

# ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СТИМУЛИРОВАННОЙ РАМАНОВСКОЙ АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНОЙ КОНВЕРСИИ В СМЕСИ ДВУХ БОЗЕ-ГАЗОВ С ОБРАЗОВАНИЕМ БОЗЕ-КОНДЕНСИРОВАННЫХ ГЕТЕРОЯДЕРНЫХ МОЛЕКУЛ

*П. И. Хаджи\*, А. П. Зинган*

*Институт прикладной физики Академии наук Молдовы  
MD-2028, Кишинев, Молдова*

*Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко  
MD-3300, Тирасполь, Молдова*

Поступила в редакцию 7 июля 2010 г.

В приближении среднего поля получена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая динамику атомно-молекулярной конверсии под действием двух рамановских импульсов резонансного лазерного излучения. Полученные интегралы движения дают возможность свести задачу к одному эволюционному уравнению для плотности молекул. Из решений этого уравнения следует, что возможны различные режимы временной эволюции системы в зависимости от начальных условий: периодический и аперриодический режимы и покой. Детально изучены зависимости периода и амплитуды от начальных плотностей частиц и начальной разности фаз. Доказана возможность фазового управления динамикой системы.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование свойств холодных и ультрахолодных молекулярных газов при температурах в несколько микро- либо нанокельвин является одним из наиболее многообещающих научных направлений в области атомной и молекулярной физики, а также физической химии [1–6]. В силу своих уникальных свойств ультрахолодные молекулы открывают широкие перспективы их практического использования. В настоящее время наметился существенный прогресс в теоретическом и экспериментальном исследовании динамики связанных атомного и молекулярного конденсатов как в условиях резонанса Фешбаха, так и в условиях атомно-молекулярной конверсии с участием одного либо двух импульсов резонансного лазерного излучения.

С целью эффективной генерации сильно связанных ультрахолодных молекул на нижайших уровнях многообещающим является метод стимулированного рамановского адиабатического прохожде-

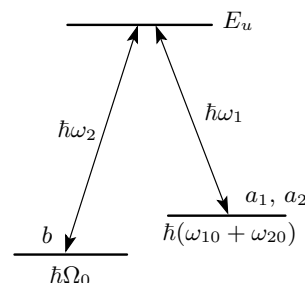


Рис. 1. Энергетическая схема и квантовые переходы в трехуровневой  $\Lambda$ -схеме

ния (stimulated Raman adiabatic passage — STIRAP). Успех STIRAP-метода базируется на использовании явления когерентного пленения [7–9] населенности в трехуровневой  $\Lambda$ -схеме. Он требует применения двух импульсов когерентного лазерного излучения, которые связывают начальное и конечное молекулярные состояния с общим электронно-возбужденным состоянием молекулы (рис. 1). Этот подход использовался при первой реализации ультрахолодных молекул RbCs [10], которые были

\*E-mail: fmfdekan@spsu.ru

созданы путем фотоассоциации [7] из ультрахолодных атомов, а затем индуцированно были сброшены в нижайшее энергетическое состояние с помощью когерентного лазерного излучения. Совсем недавно, применяя одноступенчатый STIRAP-метод к слабосвязанным фешбах-молекулам, в работах [11, 12] удалось генерировать ультрахолодный газ полярных молекул  $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ .

Успехи, достигнутые в контроле взаимодействия ультрахолодных атомов, ставят вопрос о возможности осуществления подобного контроля и для ультрахолодных молекул. Резонансные взаимодействия между молекулами могут приводить к синтезу более сложных объектов. Авторы работы [13] наблюдали подстраиваемые магнитным полем столкновительные резонансы в ультрахолодном газе молекул  $\text{Cs}_2$ , которые рождались из атомного бозе-конденсата, и интерпретировали их как фешбах-резонансы для ультрахолодных молекул  $\text{Cs}_2$  с образованием молекул  $\text{Cs}_4$ . Экспериментально [14] и теоретически [15] были изучены процессы столкновений между гетеромолекулами  $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$ .

В работе [16] теоретически изучена динамика атомно-молекулярной конверсии с использованием системы связанных нелинейных уравнений Гросса–Питаевского в приближении среднего поля для атомного и молекулярного конденсатов. В ряде работ [16–26] явно утверждается об участии в таком процессе двух рамановских импульсов. Тем не менее уравнения для амплитуд полей отсутствуют и расчет процесса сводится единственно к расчету временной эволюции плотностей атомов и молекул без явного учета динамики рамановских импульсов. В работе [18] изучено образование молекулярного бозе-конденсата из атомного с использованием параметрического взаимодействия, в котором процессы образования и диссоциации молекул рассматриваются по аналогии с процессами генерации второй гармоники и параметрической даун-конверсии. Предсказывается возможность существования трехмерного связанного атомно-молекулярного конденсата в виде локализованных солитоноподобных структур даже в отсутствие ловушки. В работе [19] показано, что благодаря межчастичным взаимодействиям возникает захваченный в ловушку, пространственно-локализованный, гибридный атомно-молекулярный конденсат, который является динамически стабильным даже в отсутствие ловушки. Если конденсат покидает ловушку, то могут родиться стабильные самолокализованные капли атомно-молекулярного конденсата. В работе [20] подсчитана энергия гибридного атом-

но-молекулярного конденсата и предсказана возможность его устойчивого состояния.

В работах [27, 28] также была изучена динамика атомно-молекулярной конверсии в условиях бозе-эйнштейновской конденсации, но при этом явно учитывалось взаимодействие атомов одного сорта и гомоядерных молекул конденсата с когерентными фотонами обоих рамановских импульсов. Показано, что процесс стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии, рассматриваемый как единый процесс, может быть как периодическим, так и аperiodическим во времени. Период и амплитуда колебаний плотности молекул в конденсате существенно определяются начальными плотностями частиц системы и начальной разностью фаз. Предсказана возможность существования особого состояния системы — покоя — при отличных от нуля плотностях частиц. Показано, что когерентность конденсата атомов, молекул и фотонов предопределяет возможность фазового контроля процесса конверсии. Изучена также роль упругих межчастичных взаимодействий.

В работе [29] с использованием системы уравнений Гросса–Питаевского изучена динамика процесса фотоассоциации атомно-молекулярного конденсата  $^{87}\text{Rb}$  в сферически-симметричной ловушке и показано, что плотности атомов и молекул в ловушке неоднородны в пространстве и осциллируют во времени. Указано, что изменением рамановской расстройки и длины межатомного расстояния можно эффективно контролировать динамику атомно-молекулярного конденсата.

К настоящему времени удалось наблюдать связывание бозе-конденсированных атомов в гомоядерные молекулы  $\text{K}_2$  [30–32],  $\text{Li}_2$  [33–39],  $\text{Cs}_2$  [40–44],  $\text{Na}_2$  [45–47],  $\text{Rb}_2$  [48–54],  $\text{Yb}_2$  [55]. Большим успехом является наблюдение не только гомоядерных, но также и гетероядерных молекул, состоящих из двух различных атомов:  $^7\text{LiH}$  [56, 57],  $^6\text{Li}^{40}\text{K}$  [58–61],  $^7\text{Li}^{40}\text{K}$  [58],  $^6\text{Li}^{23}\text{Na}$  [62],  $^6\text{Li}^{133}\text{Cs}$  [63],  $^7\text{Li}^{133}\text{Cs}$  [64, 65],  $^{23}\text{Na}^{133}\text{Cs}$  [66, 67],  $^{85}\text{Rb}^{133}\text{Cs}$  [10, 68],  $^{39}\text{K}^{85}\text{Rb}$  [69–72],  $^{39}\text{K}^{87}\text{Rb}$  [73],  $^{40}\text{K}^{85}\text{Rb}$  [74],  $^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$  [11, 12, 14, 74–84],  $^{41}\text{K}^{87}\text{Rb}$  [85–88],  $^{85}\text{Rb}^{87}\text{Rb}$  [89]. Совсем недавно наблюдалась трехатомная гетероядерная молекула  $^6\text{Li}^{40}\text{K}^{87}\text{Rb}$  [90] и четырехатомная гомоядерная молекула  $\text{Cs}_4$  [13]. Это обстоятельство свидетельствует о возможности образования и более сложных молекул в условиях бозе-конденсации.

Из сказанного выше следует высокий уровень значимости результатов научных исследований явления бозе-эйнштейновской конденсации атомов и

молекул в магнито-оптических ловушках. Отметим, что в последние несколько лет удалось наблюдать также бозе-конденсацию экситонов и экситон-поляритонов [91, 92] в различных полупроводниковых структурах. Поэтому с теоретической и чисто практической точек зрения актуальным является дальнейшее исследование физических процессов с участием бозе-конденсированных частиц. Ниже представлены результаты исследования процесса стимулированной рамановской атомно-молекулярной конверсии с участием двух импульсов резонансного лазерного излучения в смеси двух различных атомов с образованием гетеромолекул в конденсате. Рассмотрены различные предельные случаи и показано, что имеют место различные режимы эволюции системы.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Изучим динамику процесса атомно-молекулярной конверсии под действием двух рамановских импульсов, который формально можно изобразить в виде реакции  $a_1 + a_2 + c_1 \leftrightarrow b + c_2$ , где символы  $a_1$  и  $a_2$  представляют два различных атома, например  $^{41}\text{K}$  и  $^{87}\text{Rb}$ ,  $c_1$  и  $c_2$  — фотоны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а  $b$  — гетероядерную молекулу. Два различных свободных атома, находящиеся в бозе-конденсате с нулевыми кинетическими энергиями (нулевая температура) с полной энергией  $E_i = \hbar(\omega_{10} + \omega_{20})$ , переходят в основное состояние гетероядерной молекулы с энергией  $E_m = \hbar\Omega_0$  через возбужденное молекулярное состояние с энергией  $E_u$ , одновременно поглощая и излучая кванты света с энергиями соответственно  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$  (рис. 1). При этом используются два коротких фазово-когерентных импульса с энергиями фотонов  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$  и определенными значениями амплитуд полей и фаз. Таким образом, пара атомов  $a_1$  и  $a_2$ , связываясь в гетероядерную молекулу  $b$  (рис. 1), приводит к переносу одного из фотонов первого импульса ко второму и наоборот. Поэтому усиление одного из импульсов и ослабление второго в процессе атомно-молекулярной конверсии могло бы быть указанием на существование когерентности процесса. Что касается промежуточного возбужденного молекулярного состояния с энергией  $E_u$ , то его можно исключить из рассмотрения, используя принцип адиабатического следования [22, 93, 94]. Отметим, что рассматриваемый процесс, в сущности, есть процесс оптической рамановской нутации в условиях атомно-молекулярной конверсии, состоящей в периодическом изменении населенностей атомных и

молекулярных состояний под действием двух когерентных рамановских импульсов резонансного лазерного излучения и в периодическом усилении одного из импульсов и ослаблении другого.

В работе [95] рассматривался индуцированный рамановский двухступенчатый перенос атомного бозе-конденсата из одной ловушки в другую через возбужденный общий уровень системы. Численное решение системы уравнений для населенностей двух нижних уровней и верхнего возбужденного показало, что его населенность равна нулю либо исчезающе мала по сравнению с населенностями нижних уровней. Такой же результат был получен при рассмотрении атомно-молекулярной конверсии для различных атомов [96, 97] при образовании гетероядерных молекул, тримеров и тетрамеров [98]. Эти результаты указывают на возможность рассмотрения рамановской атомно-молекулярной конверсии не как двухступенчатого процесса, а как единого (одноступенчатого) процесса. В этом случае можно представить гамильтониан взаимодействия  $H_{int}$ , описывающий единый процесс индуцированной атомно-молекулярной конверсии под действием двух импульсов резонансного лазерного излучения, в виде

$$H_{int} = \hbar g \left( \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{b} \hat{c}_1^+ \hat{c}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{b}^+ \hat{c}_1 \hat{c}_2^+ \right), \quad (2.1)$$

где  $\hat{a}_{1,2}$  и  $\hat{b}$  — бозонные операторы уничтожения атомных и молекулярных состояний с собственными частотами  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$  и  $\Omega_0$  соответственно,  $\hat{c}_1$  и  $\hat{c}_2$  — операторы уничтожения фотонов с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а  $g$  — константа взаимодействия. Нелинейность в выражении (2.1) описывает образование гетероядерного молекулярного бозе-конденсата через стимулированную двумя рамановскими импульсами эмиссию молекулярных бозонов из атомного бозе-конденсата. Подобный гамильтониан использовался для исследования процесса рамановской [27, 28] гомоядерной атомно-молекулярной фотоассоциации.

Используя формулу (2.1), легко получить систему гейзенберговских уравнений для операторов  $\hat{a}_{1,2}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{c}_1$  и  $\hat{c}_2$ . Усредняя эту систему уравнений и используя приближение среднего поля (mean field approximation) [27, 28], можно получить систему нелинейных уравнений для амплитуд (параметров порядка) материального  $\langle \hat{a}_{1,2} \rangle = a_{1,2}$ ,  $\langle \hat{b} \rangle = b$  и электромагнитного  $\langle \hat{c}_{1,2} \rangle = c_{1,2}$  полей:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_1 &= \omega_{10}a_1 + ga_2^*bc_1^*c_2, \\ i\dot{a}_2 &= \omega_{20}a_2 + ga_1^*bc_1^*c_2, \\ i\dot{b} &= \Omega_0b + ga_1a_2c_1c_2^*, \\ i\dot{c}_1 &= \omega_1c_1 + ga_1^*a_2^*bc_2, \\ i\dot{c}_2 &= \omega_2c_2 + ga_1a_2b^*c_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} a_{j0} &= \sqrt{n_{j0}} \exp(i\varphi_{j0}), \quad c_{j0} = \sqrt{f_{j0}} \exp(i\psi_{j0}), \\ b_0 &= \sqrt{N_0} \exp(i\psi_0), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

где

$$\theta_0 = \theta|_{t=0} = (\psi + \psi_2 - \psi_1 - \varphi_1 - \varphi_2)|_{t=0}.$$

Вводя далее в рассмотрение плотности частиц  $n_{1,2} = |a_{1,2}|^2$ ,  $N = |b|^2$ ,  $f_{1,2} = |c_{1,2}|^2$  и две компоненты «поляризации»

$$\begin{aligned} Q &= i(a_1a_2b^*c_1c_2^* - a_1^*a_2^*bc_1^*c_2), \\ R &= a_1a_2b^*c_1c_2^* + a_1^*a_2^*bc_1^*c_2, \end{aligned}$$

получаем для них следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 = \dot{n}_2 = \dot{f}_1 = gQ, \quad \dot{N} = \dot{f}_2 = -gQ, \\ \dot{Q} = \Delta R + 2g(n_2Nf_1f_2 + n_1Nf_1f_2 - \\ - n_1n_2f_1f_2 + n_1n_2Nf_2 - n_1n_2Nf_1), \\ \dot{R} = -\Delta Q, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\Delta = \omega_{10} + \omega_{20} - \Omega + \omega_1 - \omega_2$  — расстройка резонанса. Эту систему дополним начальными условиями:

$$\begin{aligned} n_{1,2}|_{t=0} &= n_{10,20}, \quad N|_{t=0} = N_0, \\ f_{1,2}|_{t=0} &= f_{10,20}, \\ Q|_{t=0} &= Q_0 = 2\sqrt{N_0n_{10}n_{20}f_{10}f_{20}} \sin \theta_0, \\ R|_{t=0} &= R_0 = 2\sqrt{N_0n_{10}n_{20}f_{10}f_{20}} \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из системы (2.3) легко получить следующие интегралы движения:

$$\begin{aligned} n_1 + N &= n_{10} + N_0, \quad n_2 + N = n_{20} + N_0, \\ f_1 + N &= f_{10} + N_0, \quad f_2 - N = f_{20} - N_0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

и выражения для функций  $Q$  и  $R$ :

$$Q^2 = 4n_1n_2Nf_1f_2 - R^2, \quad R = R_0 + \frac{\Delta}{g}(N - N_0). \quad (2.6)$$

Наконец, используя систему (2.3), можно получить нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее временную эволюцию плотности молекул

$N(t)$ , которое при  $\Delta = 0$  можно представить в виде  $\dot{N}^2 + W(N) = E$ , где

$$\begin{aligned} W(N) &= -4N(N_0 + n_{10} - N)(N_0 + n_{20} - N) \times \\ &\quad \times (N_0 + f_{10} - N)(f_{20} - N_0 + N), \\ E_0 &= -4N_0n_{10}n_{20}f_{10}f_{20} \cos^2 \theta_0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь величины  $\dot{N}^2$ ,  $W(N)$  и  $E_0$  играют роль соответственно кинетической, потенциальной и полной энергий нелинейного осциллятора, колебания которого происходят в той области значений  $N$ , в которой  $W(N) \leq E_0$ .

Рассматривая процесс атомно-молекулярной конверсии как химическую реакцию  $a_1 + a_2 + c_1 \leftrightarrow b + c_2$ , при которой пара атомов  $a_1$  и  $a_2$  связываются в молекулу  $b$  с участием двух рамановских фотонов  $c_1$  и  $c_2$ , будем далее интересоваться динамикой плотности образующихся молекул  $N(t)$  при различных значениях начальных плотностей исходных компонентов реакции (плотностей атомов  $n_{10}$  и  $n_{20}$  и фотонов  $f_{10}$ ) и продуктов реакции (плотностей молекул  $N_0$  и фотонов  $f_{20}$ ), а также параметров системы (расстройки резонанса  $\Delta$  и начальной разности фаз  $\theta_0$ ). Указанная реакция может протекать как в одну, так и в другую сторону, т. е. входной и выходной каналы реакции можно менять местами. Используя выражения (2.3)–(2.6), формальное решение задачи можно представить в квадратурах в виде обобщенного эллиптического интеграла (гиперэллиптического интеграла)

$$\int_{N_0}^N \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = 2gt, \quad (2.8)$$

где под знаком квадратного корня содержится полином пятой степени

$$\begin{aligned} P(N) &= N(N_0 + n_{10} - N)(N_0 + n_{20} - N) \times \\ &\quad \times (N_0 + f_{10} - N)(f_{20} - N_0 + N) - \\ &\quad - \left( \frac{\Delta}{2g}(N - N_0) + \sqrt{N_0n_{10}n_{20}f_{10}f_{20}} \cos \theta_0 \right)^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из формул (2.8), (2.9) следует, что особенности эволюции системы определяются не только значениями начальных плотностей частиц, но также и соотношениями между ними. Легко видеть, что плотность генерируемых дополнительно молекул равна наименьшей из плотностей  $f_{10}$ ,  $n_{10}$ ,  $n_{20}$  независимо от рода частиц. Поскольку каждая новая образующаяся молекула содержит по одному из атомов каждого сорта и для ее генерации требуется один фотон, процесс образования молекул заканчивается, как только обратится в нуль одна из плотностей  $f_{10}$ ,  $n_{10}$ ,  $n_{20}$ .

Выразить интеграл (2.8) через известные функции не представляется возможным. Поэтому дальнейший анализ проблемы можно провести, используя приближения заданной плотности частиц различного уровня либо численные методы.

### 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ФОТОНОВ ОБОИХ ИМПУЛЬСОВ

Рассмотрим эволюцию системы в приближении заданных начальных плотностей фотонов обоих импульсов:  $f_{10}, f_{20} \gg n_{10}, n_{20}, N_0$ . Это приближение примечательно тем, что в качестве частиц заданной плотности, намного превосходящей плотности других частиц, взяты фотоны как входного, так и выходного каналов. Этот случай формально соответствует также ситуации фешбах-резонанса в отсутствие импульсов когерентного лазерного излучения, когда атомы связываются в молекулы при приложении магнитного поля. Ограничивающим фактором в этом приближении является плотность атомов, точнее, наименьшая из двух начальных плотностей атомов  $n_{10}$  и  $n_{20}$ . Вид решения основного уравнения  $\dot{N} = -gQ$  определяется соотношением между начальными плотностями атомов. При  $n_{10} < n_{20}$  решение для функции  $N(t)$  имеет вид

$$N = (N_0 + n_{10}) \times \text{sn}^2 \left( g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_0 + n_{20})} t \pm F(\varphi_0, k) \right), \quad (3.1)$$

где параметры  $k$  и  $\varphi_0$  определяются выражениями

$$k^2 = \frac{N_0 + n_{10}}{N_0 + n_{20}}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{N_0}{N_0 + n_{10}}}. \quad (3.2)$$

Амплитуда  $A$  и период колебаний  $T$  функции  $N(t)$  определяются выражениями

$$A = N_0 + n_{10}, \quad T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_0 + n_{20})}}, \quad (3.3)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$  [99, 100].

При  $n_{10} > n_{20}$  соответственно получаем

$$N = (N_0 + n_{20}) \times \text{sn}^2 \left( g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_0 + n_{10})} t \pm F(\varphi_0, k) \right), \quad (3.4)$$

где

$$k^2 = \frac{N_0 + n_{20}}{N_0 + n_{10}}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{N_0}{N_0 + n_{20}}}, \quad (3.5)$$

$$A = N_0 + n_{20}, \quad T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_0 + n_{10})}}.$$

Наконец, оба решения (3.1) и (3.4) в пределе  $n_{10} = n_{20} \equiv n_0$  совпадают и выражаются формулой

$$N = (N_0 + n_0) \text{th}^2 \left( g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_0 + n_0)} t \pm \pm \text{arth} \sqrt{\frac{N_0}{N_0 + n_0}} \right). \quad (3.6)$$

Отсюда видно, что при  $n_{10} \neq n_{20}$  плотность молекул периодически изменяется в пределах от нуля до  $N_0 + n_{10}$  при  $n_{10} < n_{20}$  либо до  $N_0 + n_{20}$  при  $n_{20} < n_{10}$ , тогда как при  $n_{10} = n_{20}$  плотность молекул эволюционирует во времени аperiodически. Меньшая из начальных плотностей атомов определяет амплитуду колебаний плотности молекул. Решения со знаками «+» и «-» в аргументе эллиптической функции в (3.1) и (3.4) соответствуют колебаниям с одним и тем же периодом  $T$ , но смещенными по фазе на величину  $F(\varphi_0, k)$ . При этом сдвиг по фазе полностью определяется начальными плотностями атомов и молекул.

На рис. 2 представлена временная эволюция плотности молекул (со знаком «+» в аргументе эллиптического синуса в (3.1)) в зависимости от отношения  $n_{20}/n_{10}$ . Видно, что при  $n_{10} \neq n_{20}$  имеет место периодический режим превращения атомов в молекулы и обратно. С ростом отношения  $n_{20}/n_{10}$  (при фиксированном  $n_{10}$ ) от нуля до единицы амплитуда колебаний плотности молекул монотонно (линейно) растет от  $N_0$  до  $N_0 + n_{10}$ , период колебаний также растет и при  $n_{20} = n_{10}$  периодический режим трансформируется в аperiodический (рис. 2). Далее, с ростом отношения  $n_{20}/n_{10}$  при  $n_{20} > n_{10}$  амплитуда колебаний остается постоянной, равной  $N_0 + n_{10}$ , а период колебаний убывает, т. е. аperiodическая эволюция при  $n_{20}/n_{10} = 1$  трансформируется в периодическую при  $n_{20}/n_{10} > 1$ . Чем сильнее параметр  $n_{20}/n_{10}$  отличается от единицы, тем меньше период колебаний функции  $N(t)$ . В пределе  $n_{10} \ll n_{20}$  из (3.3) получаем для периода колебаний  $T$  простое выражение

$$T = T_0 = \frac{\pi}{g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_0 + n_{20})}},$$

а при  $n_{20} \ll n_{10}$  из (3.5) соответственно получаем

$$T = T_0 = \frac{\pi}{g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_0 + n_{10})}}.$$

Для оценки численных значений периодов (частот) колебаний необходимо знать величину константы  $g$  процесса стимулированной атомно-молекулярной конверсии, которая фигурирует

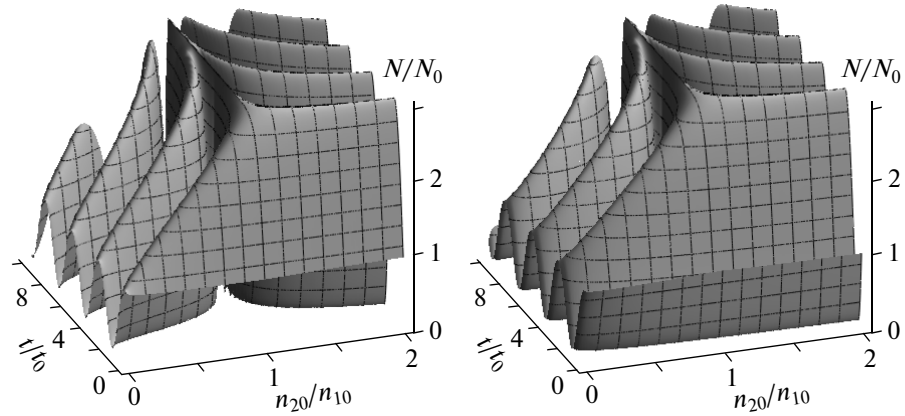


Рис. 2. Временная эволюция нормированной плотности молекул  $N/N_0$  в зависимости от значений параметра  $n_{20}/n_{10}$  при  $f_{10}/N_0 = f_{20}/N_0 = 50$ ,  $n_{10}/N_0 = 2$ . Слева — решение (3.1) со знаком «+», справа — со знаком «-»

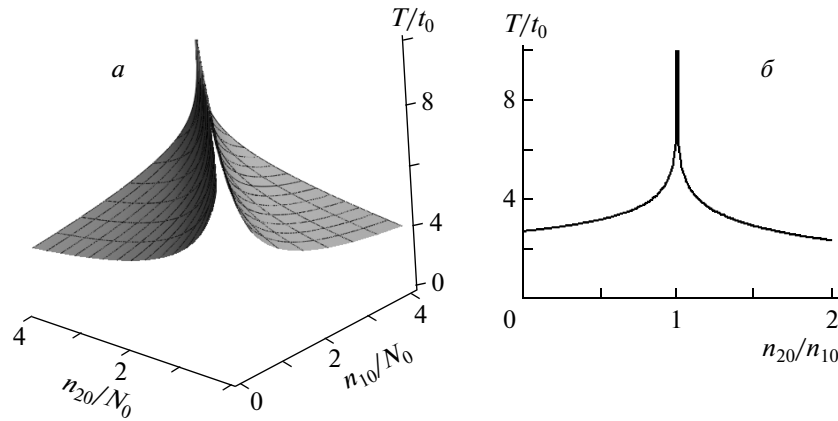
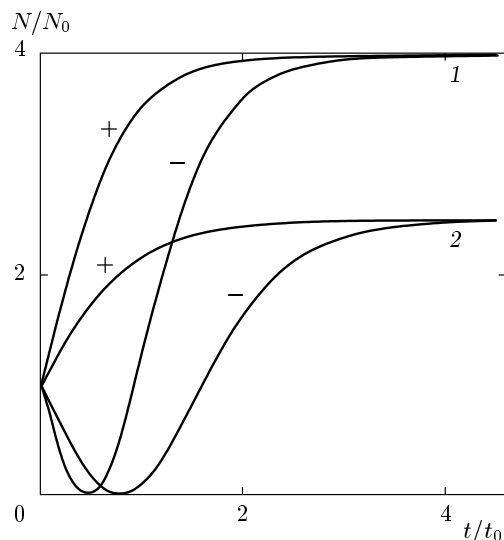


Рис. 3. а) Зависимость нормированного периода  $T/t_0$  колебаний плотности молекул от нормированных плотностей атомов  $n_{10}/N_0$  и  $n_{20}/N_0$  при  $f_{10}/N_0 = f_{20}/N_0 = 50$ . б) Зависимость нормированного периода колебаний  $T/t_0$  от отношения плотностей  $n_{20}/n_{10}$  при  $f_{10}/N_0 = f_{20}/N_0 = 50$  (сечение с рис. а)

в гамильтониане (2.1). В работе [16] приведены некоторые значения параметров для атомов и молекул рубидия. Сравнивая гамильтониан (2.1) с гамильтонианом (2) из статьи [16], в приближении среднего поля можно получить простое соотношение  $g = \chi/\hbar\sqrt{f_{10}f_{20}}$ , где константа  $\chi/\hbar \approx 7.6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1}$  [16]. Полагая, что средняя плотность фотонов  $f_{10} = f_{20} \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , для константы  $g$  получаем оценку  $g \approx 7.6 \cdot 10^{-27} \text{ м}^{9/2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Считая, что  $N_0 = 0$ , оценим теперь минимальный период  $T_0$  колебаний по формуле  $T_0 = \pi/g\sqrt{f_{10}f_{20}n_{20}}$ . Здесь все плотности являются заданными. При плотностях атомов  $n_{20} \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$  получаем  $T_0 \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ , а частота осцилляций оказывается примерно равной  $1.5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Этот результат согласуется с результа-

том численного эксперимента в работе [16]. Везде далее, где представлены результаты для величин нормированных периодов  $T/T_0$ , будем нормировать их на значение  $T_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ . Нормировка на рисунках текущего времени  $t$  в виде  $t/t_0$  также проводится на величину  $t_0 = T_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ .

Таким образом, видно, что бóльшая из начальных плотностей атомов определяет период колебаний, причем с ростом  $n_{20}$  (либо  $n_{10}$ ) период колебаний плотности молекул монотонно убывает (рис. 2, 3). Из рис. 3 также видно, что при стремлении параметра  $n_{20}/n_{10}$  к единице период колебаний быстро растет и обращается в бесконечность при  $n_{20} = n_{10}$ . В этом случае эволюция молекул является аперiodической во времени. На рис. 2 это представляется



**Рис. 4.** Аperiodическая временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  при  $n_{10}/N_0 = n_{20}/N_0 = n_0/N_0$ , равном 3 (1), 1.5 (2) и  $f_{10}/N_0 = f_{20}/N_0 = 50$ , представляемая решением (3.6) соответственно со знаками «+» и «-»

в виде узкого горба вдали от начального момента времени при  $n_{20}/n_{10} = 1$ , к которому с обеих сторон примыкают максимумы осцилляций с ростом времени. Решение (3.6) при  $n_{10} = n_{20} \equiv n_0$  со знаком «+» монотонно растет со временем, асимптотически стремясь к предельному значению  $N_0 + n_0$  (рис. 4). Скорость изменения плотности молекул на начальном этапе тем больше, чем больше начальные плотности частиц. Это свидетельствует о том, что эволюция системы является необратимой. Здесь же, на рис. 4, представлено решение со знаком «-» в аргументе гиперболического тангенса в (3.6). В этом случае на начальном этапе эволюции плотность молекул сначала монотонно убывает, обращается в нуль в момент времени  $t = t_0$ , где

$$t_0 = \frac{\operatorname{arth} \sqrt{N_0/(N_0 + n_0)}}{g \sqrt{f_{10} f_{20} (N_0 + n_0)}},$$

после чего начинает расти и асимптотически стремится при  $t \gg t_0$  к тому же предельному значению плотности молекул  $N_0 + n_0$ , что и решение со знаком «+» (рис. 4). Таким образом, на больших временах ( $t \gg t_0$ ) оба аperiodических решения асимптотически приближаются к одному и тому же предельному значению плотности молекул. Имеющиеся в системе атомы попарно связываются в молекулы, чем процесс эволюции и завершается. Реакция в обратную сторону, сопровождающаяся распадом молекул, при  $n_{20} = n_{10}$  не идет. Видно, что, чем больше  $N_0$

и  $n_0$ , тем больше скорость эволюции и асимптотическое значение плотности молекул. Как видно из системы (2.2), в отсутствие атомов скорости изменения амплитуд атомов, молекул и фотонов равны нулю. Если  $n_{10} = n_{20} = 0$ , то реакция не идет, так как скорости изменения амплитуд частиц все время равны нулю. Однако, если в ходе реакции оказывается, что в какой-то момент времени  $n_{10} = n_{20} = 0$ , то реакция в этот момент времени останавливается и далее система не эволюционирует. Что касается периода колебаний, то из рис. 3 видно, что он монотонно убывает с ростом параметров  $n_{10}/N_0$  и  $n_{20}/N_0$  и расходится при  $n_{10} = n_{20}$ . Это является следствием когерентности протекания химической реакции и характера стимулирования ее при  $n_{20} = n_{10}$ : в отсутствие атомов невозможен процесс индуцированного распада молекул даже при наличии большого числа фотонов обоих сортов. Поэтому можно утверждать, что при  $n_{20} = n_{10}$  в указанном приближении реакция превращения всех атомов в молекулы является необратимой, хотя решение со знаком «-» на начальном этапе представляет собой реакцию быстрого распада всех исходных молекул с последующим их восстановлением и генерацией дополнительного количества молекул за счет связывания исходных атомов.

Полученные решения существенно упрощаются для наиболее интересного (с практической точки зрения) случая, для которого в начальный момент времени в системе отсутствуют молекулы ( $N_0 = 0$ ). В этом случае химическая реакция следует одной траектории временной эволюции и отсутствует сдвиг по фазе. Это обусловлено тем, что в начальный момент времени плотность молекул ( $N_0 = 0$ ) соответствует одному из корней полиномиального уравнения пятой степени  $W(N) = 0$ . Поэтому направление начальной скорости реакции определяется однозначно. Тогда решения (3.1), (3.4), (3.6) можно представить в виде

$$N = n_m \operatorname{sn}^2 \left( g \sqrt{f_{10} f_{20} n_M} t \right), \quad k^2 = \frac{n_m}{n_M}, \quad (3.7)$$

$$A = n_m, \quad T = \frac{2K(k)}{g \sqrt{f_{10} f_{20} n_M}} \quad (3.8)$$

при  $n_{10} \neq n_{20}$  и

$$N = n_0 \operatorname{th}^2 \left( g \sqrt{f_{10} f_{20} n_0} t \right) \quad (3.9)$$

при  $n_{10} = n_{20} \equiv n_0$ , где  $n_m = \min(n_{10}, n_{20})$ ,  $n_M = \max(n_{10}, n_{20})$ , т.е. меньшая и большая из двух начальных плотностей атомов  $n_{10}$  и  $n_{20}$ . Таким образом, амплитуда колебаний  $A$  равна наименьшей из двух начальных плотностей атомов. Период колебаний монотонно убывает с ростом параметра  $|n_{10} - n_{20}|$  и обращается в бесконечность при

$n_{10} = n_{20}$ . Из (3.8) получаем простое выражение для периода колебаний, например, при фиксированном  $n_{20}$  и  $n_{10} \ll n_{20}$ :  $T = T_0 = \pi/g\sqrt{f_{10}f_{20}n_{20}}$ . График временной эволюции плотности молекул  $N(t)$  в зависимости от отношения  $n_{20}/n_{10}$  подобен графику, представленному на рис. 2. При  $n_{20} = 0$  плотность молекул равна нулю, так как в отсутствие молекул и одного из сортов атомов в начальный момент времени эволюция системы невозможна. С ростом параметра  $n_{20}/n_{10}$  амплитуда и период колебаний монотонно растут, при  $n_{20}/n_{10} = 1$  периодический режим эволюции трансформируется в аperiodический, затем при  $n_{20} > n_{10}$  снова восстанавливается периодический режим эволюции, однако амплитуда колебаний сохраняется постоянной, а период колебаний убывает с ростом отношения  $n_{20}/n_{10}$ .

Точно так же, если в формуле (3.1) положить, например,  $n_{10} = 0$ , то решение принимает вид

$$N = N_0 \frac{\operatorname{cn}^2 \left( g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_0 + n_{20})} t \right)}{\operatorname{dn}^2 \left( g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_0 + n_{20})} t \right)}, \quad (3.10)$$

$$k^2 = \frac{N_0}{N_0 + n_{20}},$$

$$T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_0 + n_{20})}}. \quad (3.11)$$

В этом случае имеет место только периодический режим эволюции системы. При этом амплитуда колебаний плотности молекул равна их начальной плотности  $N_0$ , а период колебаний  $T$  монотонно убывает с ростом отношения  $n_{20}/N_0$ . Здесь плотность молекул в любой момент времени не превосходит начальную плотность  $N_0$ . Поэтому данный предел физически соответствует периодической реакции атомно-молекулярной конверсии, начиная с распада молекул на атомы в присутствии фотонов обоих импульсов и одного из сортов атомов. Плотность молекул  $N(t)$  и атомов первого сорта  $n_1(t)$  изменяются в противофазе в пределах от нуля до  $N_0$ .

Эволюция системы в том же приближении ( $f_{10}, f_{20} \gg n_{10}, n_{20}, N_0$ ), но при начальной разности фаз  $\theta_0 = 0$  (либо  $k\pi$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ), существенно иная. В этом случае полная энергия нелинейного осциллятора  $E_0 = -4N_0f_{10}f_{20}n_{10}n_{20}$  не равна нулю. Поскольку  $Q_0 = 0$  и, следовательно,  $\dot{N}_0 = 0$  при  $\theta_0 = k\pi$ , решения со знаками «+» и «-» совпадают. Это обусловлено тем, что один из корней уравнения  $W(N) = 0$  совпадает с начальным значением  $N = N_0$ . Этот корень располагается на одном из скатов профиля потенциальной энергии  $W(N)$ , поэтому эволюция функции  $N(t)$  сразу же

после начального момента времени происходит только в одном направлении — с увеличением либо с уменьшением  $N(t)$  со временем. В зависимости от соотношения между начальными плотностями частиц имеют место различные решения. При  $N_0(n_{10} + n_{20}) < n_{10}n_{20}$  решение для плотности молекул  $N(t)$  имеет вид

$$N = N_0 + (N_- - N_0) \times \operatorname{sn}^2 \left( g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_+ - N_0)} t \right), \quad (3.12)$$

$$k^2 = \frac{N_- - N_0}{N_+ - N_0},$$

где  $N_+$  и  $N_-$  определяются как

$$N_{\pm} = \frac{1}{2} \left( N_0 + n_{10} + n_{20} \pm \sqrt{(N_0 + n_{10} + n_{20})^2 - 4n_{10}n_{20}} \right). \quad (3.13)$$

Амплитуда  $A$  и период  $T$  колебаний при этом выражаются формулами

$$A = N_- - N_0, \quad T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_+ - N_0)}}. \quad (3.14)$$

Полагая здесь  $N_0 = 0$ , получаем решение (3.9).

Если же  $N_0(n_{10} + n_{20}) > n_{10}n_{20}$ , то решение представляется в виде

$$N = N_+ - \frac{N_+ - N_0}{\operatorname{dn}^2 \left( g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_+ - N_-)} t \right)}, \quad (3.15)$$

$$k^2 = \frac{N_0 - N_-}{N_+ - N_-}.$$

При этом

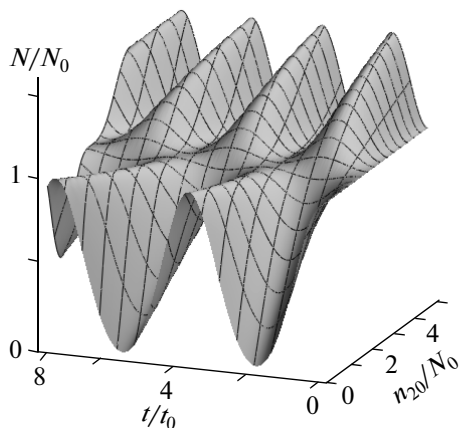
$$A = N_0 - N_-, \quad T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{f_{10}f_{20}(N_+ - N_-)}}, \quad (3.16)$$

а  $N_{\pm}$  по-прежнему выражаются формулами (3.13). Полагая здесь  $n_{10} = 0$ , получаем снова решение (3.9).

Наконец, если  $N_0(n_{10} + n_{20}) = n_{10}n_{20}$ , то  $N(t) = N_0 = \operatorname{const}$ .

Результаты для этого случая ( $\theta_0 = 0$ ) представлены на рис. 5, откуда видно, что плотность молекул осциллирует во времени. Период осцилляций монотонно убывает с ростом параметра  $n_{20}/N_0$ . Амплитуда колебаний сначала убывает с ростом  $n_{20}/N_0$ , достигает нуля при  $N_0 = n_{10}n_{20}/(n_{10} + n_{20})$ , затем растет. Как видно из рис. 5, при малых значениях параметра  $n_{20}/N_0$  колебания плотности молекул происходят ниже уровня  $N = N_0$ , тогда как при больших





**Рис. 5.** Временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  в зависимости от параметра  $n_{20}/N_0$  при  $f_{10}/N_0 = f_{20}/N_0 = 50$ ,  $n_{10}/N_0 = 2$

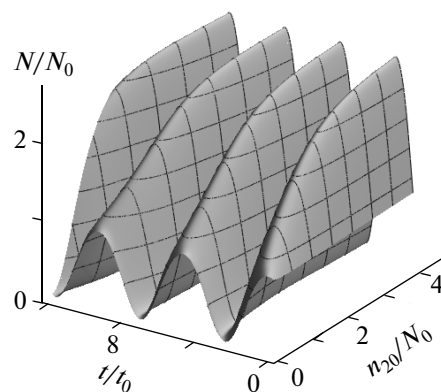
$n_{20}/N_0$  колебания происходят выше уровня  $N = N_0$ . При  $N_0 = n_{10}n_{20}/(n_{10} + n_{20})$  амплитуда колебаний обращается в нуль, хотя начальные плотности всех частиц отличны от нуля. В этом случае изображающая точка в начальный момент времени оказывается на дне потенциальной ямы с нулевой начальной скоростью. На фазовой плоскости  $(N, \dot{N})$  этой ситуации соответствует фазовый центр. Интересно, что период колебаний при этом не обращается в нуль.

Сравнивая рис. 2 и рис. 5, можно сделать вывод, что динамика системы определяется не только начальными плотностями частиц, но также и начальной разностью фаз  $\theta_0$ .

При произвольных значениях начальной разности фаз динамика процесса атомно-молекулярной конверсии существенно определяется величиной разности фаз  $\theta_0$ . Чтобы получить явное решение для функции  $N(t)$ , необходимо найти корни уравнения

$$N(N_0 + n_{10} - N)(N_0 + n_{20} - N) - N_0 n_{10} n_{20} \cos^2 \theta_0 = 0,$$

которое получается из общего уравнения  $W(N) = E_0$ . Обозначим корни в порядке их убывания в виде  $N_1 > N_{max} > N_{min}$ . Плотность молекул изменяется в пределах  $N_{min} \leq N \leq N_{max}$ . Корни  $N_{min}$ ,  $N_{max}$  и  $N_1$  периодически изменяются в зависимости от  $\theta_0$ . Корень  $N_{max}$  ( $N_{min}$ ) сначала растет (убывает) с ростом  $\theta_0$  от нуля до  $\pi/2$ , при  $\theta_0 = \pi/2$  он достигает максимума (минимума), равного  $N_0 + n_{10}$  (нулю), затем убывает (растет) при увеличении  $\theta_0$  от  $\pi/2$  до  $\pi$ . Разность  $N_{max} - N_{min}$  определяет амплитуду колебаний молекул. Решение основного уравнения то-



**Рис. 6.** Временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  в зависимости от значений параметра  $n_{20}/N_0$  при  $\theta_0 = \pi/3$ ,  $n_{10}/N_0 = 2$ ,  $f_{10}/N_0 = f_{20}/N_0 = 50$

гда можно представить в виде

$$N = N_{min} + (N_{max} - N_{min}) \times \times \sin^2 \left( g \sqrt{f_{10} f_{20} (N_1 - N_{min})} t \pm F(\varphi_0, k) \right), \quad (3.17)$$

где

$$k^2 = \frac{N_{max} - N_{min}}{N_1 - N_{min}}, \quad (3.18)$$

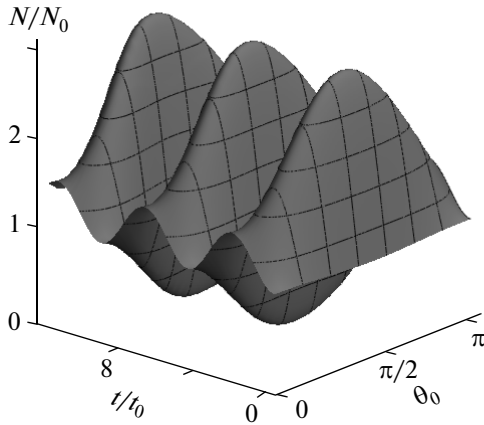
$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{N_0 - N_{min}}{N_{max} - N_{min}}}.$$

При этом амплитуда  $A$  и период  $T$  колебаний плотности молекул зависят от начальных плотностей частиц и начальной разности фаз  $\theta_0$  и выражаются формулами:

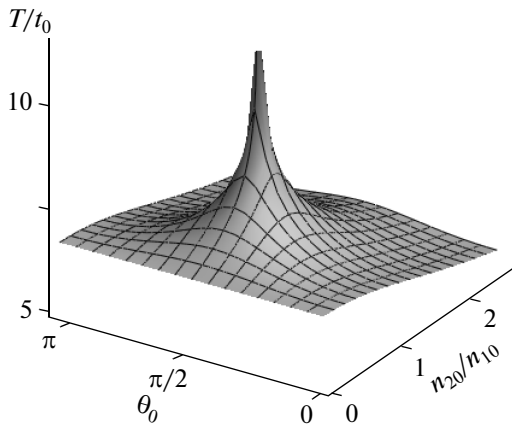
$$A = N_{max} - N_{min}, \quad (3.19)$$

$$T = \frac{2K(k)}{g \sqrt{f_{10} f_{20} (N_1 - N_{min})}}.$$

На рис. 6 представлена временная эволюция плотности молекул  $N(t)$  в зависимости от значений параметра  $n_{20}/N_0$  при  $\theta_0 = \pi/3$ , полученная на основании формул (3.17) и (3.18). Видно, что имеют место периодические колебания функции  $N(t)$ , причем амплитуда колебаний монотонно растет с ростом отношения  $n_{20}/N_0$ , стремясь к насыщению при больших значениях  $n_{20}/N_0$ . Важным моментом здесь является существенное различие особенностей временной эволюции системы при  $\theta_0 = \pi/3$  по сравнению с другими случаями, например, со случаем  $\theta_0 = 0$  (рис. 5) и  $\theta_0 = \pi/2$  (рис. 2). На рис. 7 представлена временная эволюция плотности молекул в зависимости от значений параметра  $\theta_0$  при фиксированных значениях начальных плотностей частиц. Здесь хорошо



**Рис. 7.** Временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  в зависимости от начальной разности фаз  $\theta_0$  при  $n_{10}/N_0 = 2$ ,  $n_{20}/N_0 = 5$ ,  $f_{10}/N_0 = f_{20}/N_0 = 50$



**Рис. 8.** Зависимость периода колебаний плотности молекул  $N/N_0$  от параметров  $n_{20}/n_{10}$  и  $\theta_0$  при  $f_{10}/N_0 = f_{20}/N_0 = 50$

видно, что амплитуда колебаний существенно определяется начальной разностью фаз  $\theta_0$ .

На рис. 8 представлена зависимость периода колебаний плотности молекул от отношения  $n_{20}/n_{10}$  и начальной разности фаз  $\theta_0$ , полученная на основании формулы (3.19). Видно, что при изменении как одной переменной, так и другой, период меняется, проходя через максимум. Если  $n_{20}/n_{10}$  и  $\theta_0$  одновременно достигают значений соответственно 1 и  $\pi/2$ , то максимум трансформируется в расходимость, что свидетельствует о переходе системы от периодического режима эволюции к аperiodическому. Таким образом, сохраняя начальные плотности частиц по-

стоянными и изменяя только начальную разность фаз  $\theta_0$ , можно управлять динамикой процесса атомно-молекулярной конверсии.

Отметим, что полученные в этом разделе результаты значительно упрощаются в вырожденном случае, когда начальные плотности атомов одинаковы:  $n_{10} = n_{20} \equiv n_0$ . Тогда для  $\theta_0 = \pi/2$  остается только аperiodический режим эволюции (3.6), а все остальные (периодические) режимы исчезают. Результаты, полученные для  $\theta_0 \neq \pi/2$ , качественно сохраняются.

Отметим, что кроме рассмотренного приближения возможен еще ряд приближений заданных плотностей частиц. Очевидно, что результаты исследования динамики стимулированной атомно-молекулярной конверсии в приближении заданной плотности фотонов второго импульса и плотности одного из двух сортов атомов ( $f_{20}, n_{20} \gg N_0, f_{10}, n_{10}$  либо  $f_{20}, n_{10} \gg N_0, f_{10}, n_{20}$ ) сводятся к тем же результатам, что и в приближении заданных плотностей фотонов обоих импульсов с очевидной заменой везде  $n_{20}(n_{10})$  на  $f_{10}$  и  $f_{10}$  на  $n_{20}(n_{10})$ , так как физически частицы во входном канале с плотностями  $n_{20}, n_{10}, f_{10}$  играют одинаковую роль. Частицы с наименьшей плотностью во входном канале, будь то атомы ( $n_{10}, n_{20}$ ) либо фотоны ( $f_{10}$ ), играют очевидную лимитирующую роль: именно они определяют верхнюю границу плотности образующихся молекул.

#### 4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ АТОМОВ

Рассмотрим теперь эволюцию системы в приближении заданных плотностей атомов  $n_{10}, n_{20} \gg \gg N_0, f_{10}, f_{20}$ . Поскольку плотности атомов в процессе эволюции остаются практически неизменными, более существенной является эволюция плотностей молекул  $N$  и фотонов  $f_1$  и  $f_2$ : поглощение одного фотона первого импульса вызывает рождение одной молекулы и одного фотона второго импульса. Поведение системы существенно определяется соотношением между плотностями  $N_0$  и  $f_{20}$ , а также начальной разностью фаз  $\theta_0$ . Пусть  $\theta_0 = (2k + 1)\pi/2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда при  $N_0 < f_{20}$  решение уравнения для плотности молекул имеет вид

$$N = (N_0 + f_{10}) \times \times \text{cn}^2 \left( g \sqrt{n_{10} n_{20} (f_{10} + f_{20})} t \pm F(\varphi_0, k) \right), \quad (4.1)$$

где

$$k^2 = \frac{N_0 + f_{10}}{f_{20} + f_{10}}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{f_{10}}{N_0 + f_{10}}}. \quad (4.2)$$

Амплитуда  $A$  и период  $T$  колебаний плотности молекул определяются соотношениями

$$A = N_0 + f_{10}, \quad T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{n_{10}n_{20}(f_{10} + f_{20})}}. \quad (4.3)$$

Если здесь положить  $N_0 = 0$ , то решение можно записать в виде

$$N = f_{20} \left( \frac{1}{\operatorname{dn}^2 \left( g\sqrt{n_{10}n_{20}(f_{10} + f_{20})} t \right)} - 1 \right), \quad (4.4)$$

$$k^2 = \frac{f_{10}}{f_{10} + f_{20}}.$$

В обратном случае, когда  $N_0 > f_{20}$ , решение имеет вид

$$N = (N_0 + f_{10}) \times \operatorname{dn}^2 \left( g\sqrt{n_{10}n_{20}(N_0 + f_{10})} t \pm F(\varphi_0, k) \right), \quad (4.5)$$

где

$$k^2 = \frac{f_{10} + f_{20}}{N_0 + f_{10}}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{f_{10}}{f_{10} + f_{20}}}. \quad (4.6)$$

При этом

$$A = f_{10} + f_{20}, \quad T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{n_{10}n_{20}(N_0 + f_{10})}}. \quad (4.7)$$

В пределе  $f_{20} = 0$  из (4.5) получаем

$$N = \frac{N_0}{\operatorname{dn}^2 \left( g\sqrt{n_{10}n_{20}(N_0 + f_{10})} t \right)}, \quad (4.8)$$

$$k^2 = \frac{f_{10}}{N_0 + f_{10}}.$$

Наконец, при  $N_0 = f_{20}$  эволюция системы оказывается аperiодической и решение имеет вид

$$N = (N_0 + f_{10}) \operatorname{ch}^{-2} \left( g\sqrt{n_{10}n_{20}(N_0 + f_{10})} t \pm \operatorname{arch} \sqrt{1 + \frac{f_{10}}{N_0}} \right). \quad (4.9)$$

Если в выражениях (4.1), (4.2) и (4.3) положить  $f_{10} = 0$ , решения упрощаются и приводятся к виду

$$N = N_0 \operatorname{cn}^2 \left( g\sqrt{n_{10}n_{20}f_{20}} t \right), \quad k^2 = \frac{N_0}{f_{20}}, \quad (4.10)$$

$$T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{n_{10}n_{20}f_{20}}} \quad (4.11)$$

при  $N_0 < f_{20}$

$$N = N_0 \operatorname{dn}^2 \left( g\sqrt{n_{10}n_{20}N_0} t \right), \quad k^2 = \frac{f_{20}}{N_0}, \quad (4.12)$$

$$T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{n_{10}n_{20}N_0}} \quad (4.13)$$

при  $N_0 > f_{20}$  и

$$N = \frac{N_0}{\operatorname{ch}^2 \left( g\sqrt{n_{10}n_{20}N_0} t \right)} \quad (4.14)$$

при  $N_0 = f_{20}$ . На рис. 9 представлены графики временной эволюции плотности молекул при различных значениях параметра  $f_{20}/N_0$ . Видно, что при  $f_{20} \neq N_0$  имеет место колебательный режим эволюции плотности молекул, а при  $N_0 = f_{20}$  эволюция становится аperiодической. Амплитуда и период колебаний зависят от начальных плотностей частиц. С ростом параметра  $f_{20}/N_0$  от нуля до единицы амплитуда колебаний монотонно растет, а при  $f_{20}/N_0 > 1$  она оказывается постоянной, равной  $N_0 + f_{10}$ . При этом период колебаний  $T$  монотонно убывает при удалении от точки  $f_{20}/N_0 = 1$ , в которой он расходится, что свидетельствует об аperiодичности эволюции (рис. 10). В окрестности  $f_{20}/N_0 = 1$  на графике функции  $N(t)$  (рис. 9) формируется узкий провал, который соответствует решению (4.9) со знаком «+». В этом пределе плотность молекул при больших временах обращается в нуль, т. е. все молекулы распадаются на атомы, чем эволюция и завершается. На рис. 11 представлены оба решения (4.9), со знаками «+» и «-». Видно, что решение со знаком «+» монотонно убывает от  $N = N_0$  и асимптотически стремится к нулю на больших временах. Решение со знаком «-» сначала растет от  $N = N_0$  до  $N = N_0 + f_{10}$ , затем монотонно убывает и также обращается в нуль на больших временах. Следовательно, при  $N_0 = f_{20}$  реакция атомно-молекулярной конверсии является необратимой и сводится к распаду всех молекул на атомы, хотя на начальном этапе решение со знаком «-» представляет собой реакцию связывания атомов в молекулы. Однако со временем все образующиеся молекулы распадаются на атомы.

Найдем теперь решения при начальной разности фаз  $\theta_0 = 0$  (либо  $k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ). В случае, если  $N_0(f_{20} - f_{10}) < f_{10}f_{20}$ , решение имеет вид

$$N = N_- + \frac{N_0 - N_-}{\operatorname{dn}^2 \left( g\sqrt{n_{10}n_{20}(N_+ - N_-)} t \right)}, \quad (4.15)$$

$$k^2 = \frac{N_+ - N_0}{N_+ - N_-},$$

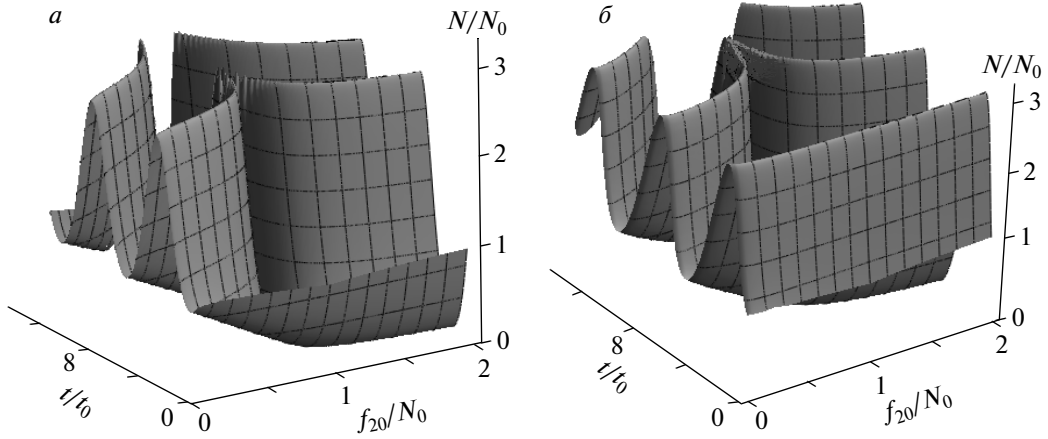


Рис. 9. Временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  в соответствии с решением (4.1) со знаками «+» (а) и «-» (б) в зависимости от параметра  $f_{20}/N_0$  при  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $f_{10}/N_0 = 3$ ,  $n_{10}/N_0 = n_{20}/N_0 = 100$

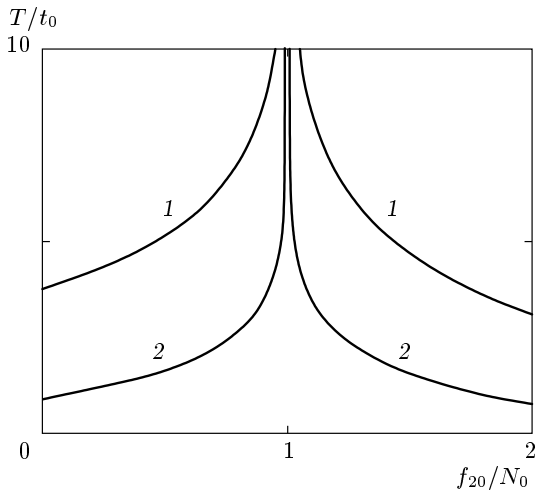


Рис. 10. Зависимости периода колебаний  $T/t_0$  молекул от значений параметра  $f_{20}/N_0$  при  $f_{10}/N_0 = = 2$  (1), 10 (2) и  $n_{10}/N_0 = n_{20}/N_0 = 100$

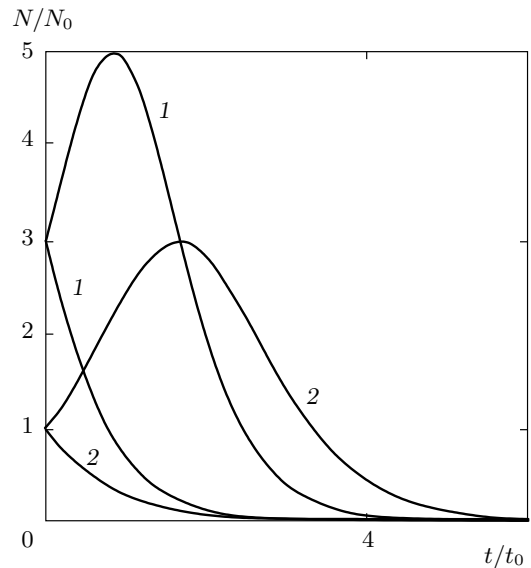


Рис. 11. Аперриодическая временная эволюция плотности молекул при  $f_{10}/N_0 = 2$  и  $f_{20}/N_0 = 3$  (1), 1 (2)

где

$$N_{\pm} = \frac{1}{2} \left( N_0 + f_{10} - f_{20} \pm \sqrt{(N_0 + f_{10} - f_{20})^2 + 4f_{10}f_{20}} \right) \quad (4.16)$$

— два корня уравнения  $W(N) = E_0$ . Третий корень совпадает с начальным значением:  $N = N_0$ . При этом

$$A = N_+ - N_0, \quad T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{n_{10}n_{20}(N_0 - N_-)}} \quad (4.17)$$

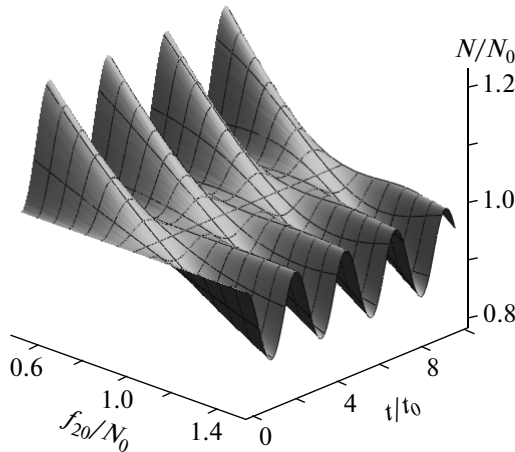
Если же  $N_0(f_{20} - f_{10}) > f_{10}f_{20}$ , то

$$N = N_0 - (N_0 - N_+) \times \times \text{sn}^2 \left( g\sqrt{n_{10}n_{20}(N_0 - N_-)} t \right), \quad (4.18)$$

$$k^2 = \frac{N_0 - N_+}{N_0 - N_-},$$

$$A = N_0 - N_+, \quad T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{n_{10}n_{20}(N_0 - N_-)}}, \quad (4.19)$$

где  $N_+$  и  $N_-$  по-прежнему выражаются формулой (4.16).



**Рис. 12.** Временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  в зависимости от параметра  $f_{20}/N_0$  при  $f_{10}/N_0 = 3, n_{10}/N_0 = n_{20}/N_0 = 50$

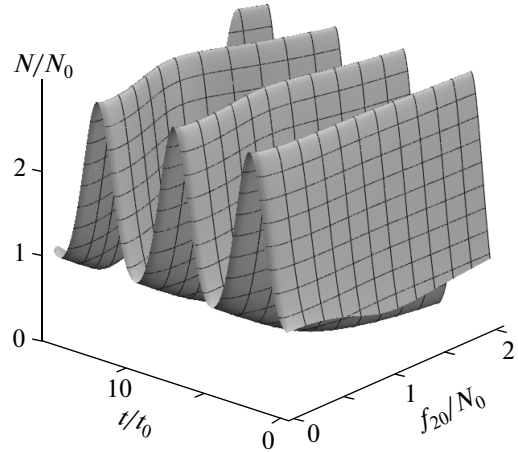
Наконец, если  $N_0(f_{20} - f_{10}) = f_{10}f_{20}$ , то  $N(t) = N_0 = \text{const}$ .

Отметим здесь, что так как одним из корней уравнения  $W(N) = E_0$  при  $\theta_0 = 0$  является  $N = N_0$ , то по этой причине направление начальной скорости нелинейного осциллятора определяется однозначно и решения со знаками «+» и «-» совпадают. На рис. 12 представлена временная эволюция плотности молекул при различных значениях параметра  $f_{20}/N_0$ . Плотность молекул осциллирует во времени, причем амплитуда  $A$  и период  $T$  осцилляций существенно зависят от начальных плотностей частиц. При  $N_0(f_{20} - f_{10}) < f_{10}f_{20}$  колебания функции  $N(t)$  происходят над фоном, т. е.  $N(t)/N_0 \geq 1$ , при  $N_0(f_{20} - f_{10}) > f_{10}f_{20}$  — под фоном, т. е.  $N(t)/N_0 \leq 1$ , а при  $N_0(f_{20} - f_{10}) = f_{10}f_{20}$  изменения плотности молекул во времени вообще отсутствуют, т. е.  $N(t) = N_0 = \text{const}$  (см. рис. 12). В последнем случае, несмотря на то что начальные плотности всех частиц отличны от нуля, временная эволюция отсутствует. Это обусловлено тем, что полная энергия нелинейного осциллятора точно равна минимальному значению потенциальной энергии и поэтому в отсутствие кинетической энергии осциллятор не может сдвинуться с минимума.

При произвольном значении  $\theta_0$ , обозначая корни уравнения

$$N(N_0 + f_{10} - N)(f_{20} - N_0 + N) = N_0 f_{10} f_{20} \cos^2 \theta_0$$

в порядке убывания их значений через  $N_{max}, N_{min}$  и  $N_-$ , решение для плотности молекул получаем в виде



**Рис. 13.** Временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  в зависимости от параметра  $f_{20}/N_0$  при  $f_{10}/N_0 = 2, n_{10}/N_0 = n_{20}/N_0 = 50$  и начальной разности фаз  $5\pi/12$

$$N = N_- + \frac{N_{min} - N_-}{\text{dn}^2 \left( g\sqrt{n_{10}n_{20}(N_{max} - N_-)} t \pm F(\varphi_0, k) \right)}, \quad (4.20)$$

где

$$k^2 = \frac{N_{max} - N_{min}}{N_{max} - N_-},$$

$$\varphi_0 = \arcsin \left\{ \frac{(N_{max} - N_-)(N_0 - N_{min})}{(N_{max} - N_{min})(N_0 - N_-)} \right\}^{1/2}. \quad (4.21)$$

Амплитуда и период колебаний соответственно равны

$$A = N_{max} - N_{min}, \quad T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{n_{10}n_{20}(N_{max} - N_-)}}. \quad (4.22)$$

На рис. 13 представлена временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  в зависимости от параметра  $f_{20}/N_0$  при  $\theta_0 = 5\pi/12$ . Видно, что плотность молекул изменяется со временем периодически. Амплитуда колебаний практически не зависит от параметра  $f_{20}/N_0$ . Что касается периода колебаний, то с ростом параметра  $f_{20}/N_0$  он сначала медленно растет, достигает максимума при  $f_{20}/N_0 = 1$ , затем монотонно убывает (рис. 13, 14). Чем больше начальная разность фаз  $\theta_0$ , тем больше значение периода при  $f_{20}/N_0 = 1$  (рис. 15). При  $\theta_0 = \pi/2$  период колебаний обращается в бесконечность, т. е. эволюция оказывается аperiодической (см. рис. 10). Таким образом, с ростом  $\theta_0$  от 0 до  $\pi/2$  период колебаний монотонно растет при  $f_{20}/N_0 = 1$ . При  $f_{20}/N_0 \neq 1$

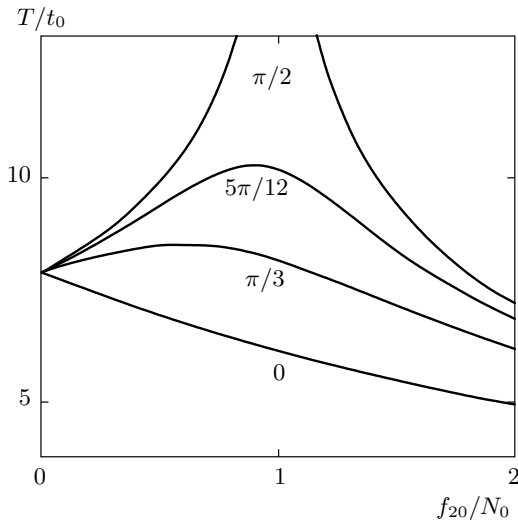


Рис. 14. Зависимости периода колебаний плотности молекул  $T/t_0$  от параметра  $f_{20}/N_0$  при  $f_{10}/N_0 = 2$ ,  $n_{10}/N_0 = n_{20}/N_0 = 50$  и различных значениях начальной разности фаз  $\theta_0$

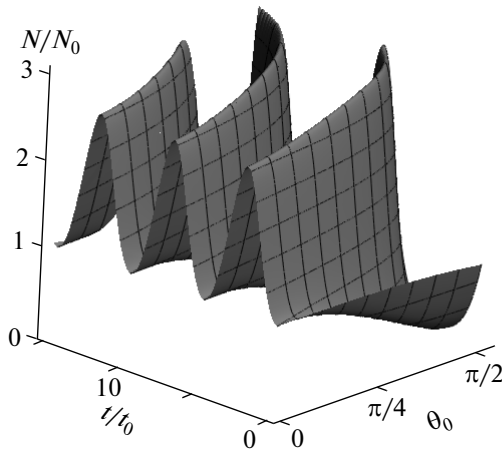


Рис. 15. Временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  в зависимости от начальной разности фаз  $\theta_0$  при  $f_{10}/N_0 = 2$ ,  $f_{20}/N_0 = 1.1$ ,  $n_{10}/N_0 = n_{20}/N_0 = 50$

период колебаний также монотонно растет с ростом  $\theta_0$ , однако он не расходится при  $\theta_0 = \pi/2$ . Отметим еще, что при  $\theta_0 = 0$  период колебаний монотонно убывает с ростом  $f_{20}/N_0$ . На рис. 15 представлена временная эволюция плотности молекул в зависимости от начальной разности фаз  $\theta_0$ . Здесь также видно, что с ростом  $\theta_0$  период колебаний растет, причем этот рост ускоряется вблизи  $\theta_0 = \pi/2$ . Что касается амплитуды колебаний, то она очень медленно увеличивается с ростом  $\theta_0$  (рис. 15).

Кроме рассмотренного приближения заданной плотности атомов можно указать еще на два приближения такого же типа — приближения заданной плотности атомов первого (второго) сорта и фотонов первого импульса  $n_{10}, f_{10} \gg N_0, n_{20}, f_{20}$ ;  $n_{20}, f_{10} \gg \gg N_0, n_{10}, f_{20}$  с заменой везде  $n_{20}(n_{10})$  на  $f_{10}$  и наоборот.

### 5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОЙ ПЛОТНОСТИ ФОТОНОВ ПЕРВОГО ИМПУЛЬСА

До сих пор мы рассматривали эволюцию системы в приближении, когда одновременно плотности трех либо двух ее компонентов намного превосходят плотности других компонентов. Рассмотрим теперь несколько случаев, когда только один из компонентов системы имеет начальную плотность, намного превышающую начальные плотности других компонентов. Сначала изучим эволюцию системы в приближении заданной плотности фотонов первого импульса:  $f_{10} \gg f_{20}, n_{10}, n_{20}, N_0$ . Лимитирующей плотностью во входном канале тогда является меньшая из плотностей атомов ( $n_{10}$  либо  $n_{20}$ ). Пусть начальная разность фаз  $\theta_0 = (2k + 1)\pi/2$ . Если  $f_{20} > N_0$ , то плотность молекул определяется формулой

$$N = (f_{20} - N_0)(N_0 + n_{10}) \times \sin^2 \left( 2K(k) \frac{t}{T} \pm F(\varphi_0, k) \right) \times \left\{ n_{10} + f_{20} - (N_0 + n_{10}) \times \sin^2 \left( 2K(k) \frac{t}{T} \pm F(\varphi_0, k) \right) \right\}^{-1}, \quad (5.1)$$

где

$$k^2 = \frac{(n_{20} + f_{20})(N_0 + n_{10})}{(n_{10} + f_{20})(N_0 + n_{20})}, \quad (5.2)$$

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{N_0}{f_{20}} \frac{n_{10} + f_{20}}{N_0 + n_{10}}},$$

а амплитуда и период колебаний равны

$$A = N_0 + n_{10}, \quad (5.3)$$

$$T = \frac{2K(k)}{g \sqrt{f_{10}(N_0 + n_{20})(n_{10} + f_{20})}}.$$

Полагая здесь  $N_0 = 0$ , получаем

$$N = \frac{n_{10} f_{20} \sin^2 \left( g \sqrt{f_{10} n_{20} (n_{10} + f_{20})} t \right)}{f_{20} + n_{10} \cos^2 \left( g \sqrt{f_{10} n_{20} (n_{10} + f_{20})} t \right)}, \quad (5.4)$$

где

$$k^2 = \frac{n_{10}(n_{20} + f_{20})}{n_{20}(n_{10} + f_{20})}, \quad (5.5)$$

$$T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{f_{10}n_{20}(n_{10} + f_{20})}}.$$

С другой стороны, полагая в формуле (5.1)  $n_{10} = n_{20}$ , получаем

$$N = (f_{20} - N_0)(N_0 + n_{10}) \times$$

$$\times \text{th}^2 \left( g\sqrt{f_{10}(N_0 + n_{10})(f_{20} + n_{10})} t \pm \right.$$

$$\left. \pm \text{arth} \sqrt{\frac{N_0}{f_{20}} \frac{n_{10} + f_{20}}{N_0 + n_{10}}} \right) \times$$

$$\times \left\{ N_0 + f_{20} - (N_0 + n_{10}) \times \right.$$

$$\left. \times \text{th}^2 \left( g\sqrt{f_{10}(N_0 + n_{10})(f_{20} + n_{10})} t \pm \right. \right.$$

$$\left. \left. \pm \text{arth} \sqrt{\frac{N_0}{f_{20}} \frac{n_{10} + f_{20}}{N_0 + n_{10}}} \right) \right\}^{-1}. \quad (5.6)$$

Если же  $N_0 > f_{20}$ , то

$$N = (N_0 - f_{20})(N_0 + n_{10}) \times$$

$$\times \left\{ N_0 + n_{10} - (n_{10} + f_{20}) \times \right.$$

$$\left. \times \text{sn}^2 \left( 2K(k) \frac{t}{T} \pm F(\varphi_0, k) \right) \right\}^{-1}, \quad (5.7)$$

где

$$k^2 = \frac{(N_0 + n_{20})(n_{10} + f_{20})}{(N_0 + n_{10})(n_{20} + f_{20})},$$

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{f_{20}(N_0 + n_{10})}{N_0(f_{20} + n_{10})}}, \quad (5.8)$$

$$T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{f_{10}(n_{20} + f_{20})(N_0 + n_{10})}}, \quad (5.9)$$

$$A = n_{10} + f_{20}.$$

Полагая в формуле (5.6)  $n_{20} = n_{10} \equiv n_0$ , находим

$$N = (N_0 - f_{20})(N_0 + n_0) \times$$

$$\times \left\{ N_0 + n_0 - (n_0 + f_{20}) \times \right.$$

$$\left. \times \text{th}^2 \left( g\sqrt{f_{10}(N_0 + n_0)(f_{20} + n_0)} t \pm \right. \right.$$

$$\left. \left. \pm \text{arth} \sqrt{\frac{f_{20}}{N_0} \frac{N_0 + n_0}{f_{20} + n_0}} \right) \right\}^{-1}. \quad (5.10)$$

Отметим, что полученные выражения (5.1)–(5.9) справедливы при условии, что  $n_{20} \geq n_{10}$ . Для случая  $n_{20} < n_{10}$  необходимо во всех решениях (5.1)–(5.9) заменить соответственно  $n_{20}$  на  $n_{10}$  и  $n_{10}$  на  $n_{20}$ . Кроме того, формулы (5.1)–(5.10) не следует применять в пределе  $N_0 = f_{20}$ , так как они приводят к неопределенностям типа  $0 \cdot \infty$ . С точки зрения перехода к пределу  $N_0 = f_{20}$  более удобными являются решения, полученные ниже. При  $f_{20} > N_0$  получаем

$$N = (N_0 + n_{10})(N_0 + n_{20}) \times$$

$$\times \text{cn}^2 \left( 2K(k) \frac{t}{T} \pm F(\varphi_0, k) \right) \times$$

$$\times \left\{ N_0 + n_{20} - (N_0 + n_{10}) \times \right.$$

$$\left. \times \text{sn}^2 \left( 2K(k) \frac{t}{T} \pm F(\varphi_0, k) \right) \right\}^{-1}, \quad (5.11)$$

где

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{n_{10}(N_0 + n_{20})}{n_{20}(N_0 + n_{10})}}, \quad (5.12)$$

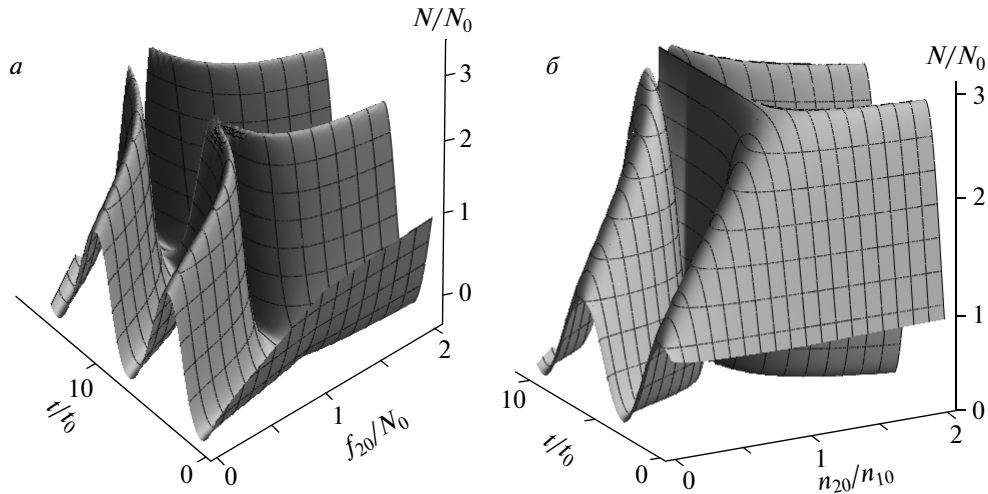
а модуль  $k^2$ , период  $T$  и амплитуда  $A$  колебаний определяются по-прежнему формулами (5.2) и (5.3). Здесь при  $N_0 = 0$  получаем снова выражения (5.4) и (5.5). Если  $f_{20} < N_0$ , то решение имеет вид (5.11) с заменой везде  $N_0$  на  $f_{20}$  и  $f_{20}$  на  $N_0$ . Если же  $f_{20} = N_0$ , то эволюция является аperiодической и описывается решением вида

$$N = (N_0 + n_{10})(N_0 + n_{20}) \times$$

$$\times \left\{ N_0 + n_{20} + (n_{20} - n_{10}) \times \right.$$

$$\left. \times \text{sh}^2 \left( g\sqrt{f_{10}(N_0 + n_{10})(N_0 + n_{20})} t \pm \right. \right.$$

$$\left. \left. \pm \text{arth} \sqrt{\frac{1 + N_0/n_{20}}{1 + N_0/n_{10}}} \right) \right\}^{-1}. \quad (5.13)$$



**Рис. 16.** Временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  в зависимости от величины параметров а)  $f_{20}/N_0$  при  $n_{20}/N_0 = 5, f_{10}/N_0 = 80$  и б)  $n_{20}/n_{10}$  при  $f_{20}/N_0 = 4, n_{10}/N_0 = 2, f_{10}/N_0 = 80$

В формулах (5.11)–(5.13) предполагается, что  $n_{20} > n_{10}$ . Если же  $n_{20} < n_{10}$ , то в (5.11)–(5.13) следует заменить везде  $n_{10}$  на  $n_{20}$  и  $n_{20}$  на  $n_{10}$ . Отметим, что переход к пределу  $n_{20} = n_{10}$  в формулах (5.11)–(5.13) приводит к неопределенности  $0 \cdot \infty$ . Такой переход следует осуществлять в формулах (5.1)–(5.9).

Наконец, если одновременно  $N_0 = f_{20}$  и  $n_{20} = n_{10} \equiv n_0$ , то решение имеет вид

$$N = N_0(N_0 + n_0) \exp\left(\pm 2g\sqrt{f_{10}}(N_0 + n_0)t\right) \times \left\{ n_0 + N_0 \exp\left(\pm 2g\sqrt{f_{10}}(N_0 + n_0)t\right) \right\}^{-1}. \quad (5.14)$$

На рис. 16 представлена временная эволюция плотности молекул при различных значениях параметров  $f_{20}/N_0$  и  $n_{20}/n_{10}$ . Видно, что в общем случае эволюция является периодической, причем амплитуда и период колебаний зависят от параметров системы. Если отношения  $f_{20}/N_0$  и  $n_{20}/n_{10}$  приближаются к единице, то период осцилляций плотности молекул быстро растет и при  $f_{20}/N_0 = 1, n_{20}/n_{10} = 1$  обращается в бесконечность. При этом профиль плотности молекул стремится к форме гиперболического секанса и тангенса с асимптотами соответственно  $N = 0$  и  $N = N_0 + n_{10}$  (рис. 16, 17). Таким образом, в этом приближении возможно установление аperiodической эволюции при двух соотношениях между различными параметрами. На рис. 17 представлена аperiodическая эволюция при одновременном выполнении равенств  $N_0 = f_{20}$  и  $n_{10} = n_{20}$ . Что ка-

сается периода колебаний, то вне области прямых  $f_{20}/N_0 = 1$  и  $n_{20}/n_{10} = 1$  период медленно изменяется в зависимости от параметров и обращается в бесконечность на этих прямых (рис. 18).

Если рассматривать случай произвольной начальной разности фаз  $\theta_0$ , то для получения решения  $N(t)$  необходимо знать корни уравнения

$$N(N_0 + n_{10} - N)(N_0 + n_{20} - N)(f_{20} - N_0 + N) - N_0 n_{10} n_{20} f_{20} \cos^2 \theta_0 = 0. \quad (5.15)$$

Запишем эти корни в убывающем порядке  $N_+ > N_{max} > N_{min} > N_-$ . Тогда решение основного уравнения для  $N(t)$  принимает вид

$$N = \left\{ N_{min}(N_{max} - N_-) - N_-(N_{max} - N_{min}) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sn}^2\left(2K(k)\frac{t}{T} \pm F(\varphi_0, k)\right) \right\} \times \\ \times \left\{ N_{max} - N_- - (N_{max} - N_{min}) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sn}^2\left(2K(k)\frac{t}{T} \pm F(\varphi_0, k)\right) \right\}^{-1}, \quad (5.16)$$

где

$$k^2 = \frac{(N_+ - N_-)(N_{max} - N_{min})}{(N_+ - N_{min})(N_{max} - N_-)}, \\ \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(N_{max} - N_-)(N_0 - N_{min})}{(N_{max} - N_{min})(N_0 - N_-)}}, \quad (5.17)$$



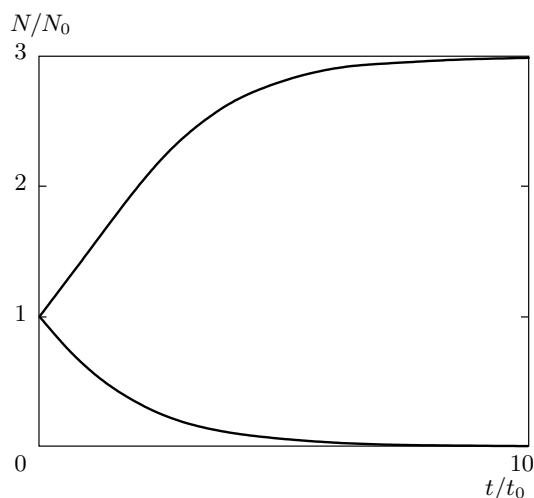


Рис. 17. Апериодическая временная эволюция плотности молекул при  $f_{20}/N_0 = 1, n_{10}/n_{20} = 1$

$$A = N_{max} - N_{min},$$

$$T = \frac{2K(k)}{g\sqrt{f_{10}(N_+ - N_{min})(N_{max} - N_-)}}. \tag{5.18}$$

Отметим, что при  $\theta_0 = 0$  имеет место в общем случае периодический режим эволюции системы, период и амплитуда которой зависят от начальных плотностей частиц. Однако при выполнении соотношения  $N_0 f_{20} (n_{10} + n_{20}) = n_{10} n_{20} (N_0 + f_{20})$  амплитуда осцилляций обращается в нуль при отличном от нуля периоде, т. е. плотность молекул со временем не изменяется, хотя начальные плотности всех частиц отличны от нуля.

На рис. 19 представлена зависимость периода колебаний плотности молекул от отношения  $f_{20}/N_0$  и начальной разности фаз. Видно, что при  $\theta_0 = \pi/2$  и  $f_{20}/N_0 = 1$  период колебаний расходится, т. е. эволюция оказывается аperiодической. На рис. 20 представлена эволюция плотности молекул в зависимости от начальной разности фаз  $\theta_0$ , откуда видна возможность фазового контроля системы. С ростом  $\theta_0$  существенно меняются амплитуда и период колебаний.

Аналогичные результаты можно получить и в приближении заданной плотности атомов первого сорта  $n_{10} \gg n_{20}, f_{10}, f_{20}, N_0$  заменой везде  $f_{10}$  на  $n_{10}$  и наоборот, а также в приближении заданной плотности атомов второго сорта  $n_{20} \gg n_{10}, f_{10}, f_{20}, N_0$  заменой  $f_{10}$  на  $n_{20}$  и наоборот.

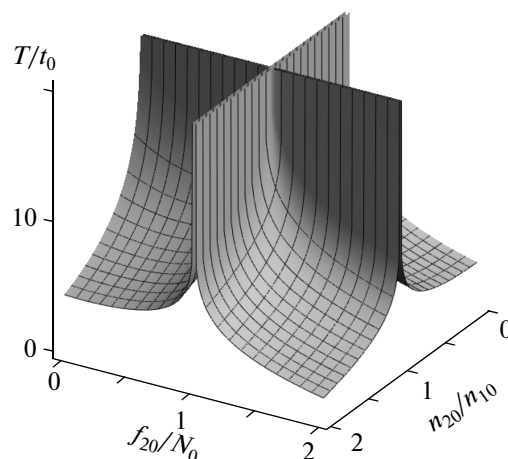


Рис. 18. Зависимость периода колебаний плотности молекул от параметров  $f_{20}/N_0$  и  $n_{20}/n_{10}$  при  $f_{10}/N_0 = 80, n_{10}/N_0 = 2$

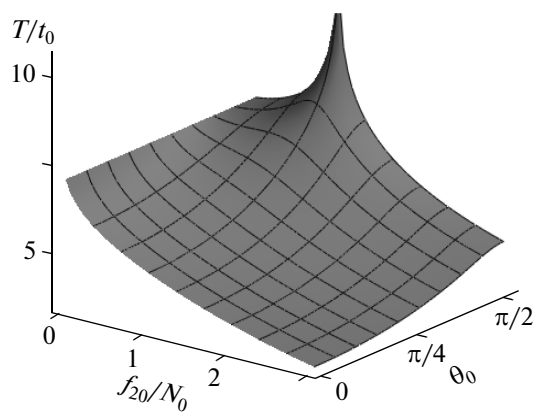
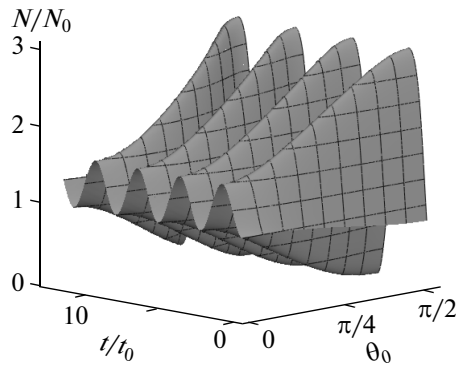


Рис. 19. Зависимость периода колебаний плотности молекул от параметров  $f_{20}/N_0$  и  $\theta_0$  при  $n_{10}/N_0 = 2, n_{20}/N_0 = 2.5, f_{10}/N_0 = 80$

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из представленных выше результатов следует, что временная эволюция атомов, молекул и фотонов в процессе стимулированной рамановской конверсии двух бозе-атомов в бозе-гетеромолекулу существенно определяется начальными плотностями частиц и начальной разностью фаз. При начальной разности фаз  $\theta_0 = (2k + 1)\pi/2$  имеют место как периодический, так и аperiодический режимы образования и распада молекул. В условиях периодического режима конверсии падающие импульсы лазерного излучения то усиливаются, то ослабляются. Изменением параметров системы можно гибко контроли-



**Рис. 20.** Временная эволюция плотности молекул  $N/N_0$  в зависимости от начальной разности фаз  $\theta_0$  при  $n_{10}/N_0 = 2$ ,  $n_{20}/N_0 = 2.5$ ,  $f_{20}/N_0 = 3$ ,  $f_{10}/N_0 = 80$

ровать ее эволюцию. Особенно важен фазовый контроль при неизменных начальных плотностях частиц. При начальной разности фаз  $\theta_0 = k\pi$  существуют периодический режим эволюции и режим покоя при отличных от нуля плотностях частиц. Если хотя бы одна из подсистем в начальный момент времени отсутствует, то такой режим невозможен.

Отметим, что бозе-стимулирование динамики изученного процесса (химической реакции) является чрезвычайно важным обстоятельством. Коллективные осцилляции плотностей частиц свидетельствуют о существовании когерентности в системе. Рассмотренный процесс стимулируется благодаря макрозаполнению не только исходной атомной системы, но и конечного состояния. Отметим, что рассматриваемый процесс атомно-молекулярной конверсии при  $T \neq 0$  в термодинамически равновесной системе атомов не может привести к подобным коллективным осцилляциям, так как фазы всех частиц, участвующих в процессе, являются случайными. В этом смысле изученный процесс представляет пример новой химии — так называемой ультрахолодной когерентной суперхимии, в которой имеет место когерентное стимулирование химических реакций. Учет сильной зависимости динамики от разности фаз свидетельствует о возможности фазового контроля реакции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Cold Molecules: Theory, Experiment, Applications*, ed. by R. V. Krems, W. C. Stwalley, and B. Friedrich, CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York (2009).

2. T. Köhler, R. Goral, and P. S. Julienne, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1311 (2006).
3. C. Chin, R. Grimm, and P. Julienne, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
4. L. D. Carr, D. De Mille, R. V. Krems, and J. Ye, *New J. Phys.* **11**, 055049 (2009).
5. L. D. Carr and J. Ye, *New J. Phys.* **11**, 055009 (2009).
6. J. Fortagh and C. Zimmermann, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 235 (2007).
7. K. M. Jones, E. Tiesinga, P. D. Lett, and P. S. Julienne, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 483 (2006).
8. Б. Д. Агапьев, М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, *УФН* **163**, 1 (1993).
9. C. Zhao, X. Zou, H. Pu, and G. C. Guo, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 010401 (2008).
10. J. M. Sage, S. Sainis, T. Bergeman, and D. De Mille, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 203001 (2005).
11. S. Ospelkaus, A. Pe'er, K.-K. Ni, J. J. Zirbel, B. Neyenhuis, S. Kotochigova, P. S. Julienne, J. Ye, and D. S. Jin, *Nature Phys.* **4**, 622 (2008).
12. K.-K. Ni, S. Ospelkaus, M. H. G. de Miranda, A. Pe'er, B. Neyenhuis, J. J. Zirbel, S. Kotochigova, P. S. Julienne, D. S. Jin, and J. Ye, *Science* **322**, 231 (2008).
13. C. Chin, T. Kraemer, M. Mark, J. Herbig, P. Waldburger, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 123201 (2005).
14. S. Ospelkaus, K.-K. Ni, D. Wang, M. H. G. de Miranda, B. Neyenhuis, G. Quemener, P. S. Julienne, J. L. Bohn, D. S. Jin, and J. Ye, *Science* **327**, 853 (2010).
15. Z. Idziaszek and P. S. Julienne, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 113202 (2010).
16. D. J. Heinzen, R. Wynar, P. D. Drummond, and K. V. Kheruntsyan, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5029 (2000).
17. R. Wynar, R. S. Freeland, D. J. Han, C. Ruy, and D. J. Heinzen, *Science* **287**, 1016 (2000).
18. P. D. Drummond, K. V. Kheruntsyan, and H. He, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3055 (1998).
19. B. J. Cusack, T. J. Alexander, E. A. Ostrovskaya, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. A* **65**, 013609 (2001).

20. E. Timmermans, T. Tommasini, R. Côté et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2691 (1999); *Phys. Rev.* **315**, 199 (1999).
21. P. S. Julienne, K. Burnett, Y. B. Band, and W. C. Stwalley, *Phys. Rev. A* **58**, R797 (1998).
22. M. Koštrun, M. Mackie, R. Cote, and J. Javanainen, *Phys. Rev. A* **62**, 063616 (2000).
23. J. Javanainen and M. Mackie, *Phys. Rev. A* **59**, R3186 (1999).
24. C. M. Savage, J. Ruostekoski, and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **57**, 3805 (1998).
25. J. Ruostekoski and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **55**, 3625 (1997), **56**, 2996 (1997).
26. J. J. Hope and M. K. Olsen, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3220 (2001).
27. П. И. Хаджи, Д. В. Ткаченко, Письма в ЖЭТФ **83**, 120 (2006); ЖЭТФ **131**, 425 (2007).
28. P. I. Khadzhi and D. V. Tkachenko, *J. Nanoelectron. Optoelectron.* **4**, 101 (2009).
29. M. Gupta and K. R. Dastidar, *Phys. Rev. B* **41**, 195302 (2008), *Phys. Rev. A* **80**, 043618 (2009).
30. C. A. Regal, G. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Nature* **424**, 47 (2003).
31. M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin, *Nature* **426**, 573 (2003).
32. C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
33. K. E. Strecker, G. B. Partridge, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080406 (2003).
34. S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmayer, G. Hendl, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240402 (2003).
35. J. Cubizolles, T. Bourdel, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240401 (2003).
36. M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250401 (2003).
37. M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
38. S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmayer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, *Science* **302**, 2101 (2003).
39. T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 050401 (2004).
40. J. Herbig, T. Kraemer, M. Mark, T. Weber, C. Chin, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Science* **301**, 1510 (2003).
41. A. Fioretti, D. Comparat, A. Crubellier, O. Dulieu, F. Masnou-Seeuws, and P. Pillet, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4402 (1998).
42. D. DeMille, S. Sainis, J. Sage, T. Bergeman, S. Kotochigova, and E. Tiesinga, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 043202 (2008).
43. M. Viteau, A. Chotia, M. Allegrini, N. Bouloufa, O. Dulieu, D. Comparat, and P. Pillet, *Science* **321**, 232 (2008).
44. J. G. Danzl, E. Haller, M. Gustavsson, M. J. Mark, R. Hart, N. Bouloufa, O. Dulieu, H. Ritsch, and H.-C. Nägerl, *Science* **321**, 1062 (2008).
45. K. B. Devis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
46. S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, *Nature* **392**, 151 (1998).
47. K. Xu, T. Mukaiyama, J.-R. Abo-Shaeer, J. K. Chin, D. E. Miller, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 210402 (2003).
48. Ph. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen, and B. J. Verhaar, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 69 (1998).
49. R. Dürr, T. Volz, A. Marte, and G. Rempe, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 020406 (2004).
50. M. Theis, G. Thalhammer, K. Winkler, M. Hellwig, G. Ruff, R. Grimm, and J. H. Denschlag, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 123001 (2004).
51. F. K. Fatemi, K. M. Jones, and P. D. Lett, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4462 (2000).
52. F. Lang, K. Winkler, C. Strauss, R. Grimm, and J. H. Denschlag, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 133005 (2008).
53. G. Thalhammer, K. Winkler, F. Lang, S. Schmid, R. Grimm, and J. H. Denschlag, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 050402 (2006).
54. K. Winkler, F. Lang, G. Thalhammer, P. v. d. Straten, R. Grimm, and J. H. Denschlag, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 043201 (2007).

55. M. Kitagawa, K. Enomoto, K. Kasa, Y. Takahashi, R. Ciurylo, P. Naidon, and P. S. Julienne, *Phys. Rev. A* **77**, 012719 (2008).
56. S. K. Tokunaga, J. M. Dyne, E. A. Hinds, and M. R. Tarbutt, *New J. Phys.* **11**, 055038 (2009).
57. S. K. Tokunaga, J. O. Stack, J. J. Hudson, B. E. Sauer, E. A. Hinds, and M. R. Tarbutt, *J. Chem. Phys.* **126**, 124314 (2007).
58. A.-C. Voigt, M. Taglieber, L. Costa, T. Aoki, W. Wieser, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 020405 (2009).
59. E. Wille, F. M. Spiegelhalder, G. Kerner, D. Naik, A. Trenkwalder, G. Hendl, F. Schreck, R. Grimm, T. G. Tiecke, J. T. M. Walraven, S. J. J. M. F. Kokkelmans, E. Tiesinga, and P. S. Julienne, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 053201 (2008).
60. T. G. Tiecke, M. R. Goosen, A. Ludewig, S. D. Gensemer, S. Kraft, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 053202 (2010).
61. F. M. Spiegelhalder, A. Trenkwalder, D. Naik, G. Hendl, F. Schreck, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 223203 (2009).
62. C. A. Stan, M. W. Zwiernik, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 143001 (2004).
63. K.-A. B. Soderberg, N. Gemelke, and C. Chin, *New J. Phys.* **11**, 055022 (2009).
64. G. Deiglmayr, P. Pellegrini, A. Grochola, M. Repp, R. Côte, O. Dulieu, R. Wester, and M. Weidemüller, *New J. Phys.* **11**, 055034 (2009).
65. G. Deiglmayr, A. Grochola, M. Repp, K. Mortlbauer, C. Gluck, J. Lange, O. Dulieu, R. Wester, and M. Weidemüller, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 133004 (2008).
66. C. Haimberger, J. Kleinert, M. Bhattacharya, and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. A* **70**, 021402(R) (2004).
67. C. Haimberger, J. Kleinert, P. Zabawa, A. Wakim, and N. P. Bigelow, *New J. Phys.* **11**, 055042 (2009).
68. S. Ghosal, R. J. Doyle, C. P. Koch, and J. M. Hutson, *New J. Phys.* **11**, 055011 (2009).
69. J. T. Kim, D. Wang, E. E. Eyler, P. L. Gould, and W. C. Stwalley, *New J. Phys.* **11**, 055020 (2009).
70. M. W. Manchini, G. D. Telles, A. R. L. Caires, V. S. Bagnato, and L. G. Marcassa, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 133203 (2004).
71. L. G. Marcassa, G. D. Telles, S. R. Muniz, and V. S. Bagnato, *Phys. Rev. A* **63**, 013413 (2001).
72. D. Wang, J. Qi, M. F. Stone, O. Nikolayeva, H. Wang, B. Hattaway, S. D. Gensemer, P. L. Gould, E. E. Eyler, and W. C. Stwalley, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 243005 (2004).
73. A. Simoni, M. Zakkanti, C. D'Errico, M. Fattori, G. Roati, M. Inguscio, and G. Modugno, *Phys. Rev. A* **77**, 052705 (2008).
74. E. Hodby, S. T. Thompson, C. A. Regal, M. Greiner, A. C. Wilson, D. S. Jin, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 120402 (2005).
75. S. Knoop, F. Ferlaino, M. Berninger, M. Mark, H.-C. Nägerl, R. Grimm, J. P. D'Incao, and B. D. Esry, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 053201 (2010).
76. F. Ferlaino, C. D'Errico, G. Roati, M. Zakkanti, M. Inguscio, G. Modugno, and A. Simoni, *Phys. Rev. A* **73**, 040702 (2006).
77. C. Klempt, T. Menninger, O. Topic, J. Will, W. Ertmer, E. Tiemann, and J. Arlt, *Phys. Rev. A* **76**, 020701 (2007).
78. C. Klempt, T. Henninger, O. Topic, M. Scherer, L. Kattner, E. Tiemann, W. Ertmer, and J. J. Arlt, *Phys. Rev. A* **78**, 061602(R) (2008).
79. J. J. Zirbel, K.-K. Ni, S. Ospelkaus, J. P. D'Incao, C. E. Wiemann, J. Ye, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 053201 (2008); **100**, 143201 (2008).
80. S. Ospelkaus, K.-K. Ni, G. Quemener, B. Neyenhuis, D. Wang, M. H. G. de Miranda, J. L. Bohn, J. Ye, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 030402 (2010).
81. S. Ospelkaus, C. Ospelkaus, L. Humbert, K. Sengstock, and K. Bongs, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 120403 (2006).
82. C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, L. Humbert, P. Ernst, K. Sengstock, and K. Bongs, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 120402 (2006).
83. J. J. Zirbel, K.-K. Ni, S. Ospelkaus, T. L. Nicholson, M. L. Olsen, P. S. Julienne, C. E. Wieman, J. Ye, and D. S. Jin, *Phys. Rev. A* **78**, 013416 (2008).
84. J. K. Freericks, M. M. Maška, A. Hu, T. M. Hanna, C. J. Williams, P. S. Julienne, and R. Lemanski, *Phys. Rev. A* **81**, 011605(R) (2010).
85. K. Aikawa, D. Akamatsu, J. Kobayashi, M. Ueda, T. Kishimoto, and S. Inouye, *New J. Phys.* **11**, 055035 (2009).
86. C. Weber, G. Barontini, J. Catani, G. Thalhammer, M. Inguscio, and F. Mirandi, *Phys. Rev. A* **78**, 061601(R) (2008).

87. G. Thalhammer, G. Barontini, L. De Sarlo, J. Catani, F. Minardi, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 210402 (2008).
88. G. Thalhammer, G. Barontini, J. Catani, F. Rabatti, C. Weber, A. Simoni, F. Minardi, and M. Inguscio, *New J. Phys.* **11**, 055044 (2009).
89. S. B. Papp and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 180404 (2006).
90. M. Taglieber, A.-C. Voight, T. Aoki, T. W. Hänsch, and K. Dieckmann, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 010401 (2008).
91. J. Kaspzak, M. Richard, S. Kimdermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, R. Andre, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and L. S. Dang, *Nature* **443**, 409 (2006).
92. R. Balili, V. Hartwell, D. Snone, L. Pfeiffer, and K. West, *Science* **316**, 1008 (2007).
93. L.-H. Lu and Y.-Q. Li, *Phys. Rev. A* **77**, 053611 (2008).
94. H. Pu, P. Maenner, W. Zhang, and H. Y. Ling, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 050406 (2007).
95. N. Tsukada, *Phys. Rev. A* **61**, 063602 (2000).
96. J. Keeling, *Phys. Rev. B* **78**, 205316 (2008).
97. P. D. Drummond, K. V. Kheruntsyan, D. J. Hainzen, and R. A. Wynar, *Phys. Rev. A* **65**, 063619 (2002); **71**, 017602 (2005).
98. H. Jing, Y. Deng, and W. Zhang, *Phys. Rev. A* **80**, 025601 (2009).
99. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
100. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1968).