» солитон с достаточно большой начальной глубиной модуляции (рис. 5). В этом случае около неподвижных точек тоже формируется автомодельное решение, но с параметром $A>1$. Ему соответствуют повороты без заметного изменения пространственных масштабов, что приводит к эффекту многократного «восстановления» темного солитона, связанному с выстраиванием вдоль одной линии «вращающихся» около неподвижных точек его «отрезков».

4.2.2. Неустойчивость «серых» солитонов

Для серого солитона с отличной от нуля начальной скоростью v_0 ($v_0\neq 0$) неустойчивость возмущения опорной кривой развивается иначе. Вначале, как уже отмечалось выше, это возмущение нарастает с инкрементом (44). Для определенности будем считать, что $v_0>0$. Тогда на той части линии изгиба темного солитона, где $\kappa(s,t)<0$, солитон будет тормозиться («чернеть»), а на той части, где $\kappa(s,t)>0$, — ускоряться («светлеть»). Как только отличие скорости солитона v от v_0 станет порядка v_0 ($|v-v_0|\sim v_0$), линейная стадия заканчивается и косинусоидальное возмущение начинает сильно деформироваться. Это сопровождается существенным изменением кривизны, и, следовательно, сильным ускорением или замедлением темного солитона. Солитон быстрее всего замедляется вдоль прямых $y_{m_y}=m_y\ell_y$ ($m_y=0,\pm1,\pm2,\ldots$), на которых начальная кривизна κ_0 отрицательна, а ее модуль максимален (рис. 6*а,б,в*). Именно в точках с ординатами $y_{m_y}=m_y\ell_y$ образуются самые глубокие провалы концентрации конденсата и происходит зарождение вихревых структур после того, как эти точки изначально «серого» солитона остановятся, и плотность БЭК станет равной нулю. Численные расчеты (рис. 6) показывают, что вихри всегда образуются

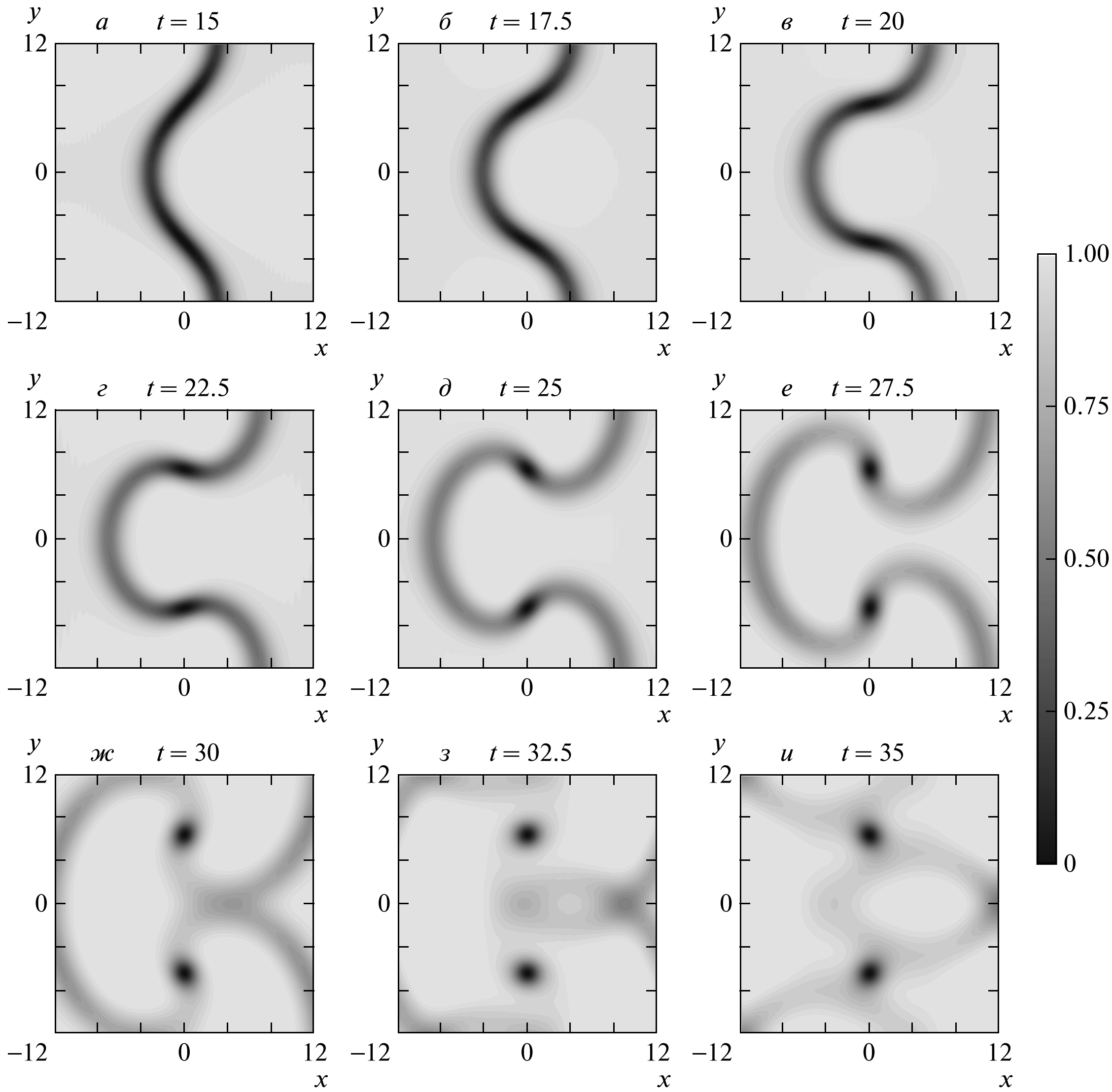

Рис. 4. Мгновенные снимки распределения концентрации БЭК в изначально «черном» солитоне $v_0 = 0$, локализованном в момент времени $t = 0$ около линии (45) с глубиной модуляции $X_0 = 0.9$ и периодом $\ell_y = 25.6$. Видно, как солитон, закручиваясь около неподвижных точек $\left(x = 0, y_{(m_y \pm 1/4)} = (m_y \pm 1/4)\,\ell_y\right)$ $(m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ разрушается с образованием вихрей с чередующейся полярностью («вихрь», «антивихрь»). На рисунке представлен только один период промодулированного солитона

парами и расположены симметрично относительно прямых $y_{m_y} = m_y \ell_y$.

Пусть в момент остановки $t = t_*$ точки $s = s_*$ кривизна линии темного солитона равна $\kappa\,(t_*, s_*) = \kappa_*$. В силу симметрии задачи скорость $v\,(s,t)$ в малой окрестности $s = s_*$ имеет распределение

$$v\,(s, t = t_*) \approx \beta\,(s - s_*)^2\,.$$

С другой стороны из уравнений (25), (26) следует, что кривизна $\kappa\,(s,t)$ и скорость $v\,(s,t)$ темного солитона вблизи точки $s = s_*$ сразу же после его остановки изменяются по законам

$$\kappa\,(s, t > t_*) \approx \kappa_* + 2\beta\,(t - t_*)\,, \tag{54}$$

$$v\,(s, t > t_*) \approx \beta\,(s - s_*)^2 - \kappa_*\,(t - t_*)/\,3. \tag{55}$$

Как видно из уравнения (55), при $t > t_*$ у серого солитона появляются две точки, в которых его скорость (а значит, и концентрация БЭК) равна нулю.

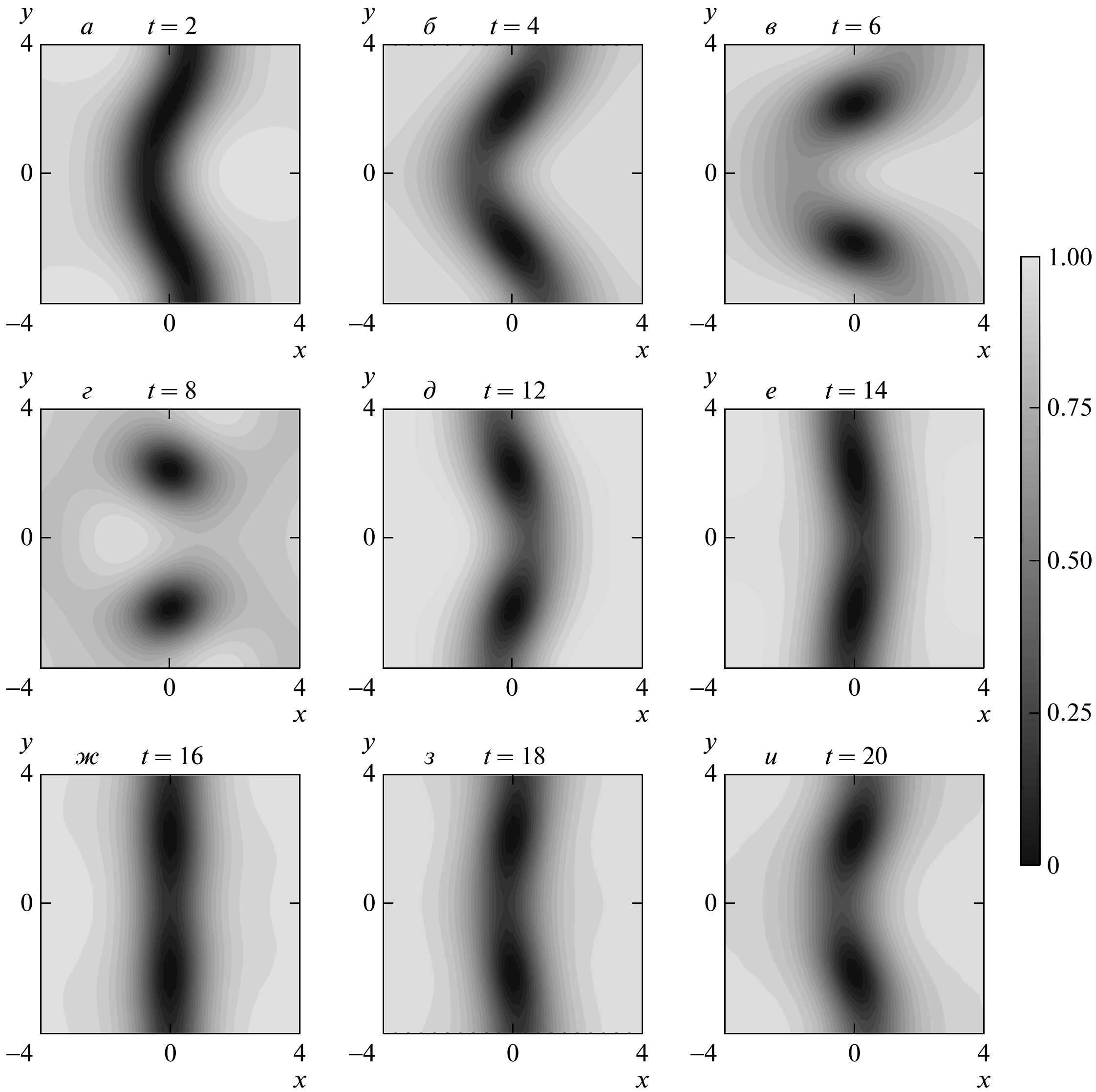

Рис. 5. То же, что и на рис. 4, но «черный» солитон в начальный момент времени $t = 0$ имеет амплитуду модуляции $X_0 = 0.6$ и период $\ell_y = 25.6/3$. Уменьшение периода ℓ_y привело к более быстрому вращению солитона около неподвижных точек $\left(x = 0, y_{\left(m_y \pm 1/4\right)} = \left(m_y \pm 1/4\right)\ell_y\right)$ $(m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, несмотря на меньшую амплитуду модуляции, и, как следствие, к эффекту многократного «восстановления» структуры похожей на квазиодномерный изогнутый темный солитон

Эти точки «разбегаются» друг относительно друга со скоростью

$$v_d = \partial_t (\triangle s) = \sqrt{\kappa_* / 12\beta (t - t_*)}, \qquad (56)$$

где

$$\triangle s = \sqrt{\kappa_* (t - t_*) / 3\beta}$$

— расстояние между нулями концентрации конденсата (топологическими дефектами). В конечном итоге положение нулей концентрации БЭК стабилизируется и формируется вихревая пара (рис. 6*ж,з,и*). Эта стабилизация наступает, когда топологические дефекты сливаются с точками перегиба опорной кривой, а формирование вихревой пары происходит через выход на автомодельное решение.

4.2.3. Особенности неустойчивости «околозвуковых» солитонов

Пусть при $t = 0$ около линии (45) задан серый солитон, движущийся со скоростью, близкой к еди-

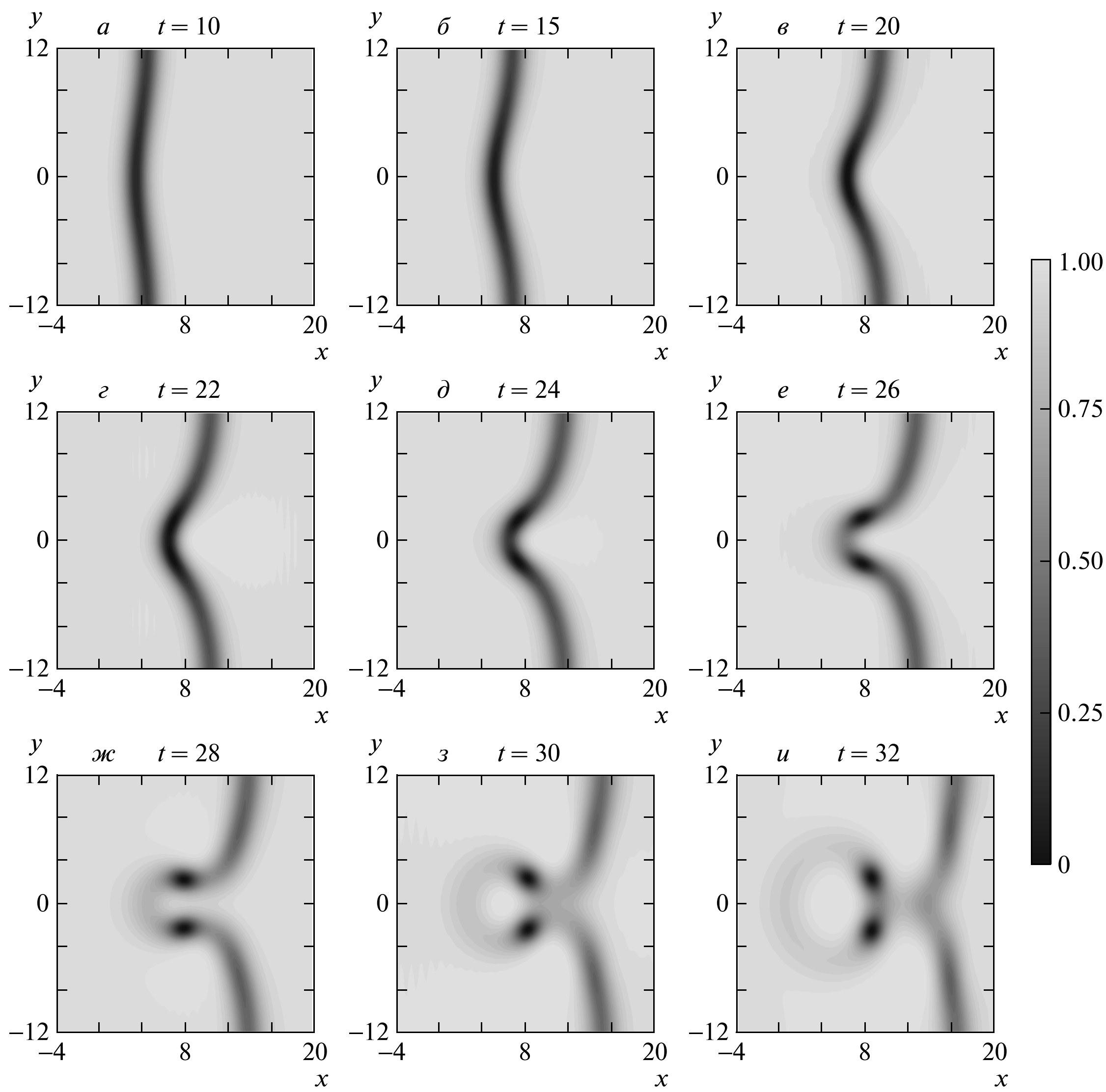

Рис. 6. То же, что и на рис. 4, но для изначально «серого» солитона с $v_0 = 0.4$, амплитудой модуляции $X_0 = 0.3$ и периодом $\ell_y = 25.6$. При распространении на линиях $y = \ell_y m_y$ ($m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) солитон сначала останавливается (в момент времени (*г*) $t = 22$). Затем образуются две расходящиеся точки, в которых концентрация равна нулю ((*д*) $t = 24$, (*е*) $t = 26$, (*ж*) $t = 28$). В конечном итоге формируется пара «вихрь–антивихрь» ((*з*) $t = 30$, (*и*) $t = 32$)

нице:

$$v\,(s, t = 0) = v_0 = 1 - \epsilon \tilde{v}_0,$$

где $\epsilon \tilde{v}_0 = \mathrm{const}$ — отличие начальной скорости солитона от ее предельного значения, ϵ ($\epsilon \ll 1$) — малый параметр.

Будем искать решение системы (25), (26) в виде разложения по малому параметру ϵ:

$$\kappa = \kappa^{(0)} + \epsilon \kappa^{(1)} + \ldots\,,$$

$$v = 1 - \epsilon \tilde{v} = 1 - \epsilon \left(\tilde{v}^{(0)} + \epsilon \tilde{v}^{(1)} + \ldots \right),$$

где начальная кривизна $\kappa^{(0)}\,(t = 0) = \kappa_0$ определяется выражением (48). Подставляя данные разложения в систему (25), (26) и приравнивая члены одинакового порядка малости по ϵ, получаем

$$\partial_t K^{(0)} - K^{(0)} \partial_s K^{(0)} = 0, \qquad (57)$$

$$\partial_t \tilde{v}^{(0)} - K^{(0)} \partial_s \tilde{v}^{(0)} = 2 \tilde{v}^{(0)} \partial_s K^{(0)} \Big/ 3. \qquad (58)$$

Здесь введена новая функция

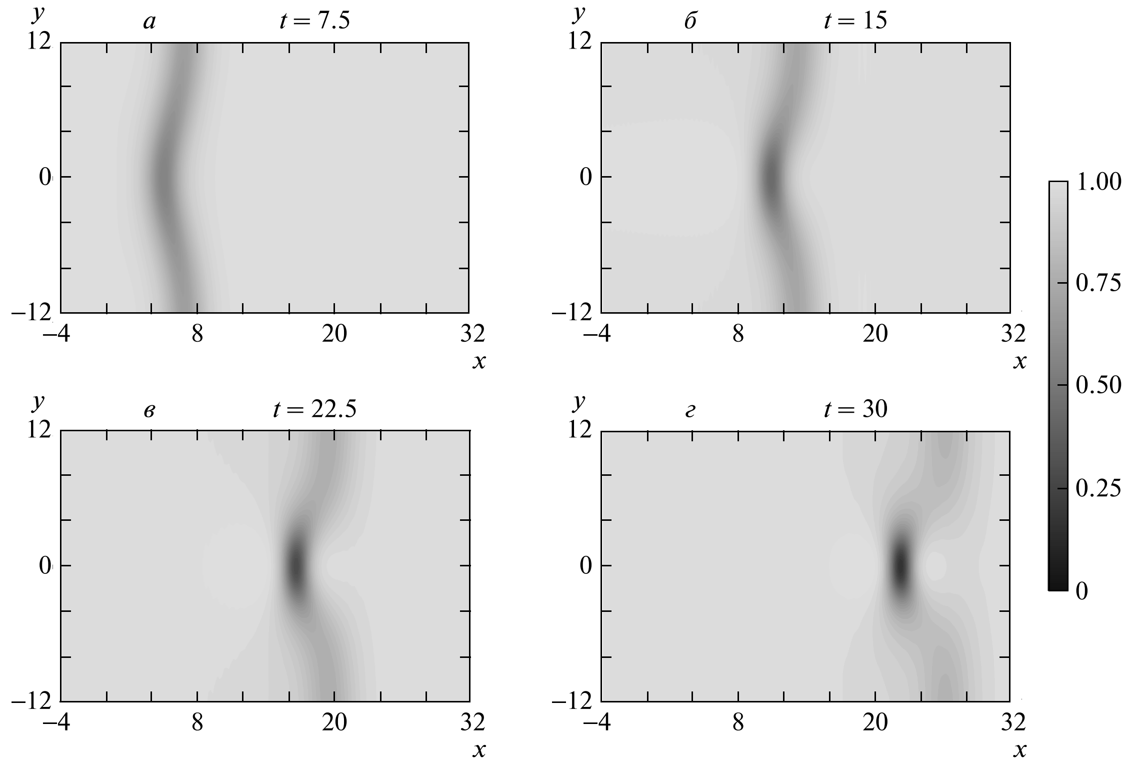

Рис. 7. То же, что и на рис. 4, но для изначально «серого» солитона с $v_0 = 0.8$, амплитудой модуляции $X_0 = 0.9$ и периодом $\ell_y = 25.6$. Данный солитон можно считать «околозвуковым». В процессе развития неустойчивости около линий $y = \ell_y m_y$ ($m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) формируются устойчивые двумерные безвихревые структуры, похожие на солитоны уравнения Кадомцева – Петвиашвили

$$K^{(0)} = \int\limits_0^s \kappa^{(0)} ds \left(\kappa^{(0)} = \partial_s K^{(0)}\right).$$

Уравнения (57), (58) можно решить методом характеристик. Учитывая «начальные» условия для солитона, нетрудно получить [38], что

$$\kappa^{(0)}(s,t) = \left(1 - \frac{dK_0^{(0)}(\eta)}{d\eta} t\right)^{-1} \frac{dK_0^{(0)}(\eta)}{d\eta}, \qquad (59)$$

$$\tilde{v}^{(0)}(s,t) = \tilde{v}_0 \left(1 - \frac{dK_0^{(0)}(\eta)}{d\eta} t\right)^{-2/3}, \qquad (60)$$

где

$$K_0^{(0)}(s) = K^{(0)}(s, t=0) = X_0 \left(2\pi/\ell_y\right) \sin\left(2\pi s/\ell_y\right),$$

а переменная η связана с s и t соотношением

$$s = \eta - K_0^{(0)}(\eta)\, t.$$

Как видно из уравнений (59), (60), с ростом t в точках, где

$$\frac{dK_0^{(0)}}{d\eta} > 0,$$

кривизна $\kappa^{(0)}$ увеличивается. Причем самый быстрый рост $\kappa^{(0)}$ соответствует точкам с $y_{m_y} = m_y \ell_y$, в которых $K_0^{(0)}(\eta)$ обращается в нуль, а $dK_0^{(0)} \Big/ d\eta$ достигает максимального значения. Естественно, что именно в этих точках при

$$t \to t_c = \left(\ell_y / 2\pi\right)^2 X_0^{-1}$$

условия применимости приближенного решения (59), (60) раньше всего нарушаются, т. е. перестает выполняться либо неравенство

$$\epsilon \tilde{v}^{(0)} \ll 1,$$

либо

$$\kappa^{(0)} \Big/ \sqrt{2\epsilon \tilde{v}^{(0)}} \ll 1.$$

В первом случае солитон успевает остановиться и его радиус кривизны $R = 1/|\kappa|$ в любой момент времени остается существенно больше его ширины. Здесь имеет место рассмотренный выше эффект разбегания точек нулевой концентрации БЭК с последующим образованием вихревых пар. Во втором случае (см. рис. 7) изогнутый квазиодномерный солитон никогда не останавливается, и из него формируются двумерные солитоны Кадомцева – Петвиашвили [15, 39–41].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, динамика изогнутых темных солитонов в БЭК хорошо описывается с помощью полученной в работе самосогласованной системы уравнений для локальной скорости солитона и кривизны опорной линии, около которой он сосредоточен. Это описание работает до тех пор, пока ширина провала концентрации БЭК мала по сравнению с радиусом кривизны опорной кривой. В местах, где нарушаются условия применимости предложенного асимптотического подхода, могут возникать вихри или двумерные солитоны Кадомцева – Петвиашвили.

Самосогласованная система уравнений для скорости и кривизны позволяет изучить поведение изогнутых темных солитонов на нелинейной стадии поперечной неустойчивости и наглядно проанализировать, как рождаются вихревые структуры. Нами были, в частности, найдены автомодельные решения, соответствующие процессу вихреобразования.

Нелинейная стадия модуляционной неустойчивости развивается по-разному для изначально покоящихся («черных») и движущихся («серых») солитонов.

В первом случае модуляционная неустойчивость приводит к формированию цепочки из эквидистантно расположенных покоящихся вихрей с чередующимися по знаку топологическими зарядами. Причем существуют режимы, в которых цепочка вихрей окончательно образуется лишь после многократного восстановления квазисолитонной структуры.

В «серых» же солитонах топологические дефекты зарождаются из точек опорной линии, где концентрация БЭК впервые проваливается до нуля. В конечном итоге возникает семейство движущихся пар «вихрь–антивихрь».

Если начальная скорость «серого» солитона стремится к скорости звука в конденсате, нелинейная стадия неустойчивости заканчивается возникновением локализованных безвихревых структур, похожих на двумерные солитоны Кадомцева – Петвиашвили.

Справедливость развитых теоретических представлений подтверждена и проиллюстрирована непосредственным численным моделированием эволюции изогнутых темных солитонов, выполненным в рамках уравнения ГП.

Авторы благодарны А. М. Камчатнову за полезные обсуждения результатов статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-97059) и Федерального агентства по образованию (государственный контракт № П189).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Tsubota, J. Phys.: Condens. Matter **21**, 164207 (2009).
2. T.-L. Horng, C.-H. Hsueh, S.-W. Su, Y.-M. Kao, and S.-C. Gou, Phys. Rev. A **80**, 023618 (2009).
3. Z. Dutton, M. Budde, C. Slowe, and L. V. Hau, Science **293**, 663 (2001).
4. J. J. Chang, P. Engels, and M. A. Hoefer, Phys. Rev. Lett. **101**, 170404 (2008).
5. D. L. Feder, M. S. Pindzola, L. A. Collins, B. I. Schneider, and C. W. Clark, Phys. Rev. A **62**, 053606 (2000).
6. J. Brand and W. P. Reinhardt, Phys. Rev. A **65**, 043612 (2002).
7. B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. A. Regal, D. L. Feder, L. A. Collins, C. W. Clark, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **86**, 2926 (2001).
8. S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).
9. K. Bongs, S. Burger, D. Hellweg, M. Kottke, S. Dettmer, T. Rinkleff, L. Cacciapuoti, J. Arlt, K. Sengstock, and W. Ertmer, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **5**, S124 (2003).
10. E. A. Cornell, *Proc. of Conference on Nonlinear Waves, Integrable Systems and Their Applications* (2005); http://jilawww.colorado.edu/bec/papers.html.
11. G. A. El and A. M. Kamchatnov, Phys. Lett. A **350**, 192 (2006).
12. G. A. El, A. Gammal, and A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. Lett. **97**, 180405 (2006).
13. A. M. Kamchatnov and L. P. Pitaevskii, Phys. Rev. Lett. **100**, 160402 (2008).
14. G. A. El, A. M. Kamchatnov, V. V. Khodorovskii, E. S. Annibale, and A. Gammal, Phys. Rev. E **80**, 046317 (2009).

15. В. А. Миронов, А. И. Смирнов, Л. А. Смирнов, ЖЭТФ **137**, 1004 (2010).

16. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978).

17. E. P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).

18. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **40**, 646 (1961).

19. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов*, Физматлит, Москва (2005).

20. N. P. Proukakis, N. G. Parker, D. J. Frantzeskakis, and C. S. Adams, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6**, S380 (2004).

21. Е. А. Кузнецов, С. К. Турицын, ЖЭТФ **94**, 119 (1988).

22. C. T. Law and G. A. Swartzlander, Opt. Lett. **18**, 586 (1993).

23. G. S. McDonald, K. S. Syed, and W. J. Firth, Opt. Commun. **95**, 281 (1993).

24. C. Josserand and Y. Pomeau, Europhys. Lett. **30**, 43 (1995).

25. D. E. Pelinovsky, Yu. A. Stepanyants, and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. E **51**, 5016 (1995).

26. Yu. S. Kivshar and D. E. Pelinovsky, Phys. Rep. **331**, 117 (2000).

27. V. Tikhonenko, J. Christou, B. Luther-Davies, and Yu. S. Kivshar, Opt. Lett. **21**, 1129 (1996).

28. A. V. Mamaev, M. Saffman, and A. A. Zozulya, Phys. Rev. Lett. **76**, 2262 (1996).

29. A. V. Mamaev, M. Saffman, D. Z. Anderson, and A. A. Zozulya, Phys. Rev. A **54**, 870 (1996).

30. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **64**, 1627 (1973).

31. Yu. S. Kivshar and B. Luther-Davies, Phys. Rep. **298**, 81 (1998).

32. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1968).

33. В. А. Давыдов, В. С. Зыков, А. С. Михайлов, УФН **161**, 45 (1991).

34. R. E. Goldstein and D. M. Petrich, Phys. Rev. Lett. **67**, 3203 (1991).

35. K. Nakayama, H. Segur, and M. Wadati, Phys. Rev. Lett. **69**, 2603 (1992).

36. Yu. S. Kivshar and X. Yang, Phys. Rev. E **50**, R40 (1994).

37. G. Theocharis, P. Schmelcher, M. K. Oberthaler, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, Phys. Rev. A **72**, 023609 (2005).

38. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).

39. G. Huang, V. A. Makarov, and M. G. Velarde, Phys. Rev. A **67**, 023604 (2003).

40. S. Tsuchiya, F. Dalfovo, and L. P. Pitaevskii, Phys. Rev. A **77**, 045601 (2008).

41. S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its, and V. B. Matveev, Phys. Lett. A **63**, 205 (1977).