

# КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ С ЗОНОЙ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

*Д. В. Александров, А. П. Малыгин\**

*Уральский государственный университет им. А. М. Горького  
620083, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 3 апреля 2010 г.  
после переработки 3 ноября 2010 г.

Аналитически исследована морфологическая неустойчивость процесса кристаллизации при наличии анизотропной и неоднородной области фазового перехода с учетом течения в жидкости и конвективного теплопереноса в двухфазной зоне. Рассмотрен механизм нарушения устойчивости процесса затвердевания, заключающийся в конвективном переносе тепла и примеси при течении жидкости по каналам области фазового перехода. Проведен линейный анализ морфологической устойчивости с учетом течения среды в жидкой фазе системы, диффузии примеси в двухфазной зоне и зависимости коэффициентов переноса от фазового состава. Определен параметр эволюции возмущений для анизотропной и неоднородной двухфазной зоны, получены кривые нейтральной устойчивости процесса. Показано, что учет диффузии примеси и увеличение неоднородности зоны фазового перехода расширяют область неустойчивости, а уменьшение анизотропии приводит к ее сужению. Найден новый критерий конвективно-морфологической неустойчивости процесса кристаллизации с двухфазной зоной, который существенно расширяет область неустойчивости при увеличении скорости течения жидкости.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Работы по изучению гидродинамической неустойчивости берут начало с 20-х гг. прошлого столетия. Первый пример ламинарного течения жидкости, которое при определенных условиях становилось неустойчивым, дал Тейлор [1]. Возникновение неустойчивости отвечает за разрушение одного режима течения жидкости и приводит к формированию нового при изменении управляющих процессом параметров системы. Устойчивость задач тепло- и массопереноса с подвижными границами типа Стефана впервые была исследована в классической работе Маллинза и Секерки [2] с помощью методов линейной теории гидродинамической устойчивости [3]. В работе [2] была изучена морфологическая устойчивость плоской границы раздела твердой и жидкой фаз — фронта кристаллизации — к малым возмущениям его формы. Критерий неустойчивости Маллинза–Секерки сводится к выполнению следующего неравенства:

$$(k_l + k_s)^{-1} \left[ k_l \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{h+} + k_s \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{h-} \right] < -m \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{h+}, \quad (1)$$

где  $T$  — температура,  $C$  — концентрация примеси,  $m$  — коэффициент наклона линии ликвидуса,  $k_l$  и  $k_s$  — коэффициенты теплопроводности в жидкой и твердой фазах,  $h$  — координата фронта кристаллизации, а индексы «+» и «-» соответствуют жидкости и твердой фазе (направления координатных осей см. ниже на рис. 1).

Вытеснение примеси плоской границей кристалл–расплав в глубь жидкой фазы и ее накопление перед фронтом приводят в возникновению концентрационного переохлаждения. Условие его образования, полученное Иванцовым [4], имеет вид

$$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{h+} < -m \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{h+}. \quad (2)$$

Концентрационное переохлаждение создает преимущественные условия для роста отдельных выступов твердой фазы в глубь жидкости и, таким образом, приводит к неустойчивости плоской границы разде-

\*E-mail: Alexey.Malygin@usu.ru

ла фаз и зарождению протяженной области фазового превращения.

Неравенства (1) и (2) на практике не дают существенно различные соотношения, и определить, какое из них является более точным критерием неустойчивости, не представляется возможным [5]. Однако физический механизм развития неустойчивости содержится в неравенстве (2), в то время как неравенство (1) является просто следствием линейной теории неустойчивости. С физической точки зрения переохлаждение должно предшествовать неустойчивости и являться причиной ее развития [6]. Поэтому в качестве критерия неустойчивости целесообразно использовать неравенство (2) [7].

Развитие неустойчивости приводит к формированию различных ростовых структур твердой фазы (например, ячеек) на фронте кристаллизации, для расчета размеров которых вблизи кривой нейтральной устойчивости используется аппарат нелинейного анализа [8].

Вообще говоря, при выполнении неравенства (1) или (2) классическую модель Стефана с плоским фронтом использовать уже некорректно; необходимо применять теорию двухфазной зоны. Поскольку скрытая теплота, выделяющаяся при кристаллизации жидкости в области фазового перехода, часто компенсирует концентрационное переохлаждение, процессами нуклеации и кинетики в двухфазном слое можно пренебречь и применять квазиравновесную теорию [6, 9]. В работах [7, 10–12] при изучении различных условий нестационарной кристаллизации было показано, что условие (2) удовлетворяется достаточно быстро и в дальнейшем процесс затвердевания протекает при наличии протяженной области фазового перехода. Другими словами, фронтальная межфазная граница существует обычно или на самых ранних этапах процесса, или в узком диапазоне параметров системы. Во всех остальных случаях фазовый переход имеет место в достаточно широком слое пространства. Известным примером является замерзание морской воды с образованием шуги льда.

При кристаллизации с двухфазной зоной за формирование различных типов неоднородностей распределения примеси и неровностей границы раздела фаз, как и при фронтальном режиме затвердевания, ответственны различные типы неустойчивости. Различают морфологическую и динамическую неустойчивости. В отличие от продольной слоистости, возникающей в результате морфологической неустойчивости плоского фронта относительно синусоидального возмущения с ненулевым волновым числом, по-

перечная слоистость есть результат динамической неустойчивости относительно возмущений с нулевым волновым числом (такие возмущения являются самыми опасными — быстрорастущими). Другими словами, можно сказать, что динамическая неустойчивость есть неустойчивость относительно возмущений скорости кристаллизации при сохранении фронтом или двухфазной зоной своей формы.

Поскольку в процессах кристаллизации с протяженной областью фазового перехода доля твердой фазы на границе между двухфазной зоной и жидкой фазой часто отлична от нуля [7, 13, 14], в таких ситуациях (как и в случае плоского фронта) также может иметь место морфологическая неустойчивость этой границы. Экспериментальные данные [15, 16] и численное моделирование [17] показывают, что течения жидкости в расплаве могут приводить к формированию циркуляционных течений среды по каналам в двухфазной зоне (под каналами понимаются свободные от твердой фазы протоки в двухфазной зоне, заполненные жидкостью). Как показывают экспериментальные данные, при достижении областью фазового перехода некоторой критической толщины  $h_c$  концентрация примеси в жидкости сильно возрастает благодаря притоку примеси из каналов двухфазной зоны [15, 18]. При понижении температуры на границе охлаждения толщина  $h_c$  и количество поступающей из каналов примеси в жидкую часть системы увеличиваются. Вытесненная масса жидкости из каналов замещается потоком, идущим из раствора или расплава в двухфазную область. В качестве одной из причин возникновения каналов можно отметить неустойчивость однородного роста и локальную анизотропию области фазового перехода. Таким образом, возникают замкнутые линии тока, охватывающие двухфазный слой и жидкую часть системы.

В работе [19] предложена простейшая модель, демонстрирующая возникновение морфологической неустойчивости границы между двухфазной областью и жидкостью. Эта модель не учитывает распределения и возмущения доли твердой фазы и концентрации примеси в области фазового превращения (при этом транспорт примеси является причиной появления самой двухфазной зоны). В работе [20] была рассмотрена модель неустойчивости при учете этих распределений, но только для изотропной и однородной двухфазной области, а также при использовании ряда упрощающих гипотез. Ниже показано, что совместный учет диффузионных процессов, распределения доли твердой фазы, анизотропии и неоднородности зоны фазового перехода существен-

но (в разы) увеличивает область морфологической неустойчивости (область развития каналов и других типов неоднородностей).

Отметим, что плотность возникающих в двухфазной зоне каналов может изменяться в весьма широких пределах — от одного канала на весь образец [18] до целой сети каналов, отстоящих друг от друга на расстоянии порядка 1 см [16]. При этом образование таких каналов является весьма распространенным явлением. Они являются причиной неоднородного распределения примеси при затвердевании сплавов [21], замедления скорости роста льда при замерзании морской воды [15], перераспределения отложений минералов при кристаллизации магмы [22]. Возможно, они также встречаются на границе внутреннего и внешнего ядер Земли [23]. Анализ морфологической неустойчивости, проводимый ниже, применим ко всем подобным системам в условиях квазиравновесного затвердевания.

## 2. МОРФОЛОГИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Процессы переноса тепла и массы в области фазового перехода описываются конвективными уравнениями теплопроводности и диффузии примеси, а также уравнением ликвидуса, следующим из фазовой диаграммы системы:

$$\rho_m c_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_l c_l \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_m \nabla T) + \rho_s L \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (3)$$

$$(1-\varphi) \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = \nabla \cdot (D_m \nabla C) + (1-k)C \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (4)$$

$$T = T_* - mC, \quad (5)$$

где  $\mathbf{u}$  — скорость жидкости в каналах,  $L$  — скрытая теплота кристаллизации,  $k$  — коэффициент распределения примеси,  $T_*$  — температура фазового перехода чистого вещества,  $\rho_m$ ,  $c_m$ ,  $k_m$  и  $D_m$  — плотность, теплоемкость, теплопроводность и коэффициент диффузии примеси, зависящие от доли  $\varphi$  твердой фазы. Зависимости коэффициентов переноса от доли твердой фазы предполагаются линейными, что теоретически было обосновано в работе [24] для систем с преимущественным направлением роста новой фазы (случай направленного затвердевания). Таким образом, коэффициенты переноса в двухфазной зоне определяются через коэффициенты переноса в твердой и жидкой фазах согласно правилу смесей [24]

$$\begin{aligned} \rho_m c_m &= \rho_l c_l (1 - \varphi) + \rho_s c_s \varphi, \\ k_m &= k_l (1 - \varphi) + k_s \varphi, \quad D_m = D_l (1 - \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

где индексы «s» и «l» обозначают величины, определенные для твердой и жидкой фаз (диффузией примеси в твердой фазе пренебрегается). Стоит отметить, что при проведении линейного анализа устойчивости любая реальная зависимость этих коэффициентов должна быть линеаризована.

Течение жидкости по каналам двухфазной области будем описывать с помощью уравнения Дарси для пористой среды:

$$\mu \mathbf{u} = \mathbf{\Pi} \cdot (\rho_l \mathbf{g} - \nabla p_1) \equiv -\mathbf{\Pi} \cdot \nabla p, \quad (7)$$

где  $p_1$  — давление,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}(\varphi)$  — тензор проницаемости двухфазной зоны, зависящий от доли  $\varphi$  твердой фазы. Отметим, что уравнение (7) применимо, если число Рейнольдса  $Re \leq S$ , где  $S$  — число, заключающееся в интервале от 3 до 10 [25]. Проницаемости в горизонтальном ( $\Pi_h$ ) и вертикальном ( $\Pi_v$ ) направлениях связаны с помощью коэффициента анизотропии  $0 \leq \beta \leq 1$ :  $\Pi_h = \beta^2 \Pi_v$  [19]. Изменение проницаемости с глубиной двухфазного слоя связано с наличием температурного градиента. Следуя работе [19], будем моделировать такую зависимость следующим образом:

$$\Pi_v(z) = \Pi_v(0)e^{\gamma z}, \quad \Pi_h(z) = \beta^2 \Pi_v(z), \quad (8)$$

где  $\gamma$  — параметр неоднородности. Такое пространственное распределение подтверждается лабораторными экспериментами [26].

На границе между двухфазной зоной и жидкостью выполняются условия баланса тепла и массы:

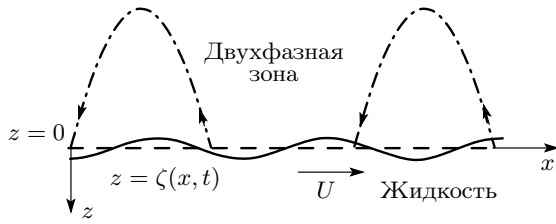
$$\rho_s L \varphi_b V = k_m(\varphi_b) \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{b^-} - k_l \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{b^+}, \quad (9)$$

$$(1-k)C_b \varphi_b V = D_m(\varphi_b) \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{b^-} - D_l \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{b^+}, \quad (10)$$

где  $V$  — скорость движения границы, а индекс «b» обозначает величину на этой границе.

Будем считать, что в равновесии межфазная граница находится в положении  $z = 0$  (рис. 1). Течение жидкости со скоростью  $U$  (вызванное движением среды или конвекцией) возмущает границу в некоторое новое положение

$$z = \zeta(x, t) = \hat{\zeta} \exp(iax + \sigma t),$$



**Рис. 1.** Схема процесса. Штриховая линия показывает положение межфазной границы в равновесии. Штрихпунктирные линии изображают течение жидкости в каналах

где  $\hat{\zeta}$  — амплитуда возмущений,  $\alpha$  и  $\sigma$  — волновое число и параметр скорости роста возмущений (параметр неустойчивости). Будем рассматривать ситуацию, когда течение в области, занимаемой жидкостью, безвихревое, а потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = 0$  ( $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ ). Пренебрегая скоростью течения жидкости в двухфазном слое по сравнению со скоростью течения жидкости в области  $z > 0$ , на межфазной границе имеем условие непротекания жидкости. С учетом этого запишем потенциал скорости в жидкости:

$$\Phi = Ux - iU\zeta(x, t)e^{-\alpha z}. \quad (11)$$

Давление на межфазной границе, определяющее течение жидкости по каналам зоны фазового перехода, определяется из уравнения Бернулли с помощью выражения (11) и имеет вид

$$p = -\rho_l \alpha U^2 \zeta(x, t). \quad (12)$$

Далее, принимая во внимание уравнение непрерывности  $\nabla \mathbf{u} = 0$  (изменения доли твердой фазы в каналах двухфазной зоны считаются малыми), из соотношений (7) и (8) находим уравнение для давления в области фазового перехода:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

Его решение имеет вид

$$p = -\rho_l \alpha U^2 \zeta e^{qz}, \quad q = -\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4\alpha^2 \beta^2}}{2}. \quad (13)$$

На поверхности  $z = 0$  выражение (13) переходит в (12).

Обычно температурное поле в твердой фазе системы и двухфазной зоне можно считать практически линейной функцией пространственной координаты (см., например, работы [13, 27, 28]). Это

объясняется тем, что время релаксации температуры на несколько порядков меньше всех остальных характерных времен процесса (время релаксации диффузионного поля, характерного времени перемещения границы раздела фаз). Учитывая сказанное, имеем

$$T(x, z, t) = T_b + Gz + \hat{\theta}(z) \exp(i\alpha x + \sigma t),$$

где  $T_b$  — температура на межфазной границе,  $G$  — температурный градиент. Первые два слагаемых представляют собой температуру в невозмущенном состоянии, а третье характеризует возмущения. При этом концентрация примеси определяется уравнением (5). Амплитуда  $\hat{\theta}$  возмущений температуры находится из системы уравнений (3)–(5) с учетом выражения (13), зависимостей (6) и возмущений доли твердой фазы

$$\varphi(z, t) = \varphi_0 + \Phi(z) \exp(i\alpha x + \sigma t)$$

(здесь  $\varphi_0$  и  $\Phi$  — невозмущенное значение и амплитуда возмущений доли твердой фазы). Далее в качестве невозмущенного приближения будем использовать стационарное приближение ( $\partial/\partial t \rightarrow 0$ ), обоснованное в работе [20]. Далее, исключая из системы (3)–(5) концентрацию примеси, возмущая получившиеся уравнения с учетом линейных по возмущениям слагаемых и затем исключая  $\varphi_0$ , получим уравнение для отыскания амплитуды  $\hat{\theta}$ :

$$\frac{d^2 \hat{\theta}}{dz^2} - \alpha^2 \hat{\theta}(z) = A e^{(\gamma+q)z}, \quad (14)$$

где

$$A = \left(1 + \frac{\kappa(K-1)}{KD_l}\right) \frac{\Pi_v(0)\alpha U^2 q G \hat{\zeta}}{\kappa\nu},$$

$$\kappa = \frac{k_s}{\rho_l c_l}, \quad K = \frac{k_s}{k_l}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_l}.$$

Решение уравнения (14) с учетом условий ограниченности амплитуды  $\hat{\theta}$  при  $z \rightarrow -\infty$  и известного значения на межфазной границе  $\hat{\theta}(0) = -G\hat{\zeta}$  (последнее следует из температурного распределения) имеет вид

$$\hat{\theta}(z) = -G\hat{\zeta}e^{\alpha z} + \frac{A [e^{(q+\gamma)z} - e^{\alpha z}]}{(q+\gamma)^2 - \alpha^2}, \quad (15)$$

$$\beta \neq 1, \quad \gamma \neq 0.$$

Для изотропной ( $\beta = 1$ ) и однородной ( $\gamma = 0$ ) области фазового перехода из уравнения (14) имеем следующее решение:

$$\hat{\theta}(z) = -G\hat{\zeta}e^{\alpha z} + \frac{A}{2\alpha} z e^{\alpha z}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0. \quad (16)$$

Исключая теперь из граничных условий (9) и (10) долю  $\varphi_b$  с использованием выражений (5) и (6), получаем граничное условие на межфазной поверхности

$$\rho_s L V = k_s \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{b^-} + \frac{(1-k)k_l(T_b - T_*)V}{D_l}. \quad (17)$$

При выводе было использовано условие предельного равновесия на границе со стороны жидкости [7]:

$$-m \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{b^+} = \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{b^+}.$$

Возмущая выражение (17) вблизи положения равновесия  $z = 0$ , подставляя затем амплитуды из соотношений (15) и (16), получаем уравнение для определения параметра неустойчивости. Разрешая это уравнение относительно  $\sigma$ , окончательно находим следующий критерий конвективной морфологической неустойчивости:

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha V \left( \frac{B}{q + \gamma + \alpha} - 1 \right) - \frac{(1-k)V^2}{K D_l}, \\ &\quad \beta \neq 1, \quad \gamma \neq 0, \\ \sigma &= \alpha V \left( \frac{B}{2\alpha} - 1 \right) - \frac{(1-k)V^2}{K D_l}, \\ &\quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad B = \frac{A}{\alpha G \zeta}, \\ V &= \frac{k_s G}{\rho_s L - (1-k)k_l(T_b - T_*)/D_l}. \end{aligned} \quad (18)$$

Одним из главных управляющих процессом параметров является скорость затвердевания, определяемая теплофизическими свойствами системы и температурным градиентом. Величина скорости затвердевания  $V$  для квазиравновесного процесса, определяемая в соответствии с приведенной выше зависимостью, по порядку величины составляет от  $10^{-7}$  см/с для водно-солевых растворов до  $10^{-5}$  см/с для типичных металлических расплавов (значения теплофизических параметров приведены в работах [12–14]). Знак параметра  $\sigma$  определяет области неустойчивости ( $\sigma > 0$ ) и устойчивости ( $\sigma < 0$ ) процесса.

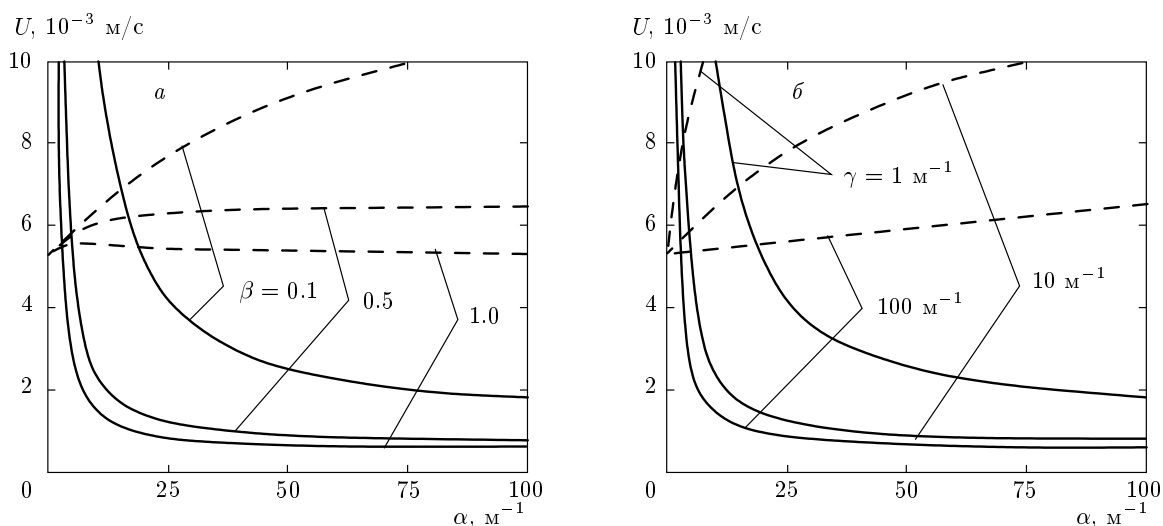
Остановимся более подробно на использованном квазистационарном приближении. Скорость  $V$  движения межфазной границы между двухфазной зоной и жидкостью определяется в каждый момент времени температурным градиентом  $G$  в двухфазной области. Все остальные параметры в выражении для скорости  $V$  считаются постоянными. Времена изменения градиента  $G$  имеют величину порядка  $b/V$ . При толщине зоны  $b$  даже в несколько миллиметров эта величина будет порядка  $10^6$  с для водных

растворов и переохлаждений порядка нескольких градусов и  $10^4$  с для металлических сплавов и переохлаждений порядка тысячи градусов. Поскольку характерные времена  $t_1$  внешних возмущений (времена релаксации температурного поля или времена гидродинамических возмущений, которые порядка нескольких секунд) намного меньше, чем времена  $t_2 = b/V$ , за которые скорость движения границы успеет существенно измениться, можно использовать квазистационарное приближение. Таким образом, условиями применимости квазистационарного приближения является малость отношения  $t_1/t_2$ .

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Критерий неустойчивости (18) является основным результатом настоящей теории. Рисунок 2 показывает, что развиваемая теория с учетом диффузии примеси и распределения доли твердой фазы в зоне фазового перехода дает существенное отличие от ранее известного критерия работы [19]. Кривые нейтральной устойчивости  $\sigma = 0$  при соответствующих волновых числах отличаются более чем в два раза. Физически это объясняется тем, что вытесняемая при росте твердой фазы примесь повышает концентрацию примеси и понижает температуру фазового перехода отдельных областей двухфазной зоны (которые заполнены жидкостью), что увеличивает неоднородность структурно-фазового состава и является дестабилизирующим процесс фактором. Из рис. 2а видно, что уменьшение параметра анизотропии ведет к расширению области устойчивости, что объясняется ослаблением конвективного переноса в области фазового превращения. Рисунок 2б иллюстрирует увеличение параметра неоднородности, что приводит к расширению области неустойчивости вследствие более интенсивного теплопереноса.

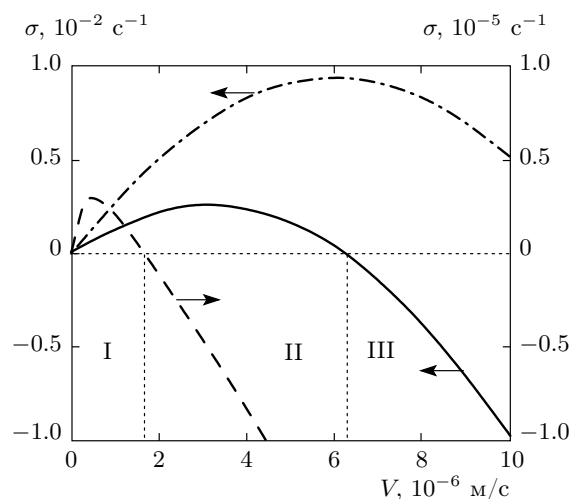
Отметим еще несколько важных особенностей критерия (18). Увеличение кинематической вязкости  $\nu$  приводит к уменьшению параметра  $B$  и усиливает отрицательный вклад в правую часть выражения (18), т. е. сдвигает процесс в сторону устойчивости. Обратный эффект наблюдается при возрастании скорости жидкости  $U$ . При фиксированном значении  $U$  сдвиг в сторону коротковолновых возмущений (что соответствует большим волновым числам) приводит систему в неустойчивое состояние, в то время как критерий работы [19] дает совершенно противоположную картину (см. рис. 2). Иначе говоря, возмущения с малой длиной волны легче формируют различные неоднородности. Остановимся на этом подробнее.



**Рис. 2.** Кривые нейтральной устойчивости для морской воды при различных значениях параметра анизотропии  $\beta$  при  $\gamma = 10 \text{ м}^{-1}$  (а) и параметра неоднородности  $\gamma$  при  $\beta = 0.1$  (б). Области устойчивости и неустойчивости находятся ниже и выше соответствующих кривых. Сплошные линии — выражения (18); штриховые — упрощенная модель [19];  $\nu = 1.07 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\kappa = 1.33 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $D = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $V = 10^{-7} \text{ м/с}$ ,  $\Pi_\nu(0) = 10^{-8} \text{ м}^2$ ,  $K = 3.8$ ,  $k = 0$

Можно ожидать, что возмущения формируют неоднородности того же порядка, что и их характерная длина, а меньший размер неоднородности требует преодоления меньшего энергетического барьера для ее образования. Оценим скорость роста шероховатостей межфазной границы, которые могут приводить к турбулизации жидкости вблизи поверхности  $z = 0$ . Проводя оценку параметра  $\sigma$  в выражении (18) как  $10^{-5}$ – $10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , заключаем, что амплитуда неровности в 1 см может возрасти в разы за несколько часов. Для расчета размеров возникающих неоднородных структур необходимо определить амплитуды возмущений, что может быть сделано в рамках нелинейной теории устойчивости. Такой анализ, позволяющий исследовать развитие колебательной неустойчивости вблизи кривой нейтральной устойчивости, может быть проведен в духе работы [8].

Как уже обсуждалось выше, двухфазная зона появляется в результате концентрационного переохлаждения и развития морфологической неустойчивости плоского фронта, описанной в классической работе [2]. При этом в отсутствие конвекции в процессе может иметь место лишь динамическая неустойчивость, представляющая собой осцилляции двухфазной области как целого с нулевым волновым числом. Устойчивость области фазового перехода по отношению к таким колебаниям, являющимися наиболее быстрорастущими, была исследована ранее [29]. На рис. 3 показана зависимость параметра



**Рис. 3.** Зависимость параметра неустойчивости от скорости кристаллизации для морской воды при  $\alpha = 10 \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 10 \text{ м}^{-1}$ . Сплошная и штрихпунктирная линии построены по формуле (18) соответственно при  $U = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$  и  $U = 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ . Пунктирная линия построена по формуле (38) из работы [29]. Точки пересечения кривых с линией  $\sigma = 0$  показывают переход через кривую нейтральной устойчивости. Вертикальные линии разделяют три области: динамическая и конвективная неустойчивости (I), динамическая устойчивость и конвективная неустойчивость (II), динамическая и конвективная устойчивости (III)

роста возмущений от скорости кристаллизации для динамической неустойчивости, рассматриваемой в работе [29], и исследуемой конвективной морфологической неустойчивости. Их сравнение показывает, что конвективная неустойчивость увеличивает область динамической неустойчивости I до области конвективной неустойчивости I+II. При этом возрастание скорости течения жидкости  $U$  расширяет область неустойчивости (рис. 3, сплошная и штрихпунктирная кривые).

Специально подчеркнем, что диапазон скоростей кристаллизации, использованный для иллюстрации результатов, характерен для широкого класса систем (как указано в разд. 2, они составляют по порядку величины от  $10^{-7}$  до  $10^{-5}$  см/с). Поскольку фазовый переход очень часто протекает при наличии протяженной области, критерий устойчивости (18) определяет различные режимы протекания таких процессов при наличии ( $\sigma > 0$ ) или отсутствии ( $\sigma < 0$ ) каналов. При этом возникновение неустойчивости в геофизике сопровождается формированием шероховатостей на границе лед–океан, которые изменяют тепловой поток через ледовую толщу, а в металлургии неустойчивость приводит к образованию неоднородного распределения примеси и неровностей поверхности слитка.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00298) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. I. Taylor, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **223**, 289 (1923).
2. W. W. Mullins and R. F. Sekerka, *J. Appl. Phys.* **35**, 444 (1964).
3. C. C. Lin, *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1955).
4. Г. П. Иванцов, *ДАН СССР* **81**, 179 (1951).
5. R. F. Sekerka, in *Crystal Growth: An Introduction*, ed. by P. Hartman, North Holland, Amsterdam (1973), p. 403.
6. R. N. Hills, D. E. Loper, and P. H. Roberts, *Quart. J. Appl. Math.* **36**, 505 (1983).
7. M. G. Worster, *J. Fluid Mech.* **167**, 481 (1986).
8. D. J. Wollkind and L. A. Segel, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **268**, 351 (1970).
9. В. Т. Борисов, *Теория двухфазной зоны металлургического слитка*, Металлургия, Москва (1987).
10. П. Н. Вабищевич, В. В. Мансуров, А. Г. Чурбанов, *Хим. пром.* **10**, 39 (1994).
11. D. V. Alexandrov, A. G. Churbanov, and P. N. Vabishchevich, *Int. J. Fluid Mech. Res.* **26**, 248 (1999).
12. Yu. A. Buyevich, D. V. Alexandrov, and V. V. Mansurov, *Macrokinetics of Crystallization*, Begell House, New York (2001).
13. Д. В. Александров, А. П. Малыгин, *ДАН* **411**, 390 (2006).
14. D. V. Alexandrov, A. P. Malygin, and I. V. Alexandrova, *Ann. Glaciol.* **44**, 118 (2006).
15. J. S. Wettlaufer, M. G. Worster, and H. E. Huppert, *Geophys. Res. Lett.* **24**, 1251 (1997).
16. J. S. Wettlaufer, M. G. Worster, and H. E. Huppert, *J. Fluid Mech.* **344**, 291 (1997).
17. T. P. Schulze and M. G. Worster, *J. Fluid Mech.* **388**, 197 (1999).
18. M. I. Bergman, D. R. Fearn, J. Bloxham, and M. C. Shannon, *Metall. Mater. Trans. A* **28**, 859 (1997).
19. D. L. Feltham, M. G. Worster, and J. S. Wettlaufer, *J. Geophys. Res.* **107**, 3009 (2002).
20. D. L. Feltham and M. G. Worster, *J. Fluid Mech.* **391**, 337 (1999).
21. A. Hellowell, J. R. Sarazin, and R. S. Steube, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **345**, 507 (1993).
22. S. Tait and C. Jaupart, *J. Geophys. Res.* **97**, 6735 (1992).
23. M. I. Bergman and D. R. Fearn, *Geophys. Res. Lett.* **21**, 477 (1994).
24. G. K. Batchelor, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **6**, 227 (1974).
25. П. Я. Полубаринова-Кочина, *Теория движения грунтовых вод*, Наука, Москва (1977).
26. N. Ono and T. Kasai, *Ann. Glaciol.* **6**, 298 (1980).
27. S. Martin and P. Kauffman, *J. Fluid Mech.* **64**, 507 (1974).
28. J. S. Wettlaufer, M. G. Worster, and H. E. Huppert, *J. Geophys. Res.* **105**, 1123 (2000).
29. D. V. Alexandrov and A. O. Ivanov, *J. Cryst. Growth* **210**, 797 (2000).