

# ЛАМИНАРНОЕ ПЛАМЯ И ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНОМ ПОТОКЕ

*М. Л. Зайцев\**, *В. Б. Аккерман\*\**

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук  
115191, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 24 июня 2010 г.

Полная система гидродинамических уравнений, описывающих развитие неустойчивости фронта реакции в двумерном потоке в обратном направлении времени, сведена к замкнутой системе поверхностных уравнений с использованием переменных Лагранжа и интегралов движения. Полученная система позволяет исследовать процессы внутри фронта, не решая при этом полную систему уравнений гидродинамики и химической кинетики. В адиабатическом приближении демонстрируется, как учесть вызванные этим движением колебания плотности газа.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Большой научный интерес представляет поиск единого уравнения, описывающего химическое равновесие и движение фронта реакции [1]. При этом особое внимание уделяется присущей фронту химической реакции (например, горения) гидродинамической неустойчивости Дарье–Ландау, вызванной тепловым расширением газа при экзотермическом процессе [1–8]. Действительно, газообразное топливо быстро натекает и стораеет в тонком слое газа, превращаясь вследствие сильного энерговыделения в газ с существенно большей температурой (и меньшей плотностью). Для типичных углеводородных пламен скачок плотности на фронте весьма велик,  $\theta = \rho_f / \rho_b = 5\text{--}10$ , где  $\rho_f$  и  $\rho_b$  — соответственно плотности исходного и конечного продуктов [1]. В результате дополнительный объем газа, порожденный тепловым расширением, толкает топливо по нормали к каждой локальной точке поверхности фронта реакции, заставляя пламя двигаться самым причудливым образом.

Уравнение фронта горения сначала было получено в приближении слабо искривленного пламени и/или малого теплового расширения при горении [8–11]. В последнее время появились работы, где это ограничение снимается [12–14]. Прямое численное моделирование процесса горения сильно затруднено

разностью характерных химических и гидродинамических размеров, соответственно ( $10^{-3}\text{--}10^{-2}$ ) мм и (0.1–1) м [6, 15]. В данной работе мы выводим соответствующие уравнения пламени в двумерном потоке с минимальными ограничениями, позволяющими учесть влияние звука на развитие (или затухание) неустойчивости Дарье–Ландау, методом, отличным от уже существующих. Понимание динамики распространения пламен позволило бы глубже понять механизм их развития и обнаружить новые эффекты и явления.

В работе [16] была выведена аналогичная система в трехмерном случае. Но в случае двумерного потока развитый там метод не применим. Полученные нами результаты дополняют результаты работы [16] и позволяют в простом двумерном случае исследовать фронт реакции и все его основные свойства, важные в приложениях.

## 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ФРОНТА РЕАКЦИИ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Не ограничивая общности, рассмотрим распространение двумерного бесконечно тонкого, слабо искривленного фронта пламени в потенциальном внешнем потоке, т. е.  $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ ,  $\Delta\varphi = 0$  (см. рис. 1). Обозначим все величины перед их общей границей знаком «–», а за ней — знаком «+». Аналогично работе [11] предположим, что газодинамика го-

\*E-mail: mlzaytsev@gmail.com

\*\*E-mail: slava.akkerman@gmail.com

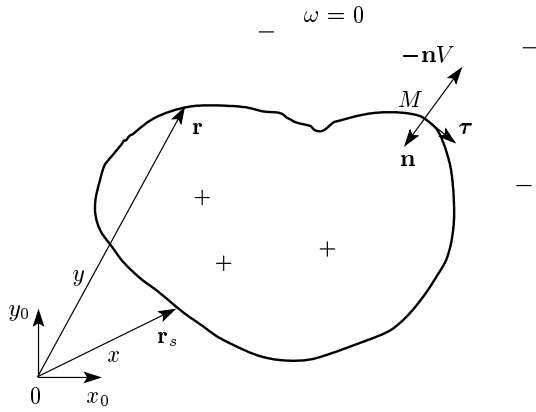


Рис. 1. Фронт пламени в двумерном потоке

рения характеризуется пространственным масштабом  $R$  (это может быть радиус трубы, ширина двумерного канала, радиус сферической камеры сгорания и т. д.). Введем безразмерные величины: скорость  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/U_f$ , координаты  $\mathbf{r} = \mathbf{x}/R$  и давление  $P = (\Pi - \Pi_f)/\rho_f U_f^2$ , где  $\rho_f$  и  $\Pi_f$  — соответственно плотность и давление в топливе бесконечно далеко от фронта, а  $U_f$  — нормальная скорость плоского фронта. Время  $t$  приведем к безразмерному виду с помощью величины  $R/U_f$ . Течение газа вне фронта предполагается несжимаемым и невязким, но допускается неравномерное адиабатическое нагревание продуктов горения. Тогда гидродинамические уравнения принимают вид [2]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left( \vartheta P + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{u}$  — поле скоростей,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  — завихренность,  $\vartheta$  — безразмерная температура, причем  $\vartheta = 1$  в топливе и  $\vartheta = \theta = \rho_-/\rho_+ = \rho_f/\rho_b$  в сгоревшем газе, а  $s$  — энтропия газа. Граничные условия на поверхности фронта, следующие из законов сохранения, имеют вид [11]

$$\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = (\theta - 1)\mathbf{n}, \quad (5)$$

$$P_+ - P_- = 1 - \theta, \quad (6)$$

$$V = 1 - u_{n-}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{n}$  — внутренняя нормаль, а  $V$  — проекция скорости фронта на отрицательное направление вектора

$\mathbf{n}$ . Скорости  $u_{n-} = \partial\varphi/\partial n = 1 - V$  и  $\mathbf{u}_\tau = \partial\varphi/\partial\tau$  связаны между собой формулой Грина [17]:

$$\pi\varphi(\mathbf{r}, t) = \oint \left[ \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial n_s} \ln |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}| - \varphi(\mathbf{r}_s, t) \mathbf{n}_s \cdot \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^2} \right] dl(\mathbf{r}_s). \quad (8)$$

Тогда из уравнений гидродинамики (1)–(4) и условий на фронте (5)–(7) следует, что для любой точки на поверхности фронта реакции

$$\frac{d\varphi}{dt} + u_{n-} + \frac{1}{2}(u_\tau^2 - u_{n-}^2) + P = 0, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\theta - 1}{\theta} [\mathbf{n} \times \nabla P] = \frac{\theta - 1}{\theta} \frac{\partial P}{\partial \tau} [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}]. \quad (10)$$

Для простоты здесь и далее полная производная определена по формуле [18, 19]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial n}. \quad (11)$$

Предположим, что перед фронтом энтропия  $s_- = \text{const}$ . Из второго начала термодинамики и закона Гесса для любой точки на фронте также находим [2]

$$s_+ = \frac{1 - \theta}{\theta} P + \text{const}. \quad (12)$$

Пусть теперь для определенности выполняются общие уравнения гидродинамики и химической кинетики. В этом случае пламя будет тонкой областью (поверхностью разрыва), где физические величины претерпевают значительные изменения. Перейдем взаимно однозначно к лагранжевым переменным начального положения частиц газа и времени  $\mathbf{r}_0, t$  (т. е. к разметке)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad \text{и} \\ \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}_0|_{t=0} = \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (13)$$

Легко показать, что при этом выполняется уравнение [16]

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{r}_0 = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим уравнения Эйлера (1)–(4) в области сгоревшего газа. Из уравнений (2) и (4) имеем в области за фронтом в пределе бесконечно тонкого фронта

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial y} &= \\ = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt_L} = 0 &\Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_x \frac{\partial s}{\partial x} + u_y \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{ds}{dt_L} = 0 \Rightarrow s = s_0(x_0, y_0), \quad (16)$$

где  $\omega_0(x_0, y_0)$  и  $s_0(x_0, y_0)$  — начальные распределения завихренности и энтропии в области сгоревшего газа, а  $d/dt_L$  — производная по времени в переменных Лагранжа (13). Из уравнения неразрывности следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\rho}{dt_L} + \rho \left( \frac{\partial(u_x, y)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(x, u_y)}{\partial(x, y)} \right) &= 0, \\ \frac{d\rho}{dt_L} + \frac{\rho}{\Delta} \frac{d\Delta}{dt_L} &= 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\rho \Delta = \rho \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} = \rho_0(\mathbf{r}_0). \quad (17)$$

Якобиан преобразования переменных (13),  $\Delta \sim \theta$ , внутри фронта ограничен. Значит, объем любой частицы внутри пламени при преобразовании координат (13) сильно не меняется (в силу того, что элемент объема изменяется немного, в  $\Delta$  раз). Следовательно, в пределе бесконечно тонкого фронта область горения является поверхностью разрыва как в пространстве  $(\mathbf{r}, t)$ , так и пространстве переменных Лагранжа  $(\mathbf{r}_0, t)$ .

Из уравнений (14)–(17) для любой точки  $M(x_0(x, y, t), y_0(x, y, t))$  на задней поверхности фронта, движущейся со скоростью  $-\mathbf{n}V$  (см. рис. 1), имеем

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega_0}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial \omega_0}{\partial y_0} \frac{dy_0}{dt}, \quad (18)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s_0}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial s_0}{\partial y_0} \frac{dy_0}{dt}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \frac{\partial x_0}{\partial t} - V \frac{\partial x_0}{\partial n} = -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - (u_n + V) \frac{\partial x_0}{\partial n} = \\ &= -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - \theta \frac{\partial x_0}{\partial n}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= \frac{\partial y_0}{\partial t} - V \frac{\partial y_0}{\partial n} = -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} - (u_n + V) \frac{\partial y_0}{\partial n} = \\ &= -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} - \theta \frac{\partial y_0}{\partial n}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(\tau, n)} = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \frac{\partial y_0}{\partial n} - \frac{\partial x_0}{\partial n} \frac{\partial y_0}{\partial \tau} = 1. \quad (22)$$

Мы видим, что система (18)–(22) линейна относительно величин  $dx_0/dt$ ,  $dy_0/dt$ ,  $\partial x_0/\partial n$  и  $\partial y_0/\partial n$ . Исключая их из системы (18)–(22), находим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_0} & \frac{\partial \omega_0}{\partial y_0} & 0 & 0 & \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{\partial s_0}{\partial x_0} & \frac{\partial s_0}{\partial y_0} & 0 & 0 & \frac{ds}{dt} \\ 1 & 0 & \theta & 0 & -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \\ 0 & 1 & 0 & \theta & -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial y_0}{\partial \tau} & \frac{\partial x_0}{\partial \tau} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

Фактически условие (23) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка для определения  $dP/dt$  вдоль фронта, которое может быть решено аналитически. Приведем вид и решение этого уравнения. После подстановки (10) и (12) в выражение (23) и учитывая [16], что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial \tau} &= \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla P) = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \cdot \nabla P + \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\nabla P}{dt} = \\ &= \left( \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \cdot \mathbf{n} \right) \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\nabla P}{dt} = \\ &= -\frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \tau} - V \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{dP}{dt}, \end{aligned}$$

находим уравнение для  $dP/dt$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_0} & \frac{\partial \omega_0}{\partial y_0} & 0 & 0 & \frac{\theta-1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{dP}{dt} \\ \frac{\partial s_0}{\partial x_0} & \frac{\partial s_0}{\partial y_0} & 0 & 0 & -\frac{\theta-1}{\theta} \frac{dP}{dt} \\ 1 & 0 & \theta & 0 & -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \\ 0 & 1 & 0 & \theta & -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial y_0}{\partial \tau} & \frac{\partial x_0}{\partial \tau} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

которое может быть представлено в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{dP}{dt} + A(\tau) \frac{dP}{dt} + B(\tau) = 0. \quad (25)$$

Здесь величины

$$A = -\frac{\partial^2 P / \partial \tau^2}{\partial P / \partial \tau}, \quad B = \frac{\theta^3}{(\theta-1)^2 \partial P / \partial \tau} \frac{\partial(\omega_0, s_0)}{\partial(x_0, y_0)}$$

определяются из формулы (24). Аналитическое решение уравнения (25) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt}(\tau) = \exp\left(-\int_0^\tau A(\tau') d\tau'\right) \times \\ \times \left(\text{const} - \int_0^\tau B(\tau') \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\int_0^{\tau'} A(\tau'') d\tau''\right) d\tau'\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Константа в (26) определяется из условия

$$\frac{dP}{dt}(0) = \frac{dP}{dt}(L), \quad (27)$$

где  $L$  — длина фронта реакции в некоторый момент времени. Производные  $dx_0/dt$  и  $dy_0/dt$  тогда могут определяться, например, по формулам

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad \frac{dy_0}{dt} = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad (28)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_0} & \frac{\partial \omega_0}{\partial y_0} & 0 & 0 \\ \frac{\partial s_0}{\partial x_0} & \frac{\partial s_0}{\partial y_0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{\theta-1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{dP}{dt} & \frac{\partial \omega_0}{\partial y_0} & 0 & 0 \\ -\frac{\theta-1}{\theta} \frac{dP}{dt} & \frac{\partial s_0}{\partial y_0} & 0 & 0 \\ -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} & 0 & \theta & 0 \\ -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} & 1 & 0 & \theta \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_0} & \frac{\theta-1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{dP}{dt} & 0 & 0 \\ \frac{\partial s_0}{\partial x_0} & -\frac{\theta-1}{\theta} \frac{dP}{dt} & 0 & 0 \\ 1 & -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} & \theta & 0 \\ 0 & -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} & 0 & \theta \end{vmatrix}.$$

Таким образом, зная  $\omega_0(x_0, y_0)$  и  $s_0(x_0, y_0)$ , из уравнения (23) можно определить давление  $P$ , а значит, пользуясь потенциальностью потока газа перед

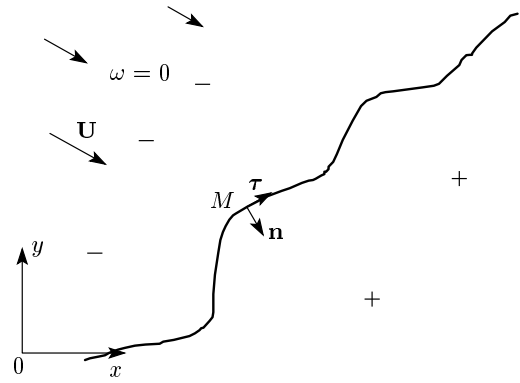


Рис. 2. Стационарный фронт пламени в двумерном случае

пламенем, из уравнений (8) и (9) можно также вычислить скорость фронта  $V$  во все предыдущие моменты времени. Смысл этой системы уравнений заключается в следующем. Пусть пламя распространяется из какой-то точки зажигания. В некоторый момент фиксируется распределение завихренности и энтропии за фронтом. Тогда с помощью уравнений (9), (23) и (28) можно описать всю эволюцию пламени: от момента зажигания до момента фотографирования. В противном случае функции  $\omega_0(x_0, y_0)$  и  $s_0(x_0, y_0)$  на поверхности фронта были бы неизвестны, поскольку фронт, захватывая все новые и новые частицы, удалялся бы от области, где они определены.

Отметим, что стационарный фронт изложенным выше методом в общем случае найти невозможно. Рассмотрим в двумерном случае распространение бесконечно тонкого стационарного слабо искривленного фронта пламени в потенциальном внешнем потоке, натекающем с постоянной скоростью  $\mathbf{U}$ , т. е.  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \nabla\varphi$ ,  $\Delta\varphi = 0$  (см. рис. 2). Зависимость от времени в уравнениях (1)–(4) в этом случае отсутствует. Тогда из уравнений (15), (16) следует, что в области за фронтом должны выполняться соотношения

$$u_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (29)$$

$$u_x \frac{\partial s}{\partial x} + u_y \frac{\partial s}{\partial y} = 0. \quad (30)$$

Следовательно, из теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка имеем в этой области

$$\omega = f(s). \quad (31)$$

Это означает, что  $\omega$  и  $s$  функционально зависимы. Если мы подставим формулу (31) в выражение (23)

и учтем, что в этом случае  $d\omega/dt = 0$  и  $ds/dt = 0$ , то увидим, что уравнения (23), (24) превратятся в тождества, в силу того что первые две строки определителей из этих уравнений станут пропорциональны. Полученная система перестает быть замкнутой, а следовательно, стационарное решение в рамках данного подхода найти невозможно.

Однако, если в некоторый момент времени  $\omega$  и  $s$  окажутся функционально зависимы (например, если фронт эволюционировал к стационарному профилю), то в формуле (25) величина  $B$  будет равна

$$B = \frac{\theta^3}{(\theta - 1)^2 \partial P / \partial \tau} \frac{\partial(\omega_0, s_0)}{\partial(x_0, y_0)} \equiv 0.$$

Тогда формула (25) станет зависеть только от давления  $P$  и мы сможем отделить  $P$  от переменных  $x_0$  и  $y_0$ , т. е. зависимость движения пламени от распределений  $\omega_0(x_0, y_0)$  и  $s_0(x_0, y_0)$  исчезнет.

В работе [16] показано, что не все решения гидродинамических уравнений перед и за фронтом реакции можно согласовать с условиями на границе, т. е. не всякую задачу Коши можно здесь поставить. Это означает, что функции  $\omega_0(x_0, y_0)$  и  $s_0(x_0, y_0)$  не могут быть произвольными (в частности, нулевыми) для сильно искривленного фронта. Предположительно в них содержится информация о процессах, происходивших внутри и вне пламени до момента их фиксации. Если в этом смысле функции  $\omega_0(x_0, y_0)$  и  $s_0(x_0, y_0)$  заданы корректно, то мы можем однозначно обратить во времени пламя вплоть до момента зажигания.

### 3. ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Теперь рассмотрим влияние малого «звукового» возмущения плотности потока  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , т. е. сжимаемости. Если  $\rho(\mathbf{r}, t) \neq \text{const}$  и  $s(\mathbf{r}, t) \neq \text{const}$ , то уравнения Эйлера имеют вид [2]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] + \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2}, \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0. \quad (36)$$

Как и в предыдущем разделе, перейдем взаимно однозначно к лагранжевым переменным начального

положения частиц газа и времени  $\mathbf{r}_0, t$  (13). Тогда из системы (32)–(36) следует, что

$$\frac{\omega}{\rho} = \frac{\omega_0(\mathbf{r}_0)}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}, \quad (37)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}, \quad (38)$$

$$s = s_0(x_0, y_0), \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{r}_0 = 0, \quad (40)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_0 = \nabla \times \mathbf{u}_0$  и  $s_0(x_0, y_0)$  — начальные распределения завихренности и энтропии. Фактически здесь требуется пренебречь в формуле (33) только слагаемым  $\nabla \rho \times \nabla P / \rho^2$ , которое учитывает сжимаемость среды. При сильно дозвуковом движении фронта реакции, типичном для дефлаграции (медленного горения), сжимаемостью вещества обычно можно пренебречь [1, 3], что делает изложенный выше переход приемлемым.

Аналогично рассмотрим распространение бесконечно тонкого, слабо искривленного фронта пламени в потенциальном внешнем потоке (см. рис. 1). Течение газа опять же вне фронта предполагается несжимаемым (с точностью до звуковых колебаний) и невязким, но допускается неравномерное адиабатическое нагревание продуктов горения. Предположим, что перед фронтом энтропия  $s_- = \text{const}$ . Тогда формулы (10) и (12) будут верны и в этом случае, но величина  $\theta = \rho_- / \rho_+$  будет слабо меняться вдоль фронта. Пусть уравнения состояния свежего топлива и сгоревшего газа имеют вид

$$\rho_- = \rho_-(P, s), \quad \rho_+ = \rho_+(P, s). \quad (41)$$

Тогда в (37), (38) вместо  $\rho(\mathbf{r}, t)$  можно подставить выражения (41) для областей вне фронта.

Согласно уравнениям (38) и (40), для любой точки  $M(x_0(x, y, t), y_0(x, y, t))$  на внутренней поверхности фронта, движущейся со скоростью  $-\mathbf{n}V$  (см. рис. 1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \frac{\partial x_0}{\partial t} - V \frac{\partial x_0}{\partial n} = -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - (u_n + V) \frac{\partial x_0}{\partial n} = \\ &= -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - \frac{\rho_-}{\rho_+} \frac{\partial x_0}{\partial n}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= \frac{\partial y_0}{\partial t} - V \frac{\partial y_0}{\partial n} = -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} - (u_n + V) \frac{\partial y_0}{\partial n} = \\ &= -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} - \frac{\rho_-}{\rho_+} \frac{\partial y_0}{\partial n}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(\tau, n)} = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \frac{\partial y_0}{\partial n} - \frac{\partial x_0}{\partial n} \frac{\partial y_0}{\partial \tau} = \frac{\rho_+}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}. \quad (44)$$

В итоге мы получим замкнутую систему уравнений (8), (9), (37), (39), (42)–(44) для движения любой точки на фронте пламени в обратном направлении по времени, которая учитывает звуковые колебания плотности газа.

Перед фронтом зависимость  $P = P_-(\rho)$  следует из уравнения состояния топлива. За искривленным фронтом происходит неравномерное нагревание продуктов горения, но выполняется соотношение (12). Если это выражение для энтропии (12) подставить в уравнение состояния сгоревшего газа  $P = P_+(\rho, s)$ , то также получим однозначную связь между давлением и плотностью на границе пламени  $P = P_+(\rho)$ . Эти зависимости и позволяют вычислить все предшествующие моменту фотографирования звуковые колебания плотности по обеим сторонам поверхности пламени.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы предлагаем двумерную систему уравнений фронта химической реакции, введенную без всяких ограничений на образующуюся за фронтом завихренность, как это делалось до этого [8–11]. Смысл исследования состоит в следующем: если в некоторый момент времени известны распределения энтропии, плотности и завихренности в области за фронтом, то можно полностью проследить эволюцию этого фронта от момента зажигания до произвольного момента времени, предшествующего моменту фиксации. Это не означает, что мы определим законы образования этих величин в процессе эволюции, например, пламени. Однако отсюда можно получить важную информацию, касающуюся реальных процессов, происходящих внутри фронта реакции.

Отметим, что формально полученная система уравнений не сводится к ранее полученным в предположении потенциальности потоков перед и за фронтом реакции уравнениям Сивашинского [9] и Франкеля [10]. В случае, если  $\omega_0(x_0, y_0) \equiv 0$ , из формул (23), (24) следует, что вдоль фронта  $dP/dt = \text{const}$ , и, в силу того что  $\omega = \omega_0(x_0, y_0) \equiv 0$ , из (10) получаем  $P = \text{const}$ . Тогда движение фронта будет описываться системой (8), (9) с постоянным давлением  $P$ , отличной от упомянутых выше уравнений. Это связано с тем, что за искривленной поверхностью фронта всегда образуется завихренность, но оба подхода в данном предельном случае ее не учи-

тывают. Однако в приближении малой завихренности уравнение Сивашинского с хорошей точностью описывает движение поверхности фронта, но для нашего метода неважна величина завихренности за фронтом, она учитывается только в момент фотографирования.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

##### Система уравнений фронта реакции в прямом направлении времени

Заметим, что формулу (25) можно вывести из других соображений. Пусть точке  $M$  на поверхности фронта в переменных Лагранжа соответствует точка  $M_0$  (рис. 3). Учитывая (15), (16) и (22), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega_0, s_0)}{\partial(x_0, y_0)} &= \frac{1}{\frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(\tau, n)}} \frac{\partial(\omega, s)}{\partial(\tau, n)} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \frac{\partial s}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \frac{\partial s}{\partial \tau} = \\ &= \frac{1}{\theta} \left( \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial s}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \frac{ds}{dt} \right). \quad (A.1) \end{aligned}$$

Если вместо  $\omega$  и  $s$  подставить их выражения (10), (12), то получится формула (25). Аналогично,

$$\frac{\partial(\omega_0, x_0)}{\partial(x_0, y_0)} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \frac{dx_0}{dt} \right), \quad (A.2)$$

$$\frac{\partial(\omega_0, y_0)}{\partial(x_0, y_0)} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \frac{dy_0}{dt} \right), \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial(s_0, x_0)}{\partial(x_0, y_0)} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{ds}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{dx_0}{dt} \right), \quad (A.4)$$

$$\frac{\partial(s_0, y_0)}{\partial(x_0, y_0)} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{ds}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial \tau} - \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{dy_0}{dt} \right). \quad (A.5)$$

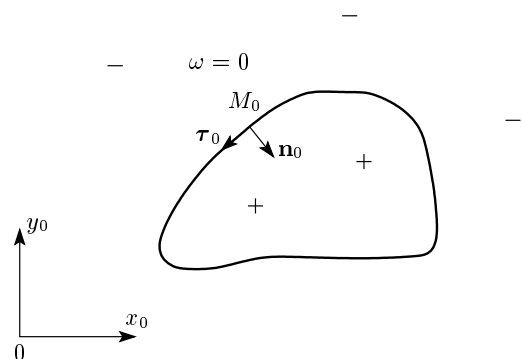


Рис. 3. Фронт пламени в переменных Лагранжа

Рассмотрим в точке  $M_0$  локальную систему прямоугольных координат  $\tau_0, n_0$  (рис. 3). Тогда левые части формул (A.1)–(A.5) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial(\omega_0, s_0)}{\partial(x_0, y_0)} = \frac{\partial(\omega_0, s_0)}{\partial(\tau_0, n_0)} = \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} \frac{\partial s_0}{\partial n_0} - \frac{\partial\omega_0}{\partial n_0} \frac{\partial s_0}{\partial\tau_0}, \quad (A.6)$$

$$\frac{\partial(\omega_0, x_0)}{\partial(x_0, y_0)} = -\frac{\partial\omega_0}{\partial y_0} = -\tau_{0y} \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} - n_{0y} \frac{\partial\omega_0}{\partial n_0}, \quad (A.7)$$

$$\frac{\partial(s_0, x_0)}{\partial(x_0, y_0)} = -\frac{\partial s_0}{\partial y_0} = -\tau_{0y} \frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} - n_{0y} \frac{\partial s_0}{\partial n_0}, \quad (A.8)$$

$$\frac{\partial(\omega_0, y_0)}{\partial(x_0, y_0)} = \frac{\partial\omega_0}{\partial x_0} = \tau_{0x} \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} + n_{0x} \frac{\partial\omega_0}{\partial n_0}, \quad (A.9)$$

$$\frac{\partial(s_0, y_0)}{\partial(x_0, y_0)} = \frac{\partial s_0}{\partial x_0} = \tau_{0x} \frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} + n_{0x} \frac{\partial s_0}{\partial n_0}. \quad (A.10)$$

Исключая теперь из системы уравнений (A.1)–(A.10) величины  $dx_0/dt, dy_0/dt, \partial\omega_0/\partial n_0$  и  $\partial s_0/\partial n_0$ , входящие туда линейно, находим

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} & \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} & \frac{1}{\theta} \left( \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial s}{\partial\tau} - \frac{\partial\omega}{\partial\tau} \frac{ds}{dt} \right) \\ \frac{\partial\omega}{\partial\tau} & 0 & -n_{0y} & 0 & \tau_{0y} \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} + \frac{1}{\theta} \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial\tau} \\ 0 & \frac{\partial\omega}{\partial\tau} & n_{0x} & 0 & -\tau_{0x} \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} + \frac{1}{\theta} \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial\tau} \\ \frac{\partial s}{\partial\tau} & 0 & 0 & -n_{0y} & \tau_{0y} \frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} + \frac{1}{\theta} \frac{ds}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial\tau} \\ 0 & \frac{\partial s}{\partial\tau} & 0 & n_{0x} & -\tau_{0x} \frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} + \frac{1}{\theta} \frac{ds}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial\tau} \end{vmatrix} = 0, \quad (A.11)$$

а также

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad \frac{dy_0}{dt} = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad (A.12)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} & \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} \\ \frac{\partial\omega}{\partial\tau} & 0 & -n_{0y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\omega}{\partial\tau} & n_{0x} & 0 \\ \frac{\partial s}{\partial\tau} & 0 & 0 & -n_{0y} \end{vmatrix} = \frac{\partial\omega}{\partial\tau} n_{0y} \left( \frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} \frac{\partial\omega}{\partial\tau} - \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} \frac{\partial s}{\partial\tau} \right) \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{1}{\theta} \left( \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial s}{\partial\tau} - \frac{\partial\omega}{\partial\tau} \frac{ds}{dt} \right) & 0 & -\frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} & \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} \\ \tau_{0y} \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} + \frac{1}{\theta} \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial\tau} & 0 & -n_{0y} & 0 \\ -\tau_{0x} \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} + \frac{1}{\theta} \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial\tau} & \frac{\partial\omega}{\partial\tau} & n_{0x} & 0 \\ \tau_{0y} \frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} + \frac{1}{\theta} \frac{ds}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial\tau} & 0 & 0 & -n_{0y} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\theta} \left( \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial s}{\partial\tau} - \frac{\partial\omega}{\partial\tau} \frac{ds}{dt} \right) & -\frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} & \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} \\ \frac{\partial\omega}{\partial\tau} & \tau_{0y} \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} + \frac{1}{\theta} \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial\tau} & -n_{0y} & 0 \\ 0 & -\tau_{0x} \frac{\partial\omega_0}{\partial\tau_0} + \frac{1}{\theta} \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial\tau} & n_{0x} & 0 \\ \frac{\partial s}{\partial\tau} & \tau_{0y} \frac{\partial s_0}{\partial\tau_0} + \frac{1}{\theta} \frac{ds}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial\tau} & 0 & -n_{0y} \end{vmatrix}.$$

Более сложная система уравнений движения фронта реакции (8)–(10), (12), (A.11) и (A.12) в отличие от полученных ранее уже не будет зависеть от распределений завихренности и энтропии за фронтом, и ее можно будет моделировать в прямом направлении времени. Заметим также, что полученная система уравнений не описывает стационарный фронт, т. е.

$$\frac{\partial(\omega_0, s_0)}{\partial(x_0, y_0)} \neq 0.$$

Для того чтобы учесть малые звуковые колебания плотности, можно в уравнениях (A.1)–(A.12) заменить завихренность  $\omega$  на  $\omega/\rho$  и при выводе соотношений (A.1)–(A.5) вместо формулы (22) использовать более общее выражение

$$\frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(\tau, n)} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{dx_0}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial\tau} - \frac{\partial x_0}{\partial\tau} \frac{dy_0}{dt} \right).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблат, В. Б. Либрович и др., *Математическая теория горения и взрыва*, Наука, Москва (1980).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика: Гидродинамика*, т. VI, Наука, Москва (1986).
3. F. A. Williams, *Combustion Theory*, Benjamin, CA (1985).
4. C. K. Law, *Combustion Physics*, Cambridge Univ. Press, New York (2006).
5. P. Pelce and P. Clavin, *J. Fluid Mech.* **124**, 219 (1982).

6. V. V. Bychkov, S. M. Golberg, M. A. Liberman et al., Phys. Rev. E **54**, 3713 (1996).
7. S. Kadowaki, Phys. Fluids **11**, 3426 (1999).
8. V. V. Bychkov, Phys. Fluids **10**, 2091 (1998).
9. G. I. Sivashinsky, Acta Astronaut. **4**, 1177 (1977).
10. M. Frankel, Phys. Fluids A **2**, 1879 (1990).
11. V. Bychkov, M. Zaytsev, and V. Akkerman, Phys. Rev. E **68**, 026312 (2003).
12. H. EL-Rabii, G. Joulin, and K. Kazakov, Phys. Rev. Lett. **100**, 174501 (2008).
13. G. Joulin, H. El-Rabii, and K. Kazakov, J. Fluid Mech. **608**, 217 (2008).
14. K. A. Kazakov, Phys. Rev. Lett. **94**, 094501 (2005).
15. M. Zaytsev and V. Bychkov, Phys. Rev. E **66**, 026310 (2002).
16. М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман, ЖЭТФ **135**, 800 (2009).
17. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1966).
18. Г. В. Коренев, *Тензорное исчисление*, МФТИ, Москва (1996).
19. Я. А. Схоутен, *Тензорный анализ для физиков*, Наука, Москва (1965).