ЖЭТФ, 2011, том 139, вып. 4, стр. 816–821

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СУБДИФФУЗИОННО-РЕАКЦИОННОГО ФРОНТА И «СТАРЕНИЕ» ЧАСТИЦ

В. П. Шкилев *

Институт химии поверхности Национальной академии наук Украины
03164, Киев, Украина

Поступила в редакцию 4 октября 2010 г.

Определяется минимальная скорость субдиффузионно-реакционного фронта для двух случаев, различающихся деталями реакционной кинетики. В одном случае рождающаяся в результате химической реакции частица приобретает подвижность одного реагента, в другом — другого реагента. Хотя диффузионные свойства обоих реагентов одинаковы, в одном случае скорость фронта оказывается конечной, а в другом — равной нулю. Различие объясняется тем, что распространение фронта приводит к селекции частиц одного из реагентов по подвижностям. Частицы этого реагента, находящиеся в области фронта, имеют более высокую среднюю подвижность, чем частицы, находящиеся вне фронта.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительное внимание уделяется изучению химических реакций, сопровождаемых субдиффузией [1–5]. Характерным свойством субдиффузии является «старение» частиц, т. е. снижение со временем их подвижности. Субдиффузия наблюдается во многих физических, химических и биологических системах [6–10]. Взаимодействие субдиффузии с химическими реакциями может приводить к интересным явлениям, отсутствующим в системах с обычной диффузией.

Некоторые недавние работы посвящены теоретическому описанию распространяющихся фронтов в системах с субдиффузией. В работе [11] было рассмотрено поведение фронта в системе, которая в случае нормальной диффузии описывается уравнением Колмогорова – Петровского – Пискунова (КПП). Было показано, что субдиффузия не меняет качественное поведение фронта: так же, как и при нормальной диффузии, фронт будет распространяться с постоянной скоростью. В работе [12] рассматривалась аналогичная задача при несколько другой химической кинетике. В случае нормальной диффузии принятая модель также сводится к уравнению КПП. Было установлено, что скорость фронта в этой модели будет монотонно уменьшаться до нуля. Результаты обеих работ были подтверждены численными расчетами в работах [13, 14].

Рассмотрение субдиффузионно-реакционного фронта в работах [11–14] велось в рамках модели случайных блужданий с непрерывным временем. Основным параметром этой модели является функция распределения времени ожидания («возраста» частицы). В отсутствие химической реакции «возраст» отсчитывается от момента последнего скачка, совершенного частицей. При наличии химической реакции отсчет возраста рождающихся в результате реакции частиц может вестись по-разному. Существуют, по крайней мере, две возможности. Можно либо отсчитывать возраст частицы от момента ее рождения, либо назначать новой частице возраст старой частицы, от которой новая частица произошла. Модели, рассмотренные в работах [11, 12], различаются именно способом отсчета возраста новых частиц. В работе [11] возраст отсчитывается от момента рождения новой частицы, а в работе [12] новая частица наследует возраст старой частицы. Таким образом, в работе [11] рождающиеся частицы имеют подвижность, соответствующую нулевому возрасту, а в работе [12] — возрасту, который с течением времени увеличивается до бесконечности. Поскольку подвижность частиц с нулевым возрастом имеет конечное значение, а при увеличении возраста снижается до нуля, в первом случае мы получаем конечную скорость фронта, а во втором — нулевую.

*E-mail: shkilevv@ukr.net

В работе [15] была рассмотрена модель, в которой рождающиеся частицы, так же как и в работе [12], приобретают возраст частиц, от которых они произошли. Однако минимальная скорость фронта в этой модели оказалась отличной от нуля. Было высказано мнение, что различие в полученных результатах может быть объяснено тем, что в одной модели концентрация одного из реагентов поддерживается постоянной, а в другой концентрации обоих реагентов меняются в пространстве и времени [15]. Данная работа посвящена прояснению этого вопроса.

Уравнения, с помощью которых вычислялась скорость фронта в работах [12, 15], сложны и трудно поддаются анализу. В работе [15] уравнение имело следующий вид:

$$\frac{\partial \rho^A(t,x)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\int_0^t M(t-\tau)\rho^A(\tau,x)\,\times\right.$$
$$\left.\times\,\exp\left[\int_\tau^t r\left(\rho^A(u,x)\right)\,du\right]d\tau\right\} +$$
$$+\,r\left(\rho^A(t,x)\right)\rho^A(t,x), \quad (1)$$

где $M(t)$ — функция, которая в пространстве изображений Лапласа представляется в виде $\tilde{M}(s) = s^{1-\gamma}/(\tau_0)^\gamma$; $r(\rho)$ — функция типа Колмогорова–Петровского–Пискунова:

$$\max_{0\le\rho\le1} r(\rho) = r(0) > 0, \quad r(1) = 0.$$

Уравнение (1) записано для концентрации вещества A, участвующего в реакции $A + B \to B + 2A$. Концентрация вещества B предполагается постоянной. В работе [12] скорость фронта вычислялась с помощью уравнения

$$\frac{\partial \rho^B(t,x)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\int_0^t M(t-\tau)\rho^B(\tau,x)\,\times\right.$$
$$\left.\times\,\exp\left[-\int_\tau^t k\left(1-\rho^B(u,x)\right)\,du\right]d\tau\right\} -$$
$$-\,k\left(1-\rho^B(t,x)\right)\rho^B(t,x). \quad (2)$$

Данное уравнение записано для концентрации вещества B, участвующего в реакции $A+B \to 2A$. Сумма концентраций веществ A и B предполагается постоянной. Чтобы определить, в чем заключается существенное различие между этими двумя моделями, перейдем от описания в терминах общих концентраций к более детальному описанию. Более детальное описание осуществляется с помощью двух моделей субдиффузии–реакции. Одна из них представляет собой предложенную в работе [16] нелинейную модель случайных блужданий с непрерывным временем, в которой возраст частицы рассматривается в качестве одной из независимых переменных. Другая модель — это предложенная в работе [17] среднеполевая модель случайных ловушек, в которой в качестве дополнительной независимой переменной используется состояние частицы, определяемое типом узла, в котором находится частица. Первая модель является обобщением модели случайных блужданий с непрерывным временем. В ней причиной аномальной диффузии является наличие «тяжелого хвоста» в функции распределения времени ожидания. Во второй модели причиной аномальной диффузии является неоднородность среды. Первая модель может использоваться для описания биологических и экологических систем, в которых возраст частиц (роль частиц в этом случае играют блуждающие биологические объекты) имеет вполне определенный смысл. В то же время вторая модель более адекватно отражает процессы, происходящие в неоднородных физических, химических и биологических системах. Несмотря на существенное различие, обе эти модели приводят к одним и тем же уравнениям относительно общих концентраций частиц.

2. РАССМОТРЕНИЕ В РАМКАХ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Рассмотрим систему уравнений, описывающую случайные блуждания частиц типов A и B, реагирующих по схеме $A + B \to 2A$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\xi^A(t,\tau,x) = -\xi^A(t,\tau,x)\,\times$$
$$\times\int_{x'} W(\tau, x \to x')\,dx' + k\xi^B(t,\tau,x)\rho^A(t,x), \quad (3)$$

$$\xi^A(t,0,x) = \int_{x'}\int_0^\infty \xi^A(t,\tau,x')W(\tau,x' \to x)\,d\tau\,dx', \quad (4)$$

$$\rho^A(t,x) = \int_0^\infty \xi^A(t,\tau,x)\,d\tau, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\xi^B(t,\tau,x) = -\xi^B(t,\tau,x)\,\times$$
$$\times\int_{x'} W(\tau, x \to x')\,dx' - k\xi^B(t,\tau,x)\rho^A(t,x), \quad (6)$$

$$\xi^B(t,0,x) = \int\limits_{x'}\int\limits_0^\infty \xi^B(t,\tau,x')W(\tau,x'\to x)\,d\tau\,dx', \quad (7)$$

$$\rho^B(t,x) = \int\limits_0^\infty \xi^B(t,\tau,x)\,d\tau. \quad (8)$$

Здесь $\xi^A(t,\tau,x)$ и $\xi^B(t,\tau,x)$ — концентрации частиц типов A и B, имеющих возраст τ; $W(\tau,x\to x')$ — скорость, с которой частицы, имеющие возраст τ, перемещаются из точки x в точку x'. Уравнения (6)–(8) для концентрации частиц типа B являются частным случаем уравнений, рассмотренных в работах [16, 18] и не нуждаются в пояснениях. Уравнения (3)–(5) для концентрации частиц типа A отличаются от уравнений, рассмотренных в работах [16, 18], тем, что член, описывающий приток частиц, фигурирует не в уравнении (4), а в уравнении (3). Это означает, что новые частицы приобретают некоторый возраст, отличный от нулевого. Из уравнения (3) видно, что рождающаяся частица типа A приобретает возраст вступающей в реакцию частицы типа B (вступающая в реакцию, частица типа B и рождающаяся частица типа A имеют один и тот же возраст τ).

Диффузионные свойства частиц обоих типов, описываемые функцией $W(\tau,x\to x')$, одинаковы, поэтому, если в начальный момент времени сумма концентраций веществ A и B постоянна в пространстве, то она будет постоянной в любой момент времени:

$$\rho^A(t,x)+\rho^B(t,x) = \mathrm{const}. \quad (9)$$

В таком случае из уравнения (6) можно исключить концентрацию вещества A и получить замкнутую систему уравнений относительно концентрации вещества B. Если константу в соотношении (9) принять равной единице, то уравнение (6) приобретет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\xi^B(t,\tau,x) = -\xi^B(t,\tau,x)\int\limits_{x'} W(\tau,x\to x')\,dx' - k\xi^B(t,\tau,x)\left(1-\rho^B(t,x)\right). \quad (10)$$

Как показано в работе [18], систему уравнений (7), (8), (10) можно свести к одному уравнению относительно общей концентрации частиц типа B. Для этого следует уравнение (10) проинтегрировать методом характеристик, полученное выражение для $\xi^B(t,\tau,x)$ подставить в уравнения (7) и (8), а затем из полученных двух уравнений относительно двух неизвестных $\rho^B(t,x)$ и $\xi^B(t,0,x)$ вторую неизвестную исключить, используя дифференцирование и переход к изображениям Лапласа. Если предположить, что

$$\xi^A(0,\tau,x) = \rho^A(0,x)\delta(\tau), \quad (11)$$

$$\psi(t) \approx \mathrm{const}\frac{(\tau_0)^\gamma}{t^{1+\gamma}}, \quad (12)$$

$$w(q) \approx 1-\frac{\sigma^2}{2}q^2, \quad (13)$$

где $w(q)$ — преобразование Фурье функции $w(x)$, а $\psi(t)$ и $w(x)$ — функция распределения времени ожидания и функция распределения длин скачков, выражающиеся через функцию $W(\tau,x\to x')$ следующим образом:

$$W(t,x\to x')\exp\left\{-\int\limits_0^t\int\limits_{x'} W(\tau,x\to x')\,dx'd\tau\right\} = w(x-x')\psi(t),$$

то полученное в результате уравнение будет совпадать с уравнением (2). Поскольку минимальная скорость фронта, вычисленная с помощью уравнения (2), равна нулю, скорость фронта, описываемого системой уравнений (3)–(8), (11)–(13), также будет равна нулю.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\xi^A(t,\tau,x) = -\xi^A(t,\tau,x)\times \times\int\limits_{x'} W(\tau,x\to x')\,dx' + k\xi^A(t,\tau,x)\rho^B(t,x), \quad (14)$$

$$\xi^A(t,0,x) = \int\limits_{x'}\int\limits_0^\infty \xi^A(t,\tau,x')W(\tau,x'\to x)\,d\tau\,dx', \quad (15)$$

$$\rho^A(t,x) = \int\limits_0^\infty \xi^A(t,\tau,x)\,d\tau, \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\xi^B(t,\tau,x) = -\xi^B(t,\tau,x)\times \times\int\limits_{x'} W(\tau,x\to x')\,dx' - k\xi^A(t,\tau,x)\rho^B(t,x), \quad (17)$$

$$\xi^B(t,0,x) = \int\limits_{x'}\int\limits_0^\infty \xi^B(t,\tau,x')W(\tau,x'\to x)\,d\tau\,dx', \quad (18)$$

$$\rho^B(t,x) = \int\limits_0^\infty \xi^B(t,\tau,x)\,d\tau, \tag{19}$$

которая отличается от уравнений (3)–(8) видом реакционного члена. Эти уравнения также описывают случайные блуждания частиц типов A и B, реагирующих по схеме $A+B\to 2A$, но теперь рождающаяся частица типа A приобретает возраст вступающей в реакцию частицы типа A. Используя условие (9), можно исключить из уравнения (14) концентрацию частиц типа B и получить замкнутую систему уравнений относительно концентрации частиц типа A. Эта система уравнений будет отличаться от уравнений, рассмотренных в работе [18], лишь знаком перед реакционным членом. Это отличие не мешает нам использовать тот же метод получения одного уравнения относительно общей концентрации частиц типа A. В результате преобразований получается уравнение

$$\frac{\partial\rho^A(t,x)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\int\limits_0^t M(t-\tau)\rho^A(\tau,x)\,\times\right. \\ \left.\times\,\exp\left[\int\limits_\tau^t k\left(1-\rho^A(u,x)\right)\,du\right]d\tau\right\} + \\ + k\left(1-\rho^A(t,x)\right)\rho^A(t,x), \tag{20}$$

которое является частным случаем уравнения (1), соответствующим функции $r(\rho^A(t,x))$, равной $k\left(1-\rho^A(t,x)\right)$. Следовательно, в этом случае минимальная скорость фронта будет отлична от нуля.

Два рассмотренных случая различаются только тем, что в одном из них рождающаяся в результате химической реакции частица приобретает возраст одного реагента, а в другом — другого. На первый взгляд минимальная скорость фронта в обоих случаях должна быть равна нулю, поскольку частицы обоих типов подвержены «старению» и их подвижность со временем снижается до нуля. Такой вывод подтверждается также результатами работы [19], в которой установлено, что скорость фронта будет уменьшаться до нуля при любой химической кинетике. Однако в работе [19] точные уравнения были заменены приближенными, поэтому полученные там результаты не могут рассматриваться в качестве строго доказанных. На самом деле, как мы видим, во втором случае скорость фронта оказывается отличной от нуля. Каким образом это происходит, на качественном уровне можно понять, рассматривая процессы, происходящие внутри движущегося фронта.

Напомним, что впереди фронта находятся только частицы типа B. Продвижение фронта заключается в том, что частицы типа A диффундируют в область, занятую частицами типа B, и при столкновении частиц двух типов происходит превращение частиц типа B в частицы типа A. Таким образом частицы типа B постепенно замещаются частицами типа A. Рассмотрим промежуток времени Δt. За это время фронт продвинется на некоторое расстояние за счет того, что некоторые частицы типа A совершат скачки в направлении движения фронта. Именно эти частицы будут находиться в области фронта. Поскольку они за время Δt совершили хотя бы один скачок, их возраст не будет превышать Δt. В то же время позади фронта будут иметься частицы с большими возрастами, следовательно, средний возраст частиц типа A в области фронта будет меньше, чем средний возраст частиц типа A позади фронта. Это рассуждение справедливо по отношению к обеим моделям. Но если мы рассмотрим частицы, рождающиеся в области фронта, то между моделями появится различие. В модели из работы [12] рождающиеся частицы наследуют возраст частиц типа B, которые неуклонно стареют. Поэтому подвижность рождающихся частиц с течением времени будет снижаться до нуля. В модели из работы [15] рождающиеся частицы приобретают возраст частиц типа A, находящихся в области фронта. Возраст этих частиц близок к нулю, поэтому их подвижность будет близка к подвижности, соответствующей нулевому возрасту. Таким образом, в модели [12] скорость фронта с течением времени снижается до нуля, а в модели [15] остается большей нуля.

3. РАССМОТРЕНИЕ В РАМКАХ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ЛОВУШЕК

Перечислим некоторые свойства уравнений, описывающих субдиффузию в модели случайных ловушек. Уравнения имеют следующий вид [17]:

$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{j=1}^N \nu_j\rho_j(t,x)\right], \tag{21}$$

$$\frac{\partial\rho_i(t,x)}{\partial t} = -\nu_i\rho_i(t,x) + \alpha_i F(t,x), \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^N \rho_j(t,x) = \rho(t,x). \tag{23}$$

Здесь $\rho_i(t,x)$ — концентрация частиц, находящихся в узлах i-го типа; ν_i — частота, с которой частицы покидают узлы i-го типа; α_i — доля узлов i-го типа; N — число типов узлов. Функция $F(t,x)$ имеет смысл числа скачков, совершаемых частицами в единицу времени в единице объема и выражается через концентрации следующим образом:

$$F(t,x)=\sum_{j=1}^{N}\nu_j\rho_j(t,x)+ \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{j=1}^{N}\nu_j\rho_j(t,x)\right]. \quad (24)$$

Если концентрации являются медленно меняющимися функциями координат, то вторым членом в правой части этого соотношения можно пренебречь.

Диффузионную подвижность частиц можно определить как число скачков, совершаемых одной частицей в единицу времени: $\kappa=F/\rho$. Из соотношения (24) следует, что $\kappa=\sum_{j=1}^{N}\nu_j\beta_j$, где коэффициенты β_j характеризуют распределение частиц по узлам разных типов: $\beta_j=\rho_j/\rho$.

При хаотическом распределении частиц коэффициенты β_j равны α_j. Уравнения (22) показывают, что частицы, совершающие скачки, распределяются по узлам разных типов хаотическим образом. Следовательно, если в момент времени t рассмотреть частицы, которые совершили скачки в интервале времени $(t-\Delta t,t)$, то при достаточно малом Δt распределение этих частиц будет близко к хаотическому.

Уравнения (22) описывают процесс установления локально-равновесного распределения частиц по узлам разного типа. При локально-равновесном распределении частиц коэффициенты β_j равны $\alpha_j/\nu_j\xi$, где $\xi=\sum_{j=1}^{N}(\alpha_j/\nu_j)$ — среднее время пребывания частицы в узле. Из этих выражений видно, что концентрации частиц, находящихся в узлах с малыми частотами, при равновесном распределении будут выше, чем при хаотическом распределении, а концентрации частиц, находящихся в узлах с большими частотами, наоборот, ниже. Следовательно, подвижность частиц при равновесном распределении меньше, чем при хаотическом.

Модель (21)–(23) математически эквивалентна модели случайных блужданий с непрерывным временем с функцией распределения времени ожидания, имеющей вид

$$\tilde{\psi}(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i\nu_i}{s+\nu_i}.$$

Для того чтобы в этой модели получить автомодельную субдиффузию, описываемую уравнением с дробной производной по времени, нужно найти распределение узлов по типам, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{1}{1+(\tau_0 s)^\gamma}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i\nu_i}{s+\nu_i}.$$

Решением этого уравнения является непрерывное распределение

$$\alpha(\nu)=\frac{\sin(\gamma\pi)}{\pi\nu\left[(\tau_0\nu)^\gamma+(\tau_0\nu)^{-\gamma}+2\cos(\gamma\pi)\right]}. \quad (25)$$

Для такого распределения среднее время пребывания частицы в узле равно бесконечности, а локально-равновесное распределение не определено. Процесс установления локального равновесия никогда не заканчивается. Частицы будут перетекать на узлы со все более малыми частотами, вследствие чего их подвижность будет уменьшаться до нуля [20].

В рамках модели случайных ловушек уравнениям (3)–(8) соответствуют следующие уравнения:

$$\frac{\partial\rho^A(t,x)}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{j=1}^{N}\nu_j\rho_j^A(t,x)\right]+ k\rho^A(t,x)\rho^B(t,x), \quad (26)$$

$$\frac{\partial\rho_i^A(t,x)}{\partial t}=-\nu_i\rho_i^A(t,x)+\alpha_iF^A(t,x)+ k\rho_i^B(t,x)\rho^A(t,x), \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\rho_j^A(t,x)=\rho^A(t,x), \quad (28)$$

$$\frac{\partial\rho^B(t,x)}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{j=1}^{N}\nu_j\rho_j^B(t,x)\right]- k\rho^A(t,x)\rho^B(t,x), \quad (29)$$

$$\frac{\partial\rho_i^B(t,x)}{\partial t}=-\nu_i\rho_i^B(t,x)+\alpha_iF^B(t,x)- k\rho_i^B(t,x)\rho^A(t,x), \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^{N}\rho_j^B(t,x)=\rho^B(t,x). \quad (31)$$

Здесь $\rho_i^A(t,x)$ ($\rho_i^B(t,x)$) — концентрация частиц типа A (B), находящихся в узлах i-го типа. Функция $F^A(t,x)$ ($F^B(t,x)$) определяет число скачков, совершаемых частицами типа A (B) в единицу времени в единице объема.

Уравнениям (14)–(19) соответствуют уравнения

$$\frac{\partial \rho^A(t,x)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{j=1}^N \nu_j \rho_j^A(t,x)\right] + k\rho^A(t,x)\rho^B(t,x), \quad (32)$$

$$\frac{\partial \rho_i^A(t,x)}{\partial t} = -\nu_i \rho_i^A(t,x) + \alpha_i F^A(t,x) + k\rho_i^A(t,x)\rho^B(t,x), \quad (33)$$

$$\sum_{j=1}^N \rho_j^A(t,x) = \rho^A(t,x), \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho^B(t,x)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{j=1}^N \nu_j \rho_j^B(t,x)\right] - k\rho^A(t,x)\rho^B(t,x), \quad (35)$$

$$\frac{\partial \rho_i^B(t,x)}{\partial t} = -\nu_i \rho_i^B(t,x) + \alpha_i F^B(t,x) - k\rho_i^A(t,x)\rho^B(t,x), \quad (36)$$

$$\sum_{j=1}^N \rho_j^B(t,x) = \rho^B(t,x). \quad (37)$$

Различие между этими двумя системами уравнений состоит в том, что в первой из них рождающаяся частица типа A оказывается в том же состоянии, что и вступающая в реакцию частица типа B, а во второй — в том же состоянии, что и вступающая в реакцию частица типа A. Используя условие (9), каждую из систем (26)–(31) и (32)–(37) можно свести к одному уравнению относительно общей концентрации [21]. Если в качестве распределения узлов по типам взять распределение (25), а в качестве начального распределения частиц по узлам разных типов — хаотическое распределение $\beta(\nu) = \alpha(\nu)$, то в результате получим уравнения (2) и (20). Следовательно, минимальная скорость фронта, описываемого уравнениями (26)–(31), равна нулю, а фронта, описываемого уравнениями (32)–(37), отлична от нуля.

В данной модели средняя подвижность частиц является функцией распределения частиц по узлам разных типов. Поскольку частицы типа B с течением времени перетекают на узлы со все меньшими частотами, их подвижность будет снижаться до нуля. Поэтому в модели (26)–(31), в которой рождающаяся частица типа A оказывается в том же состоянии, что и вступающая в реакцию частица типа B, подвижность частиц типа A, находящихся в области фронта, будет снижаться до нуля. В модели (32)–(37) частицы типа A, находящиеся в области фронта, будут распределены по узлам разного типа почти хаотически, поэтому их подвижность будет оставаться большей нуля. Этим в данной модели объясняется различие в скоростях фронта.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Mendez, S. Fedotov, and W. Horsthemke, *Reaction-Transport Systems: Mesoscopic Foundations, Fronts, and Spatial Instabilities*, Springer-Verlag, Berlin (2010).
2. F. Sagues, V. P. Shkilev, and I. M. Sokolov, Phys. Rev. E **77**, 032102 (2008).
3. B. I. Henry, T. A. M. Langlands, and S. I. Wearne, Phys. Rev. E **74**, 031116 (2006).
4. K. Seki, M. Wojcik, and M. Tachija, J. Chem. Phys. **119**, 2165 (2003).
5. А. И. Шушин, В. П. Сакун, Хим. физика **23**(5), 48 (2004).
6. J.-P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
7. M. B. Isichenko, Rev. Mod. Phys. **64**, 961 (1992).
8. В. В. Учайкин, ЖЭТФ **124**, 903 (2003).
9. R. Metzler and J. Klafter, J. Phys. A **37**, R161 (2004).
10. *Anomalous Transport: Foundations and Applications*, ed. by R. Klages, G. Radons, and I. M. Sokolov, Wiley-VCH, Weinheim (2007).
11. A. Yadav, S. Fedotov, V. Mendez, and W. Horsthemke, Phys. Lett. A **371**, 374 (2007).
12. D. Froemberg, H. Schmidt-Martens, I. M. Sokolov, and F. Sagues, Phys. Rev. E **78**, 011128 (2008).
13. H. Schmidt-Martens, D. Froemberg, I. M. Sokolov, and F. Sagues, Phys. Rev. E **79**, 041135 (2009).
14. D. Campos and V. Mendez, Phys. Rev. E **80**, 021133 (2009).
15. S. Fedotov, Phys. Rev. E **81**, 011117 (2010).
16. M. O. Vlad and J. Ross, Phys. Rev. E **66**, 061908 (2002).
17. В. П. Шкилев, ЖЭТФ **128**, 655 (2005).
18. A. Yadav and W. Horsthemke, Phys. Rev. E **74**, 066118 (2006).
19. Y. Nec, V. A. Volpert, and A. A. Nepomnyashchy, Discrete and Continuous Dynamical Systems **27**, 827 (2010).
20. В. П. Шкилев, ЖЭТФ **132**, 1214 (2007).
21. В. П. Шкилев, ЖЭТФ **135**, 403 (2009).