ЖЭТФ, 2011, том 139, вып. 5, стр. 856–867 © 2011

КОГЕРЕНТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В НЕКОГЕРЕНТНОМ КАНАЛЕ РАССЕЯНИЯ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВОЗБУЖДЕННЫМИ АТОМАМИ

*Б. А. Векленко**

Московский энергетический институт (Технический университет)
111250, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 января 2010 г.
после переработки 7 октября 2010 г.

Рассеяние резонансного электромагнитного поля возбужденным атомом не может быть описано полуклассической теорией излучения, оперирующей с неквантованным электромагнитным полем. Эффекты квантования поля проявляются здесь на макроскопическом уровне и приводят к эволюции статистических свойств излучения в процессе рассеяния. Отмечена существенная роль комбинированного процесса, состоящего из связки процесса упругого рассеяния на атоме и вынужденного излучения того же атома, не допускающая исследование методами стандартной теории возмущений. Комбинированному процессу рассеяния в протяженных средах присущи когерентные свойства, не описываемые стандартным показателем преломления.

1. ВВЕДЕНИЕ

Резонансное рассеяние электромагнитного поля на возбужденных системах привлекло повышенное внимание после обнаружения Коестером эффекта усиления света, селективно отраженного от инверсно заселенной среды [1]. Попытки объяснения этого явления в рамках классического описания электромагнитного поля к количественному согласию теории и эксперимента не привели [2–4]. Такие попытки продолжаются вплоть до настоящего времени [5]. В работе [6] было обращено внимание на необходимость привлечения теории квантованного электромагнитного поля. Однако построить такую количественную теорию до сих пор не представлялось возможным из-за необходимости суммирования сильно сингулярных слагаемых теории возмущений [7]. В настоящей работе изложен метод преодоления этой трудности. Суть предлагаемого метода выглядит так.

Пусть резонансное излучение рассеивается на некоторой системе, начальное состояние которой описывается в представлении взаимодействия волновой функцией ψ_0. Полную волновую функцию электромагнитного поля и рассеивающей системы после рассеяния обозначим через Ψ. Разложение этой функции по базису волновых функций ψ_i рассеивателя имеет вид

$$\Psi = f_0\psi_0 + \sum_{i\neq 0} f_i\psi_i = f_0\psi_0 + (\Psi - f_0\psi_0),$$

причем слагаемое с ψ_0 выписано отдельно. Предположим, что рассеиваемый свет находится в квантовом когерентном состоянии с отличным от нуля значением $\langle \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\rangle \neq 0$ электрической напряженности в любой точке пространства $\mathbf{r}$ в момент времени t. Нас интересует квантовое среднее от оператора $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}$ в отраженном свете:

$$\langle \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\rangle = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu}(\mathbf{r},t) = \langle \Psi|\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}(\mathbf{r},t)|\Psi\rangle = \\ = \langle f_0\psi_0|\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}(\mathbf{r},t)|f_0\psi_0\rangle + \langle \Psi - f_0\psi_0|\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}|\Psi - f_0\psi_0\rangle = \\ = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu(c)}(\mathbf{r},t) + \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu(n)}(\mathbf{r},t). \quad (1)$$

Будем говорить, что первое слагаемое в правой части (1) описывает когерентный канал рассеяния, при котором среда возвращается после рассеяния в исходное квантовое состояние. Второе слагаемое правой части (1) описывает некогерентные процессы рассеяния, при которых квантовое состояние среды изменяется. К таким процессам относится комптоновское рассеяние, комбинационное рассеяние и,

*E-mail: veklenkoba@yandex.ru

что очень важно, вынужденное излучение света. Еще раз подчеркнем, что когерентное рассеяние Гейзенберга–Крамерса и вынужденное излучение света описываются разными каналами рассеяния. Это означает, что при рассеянии средой с невозбужденными атомами первое слагаемое дает когерентное рассеяние Гейзенберга–Крамерса, а второе — комбинационное рассеяние. Если же в среде находятся возбужденные атомы, то из-за процессов вынужденного излучения избежать учета некогерентного канала рассеяния даже при исследовании лишь селективного отражения не удается. В целом, наблюдаемая напряженность $\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\rangle$, т.е. левая часть (1), может быть найдена независимо с помощью полуклассической теории излучения, если отвлечься от флуктуационных оптических процессов и их влияния на $\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\rangle$. Область применимости полуклассической теории излучения чрезвычайно обширна, но это вовсе не означает, что величина $\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\rangle$ определяет собой и билинейные характеристики поля.

Пусть нас интересуют энергетические характеристики электромагнитного поля, выражаемые через нормальное произведение операторов $\langle\hat{N}(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu})^2\rangle$. Эту величину снизу можно оценить следующим образом. Воспользуемся тем, что в представлении взаимодействия

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}(\mathbf{r},t) = i\sum_{\mathbf{k}\lambda}\sqrt{\frac{\hbar ck}{2V}}\,e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}\times \\ \times\left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-ickt)-\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+ickt)\right),$$

где $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}$ — операторы уничтожения и рождения фотонов в состоянии с волновым вектором $\mathbf{k}$ и индексом поляризации λ. Эти операторы удовлетворяют стандартным перестановочным соотношениям

$$\left[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda};\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\right]=\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}.$$

Электромагнитное поле считается поперечным, $\lambda=1,2$. Через $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ обозначены единичные векторы линейной поляризации, V — объем квантования. Поскольку операторы $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}$ взаимно сопряжены,

$$\left\langle\sum_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}\sqrt{k}\,\left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}-\langle\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\rangle\right)\times \\ \times\sum_{\mathbf{k}'\lambda'}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\sqrt{k'}\,\left(\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}-\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\rangle\right)\times \\ \times\exp\left\{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-ic(k-k')t\right\}\right\rangle\geq 0.$$

Отсюда

$$\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}\,e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\langle\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\rangle\times \\ \times\exp\left\{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-ic(k-k')t\right\}\geq \\ \geq\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}\,e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\langle\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\rangle\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\rangle\times \\ \times\exp\left\{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-ic(k-k')t\right\}.$$

Если электромагнитное поле обладает характерной частотой ω_0 и характерной длиной волны $\lambda\!\!\!^{-}_0$ и нас интересуют масштабы времен и расстояний, существенно превышающие $1/\omega_0$ и $\lambda\!\!\!^{-}_0$, то справедливым оказывается неравенство

$$\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}\,e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\rangle\times \\ \times\exp\left\{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-ic(k-k')t\right\}+ \\ +\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}\,e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}'\lambda'}\rangle\times \\ \times\exp\left\{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}+ic(k-k')t\right\}\gg \\ \gg\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}\,e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\langle\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}'\lambda'}\rangle\times \\ \times\exp\left\{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-ic(k+k')t\right\}+ \\ +\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\lambda\lambda'}\sqrt{kk'}\,e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\rangle\times \\ \times\exp\left\{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}+ic(k+k')t\right\}.$$

Теперь нетрудно видеть, что

$$\left\langle\hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\right)^2\right\rangle\approx \\ \approx\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\lambda\lambda'}\frac{\hbar c}{V}\sqrt{kk'}\,e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}'\lambda'}\rangle\times \\ \times\exp\left\{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}+ic(k-k')t\right\}\geq \\ \geq\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\lambda\lambda'}\frac{\hbar c}{V}\sqrt{kk'}\,e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}e^{\nu}_{\mathbf{k}'\lambda'}\langle\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\rangle\langle\hat{\alpha}_{\mathbf{k}'\lambda'}\rangle\times \\ \times\exp\left\{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}+ic(k-k')t\right\}\approx\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}(\mathbf{r},t)\rangle^2.$$

Таким образом, напряженность $\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\rangle$ дает возможность оценить снизу искомую величину $\left\langle\hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^2\right\rangle$. Справедливость полученного неравенства не зависит от того конкретного состояния, по которому проводится квантовое усреднение и не связано с теорией возмущений. Если это неравенство применить к левой части безусловно точного представления

$$\left\langle\hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^2\right\rangle=\left\langle f_0\psi_0|\hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^2|f_0\psi_0\right\rangle+ \\ +\left\langle\Psi-f_0\psi_0|\hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^2|\Psi-f_0\psi_0\right\rangle \quad (2)$$

и заменить равенством

$$\left\langle \hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^{2}\right\rangle = \left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^{2},$$

то мы придем к полуклассической теории излучения. Если же это неравенство применить к каждому слагаемому правой части (2), то найдем, что

$$\left\langle \hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^{2}\right\rangle \geq \left\langle f_0\psi_0|\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}|f_0\psi_0\right\rangle^{2} + \left\langle \Psi - f_0\psi_0|\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}|\Psi - f_0\psi_0\right\rangle^{2} = \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu(c)}\right)^{2} + \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu(n)}\right)^{2}. \quad (3)$$

Использование этого неравенства представляет основу настоящей работы. Важно отметить, что между когерентным и некогерентным каналами рассеяния интерференционных эффектов не возникает, но внутри каждого канала в отдельности они существуют. Неравенство (3) можно переписать в виде

$$\left\langle \hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^{2}\right\rangle \geq \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu(c)}\right)^{2} + \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu} - \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu(c)}\right)^{2}, \quad (4)$$

что подчеркивает важную роль когерентного канала рассеяния в том случае, если рассеянный электромагнитный сигнал не является классической величиной и

$$\left\langle \hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^{2}\right\rangle \neq \left\langle \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right\rangle^{2}.$$

Неравенство (4) открывает следующий путь оценки $\left\langle \hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^{2}\right\rangle$. Выражение $\langle\Psi|\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}|\Psi\rangle = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu}$ можно рассчитать, воспользовавшись стандартной полуклассической теорией излучения, оперирующей с неквантованным электромагнитным полем. Расчет

$$\left\langle f_0\psi_0|\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}|f_0\psi_0\right\rangle = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu(c)}$$

требует использования лишь когерентного канала рассеяния, что даже в протяженных средах удается выполнить с помощью волновых функций [8]. Таким образом, удается избежать формализма матрицы плотности, который определяет собой некогерентный канал.

Относительно неравенства (3) следует сделать следующие замечания. Прежде всего, оперируя с амплитудами поля, мы, тем не менее, выходим за рамки полуклассической теории излучения. Необходимым условием применения последней в условиях взаимодействия излучения с веществом и выполнения равенства $\left\langle \hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^{2}\right\rangle = (\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu})^2$ согласно (3) оказывается отсутствие одного из каналов рассеяния. Так обстоит дело при рассеянии поля на основном состоянии атома — отсутствует $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu(n)}$. Так обстоит дело с лазерным излучением в однородной среде — отсутствует $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu(c)}$. Достаточных условий применимости полуклассической теории излучения не существует. Эта теория оперирует с классическим электромагнитным полем и квантовым описанием среды, что при наличии взаимодействия логически противоречиво. Отдельно стоит вопрос о расчете или оценке $\left\langle \hat{N}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\right)^{2}\right\rangle$, если исходное состояние света оказывается фоковским и $\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\rangle = 0$. Решение этого вопроса приводится во второй части работы.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ

Пусть электромагнитное поле рассеивается на атоме, расположенном в точке $\mathbf{R}$ и обладающим (для простоты) одним валентным электроном, координату которого обозначим через $\mathbf{r}$. Спиновыми эффектами пренебрегаем. Будем считать, что атом обладает двумя энергетическими уровнями, причем возможно наличие их зеемановских подуровней с различными магнитными квантовыми числами. Пусть частота рассеиваемого излучения ω_0 находится в квазирезонансе,

$$|\omega_{rad} - \omega_0| \ll \omega_{rad} + \omega_0,$$

с частотой резонансного перехода в атоме ω_{rad}. Уравнение Шредингера системы «атом плюс электромагнитное поле» примем в виде

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_a + \hat{H}_{ph} + \hat{H}'\right)\Psi,$$

где в представлении Шредингера

$$\hat{H}_a = \int \hat{\psi}^{+}(\mathbf{r})\left(\frac{\hat{p}_{\mathbf{r}}^2}{2m} + U(\mathbf{r}-\mathbf{R})\right)\hat{\psi}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r},$$

$$\hat{H}' = -\frac{e}{mc}\int \hat{\psi}^{+}(\mathbf{r})\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu}\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r},$$

причем

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_j \psi_j(\mathbf{r}-\mathbf{R})\hat{b}_j, \quad \hat{\psi}^{+}(\mathbf{r}) = \sum_j \psi_j^{*}(\mathbf{r}-\mathbf{R})\hat{b}_j^{+},$$

$$\hat{p}_{\mathbf{r}}^{\nu} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}^{\nu}.$$

Можно считать, что операторы рождения $\hat{b}_j^{+}$ и уничтожения $\hat{b}_j$ электрона в состоянии, определяемом волновой функцией ψ_j, подчиняются коммутационным соотношениям

$$\left[\hat{b}_j;\hat{b}_{j'}^{+}\right] = \delta_{jj'},$$

поскольку вид коммутационных соотношений этих операторов при наличии в системе лишь одного электрона не сказывается на результатах. Через $U(\mathbf{r}-\mathbf{R})$ обозначена потенциальная энергия электрона в атоме. По повторяющимся индексам ν здесь и ниже подразумевается суммирование. Далее,

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar ck \hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda},$$

$$\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}}\, e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}\left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right).$$

Для реализации схемы расчетов, изложенной во Введении, перейдем в представление взаимодействия. В этом представлении

$$\Psi(t) = \hat{S}(t,t_0)\Psi_0,$$

$$\hat{S}(t,t_0) = \hat{T}\exp\left(\frac{1}{i\hbar}\int\limits_{t_0}^{t}\hat{H}'(t')\,dt'\right), \tag{5}$$

$$\hat{H}'(t) = -\frac{e}{mc}\int \hat{\psi}^{+}(x)\hat{p}^{\nu}_{\mathbf{r}}\hat{A}^{\nu}(x)\hat{\psi}(x)\,d\mathbf{r}, \quad x = \{\mathbf{r}, t\},$$

$$\hat{\psi}(x) = \sum_j \psi_j(\mathbf{r}-\mathbf{R})\exp\left(-i\frac{\varepsilon_j}{\hbar}\,t\right)\hat{b}_j,$$

$$\hat{\psi}^{+}(x) = \sum_j \psi^{*}_j(\mathbf{r}-\mathbf{R})\exp\left(i\frac{\varepsilon_j}{\hbar}\,t\right)\hat{b}^{+}_j.$$

Здесь ε_j — энергия атома в состоянии ψ_j, $\hat{T}$ — хронологический оператор и

$$\hat{A}^{\nu}(x) = \hat{A}^{\nu(+)}(x) + \hat{A}^{\nu(-)}(x) =$$
$$= \sum_{\mathbf{k}\lambda}\sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}}\, e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - ikct) +$$
$$+ \sum_{\mathbf{k}\lambda}\sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}}\, e^{\nu}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{\alpha}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + ikct). \tag{6}$$

3. ПЕРВОНАЧАЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НАХОДИТСЯ В КВАНТОВОМ КОГЕРЕНТНОМ СОСТОЯНИИ

Пусть до рассеяния электромагнитное поле определялось модой $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$ и находилось в квантовом когерентном состоянии

$$\overset{0}{f_0} = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_n \frac{(\alpha\hat{a})^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle.$$

Амплитуда рассеиваемого излучения равна

$$\langle\alpha|\hat{A}^{\nu}(x)|\alpha\rangle = e^{\nu}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\left(a_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\exp(i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r} - ik_0ct) +\right.$$
$$\left.+ a^{+}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\exp(-i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r} + ik_0ct)\right), \quad a_{\mathbf{k}_0\lambda_0} = \sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}}\,\alpha.$$

Нас будет интересовать амплитуда рассеянного электромагнитного поля во втором порядке и вектор Пойнтинга в четвертом порядке теории возмущений. Вопрос о суммировании диаграмм обсудим ниже. В выражении (5) достаточно ограничиться суммой

$$\hat{S} = 1 + \hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(2)} + \hat{S}^{(3)},$$

где

$$\hat{S}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar}\int \hat{H}'(t')\,dt',$$

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{\hat{T}}{2(i\hbar)^2}\left(\int \hat{H}'(t')\,dt'\right)^2,$$

$$\hat{S}^{(3)} = \frac{\hat{T}}{3!(i\hbar)^3}\left(\int \hat{H}'(t')\,dt'\right)^3.$$

3.1. Когерентный канал рассеяния

В результате рассеяния фотона в когерентном канале рассеивающий атом остается в исходном состоянии. Поэтому амплитуда рассеяния оказывается равной

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu(c)}(x) = \left\langle\Psi_0|\hat{A}^{\nu}(x)\hat{S}^{(2)}|\Psi_0\right\rangle + \text{c.c.} \tag{7}$$

Переходя от хронологического к нормальному произведению атомных операторов, придадим оператору $\hat{S}^{(2)}$ следующий вид:

$$\hat{S}^{(2)} = \left(\frac{e}{mc}\right)^2\frac{\hat{T}_A}{i\hbar}\int \hat{\psi}^{+}(x_1)\hat{p}^{\nu_1}_{\mathbf{r}_1}\hat{A}^{\nu_1}(x_1)\times$$
$$\times G_r(x_1,x_2)\hat{p}^{\nu_2}_{\mathbf{r}_2}\hat{A}^{\nu_2}(x_2)\hat{\psi}(x_2)\,dx_1dx_2,$$

где $\hat{T}_A$ — хронологический оператор, действующий на операторы электромагнитного поля,

$$\left(\hat{T} - \hat{N}\right)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^{+}(x') = i\hbar G_r(x_1,x_2),$$

$$G_r(x_1,x_2) = \sum_j\int \psi_j(\mathbf{r}_1-\mathbf{R})\psi^{*}_j(\mathbf{r}_2-\mathbf{R})e^{-\frac{E}{\hbar}(t_1-t_2)}\times$$
$$\times G^j_r\left(\frac{E}{\hbar}\right)\frac{dE}{2\pi\hbar}, \quad G^j_r\left(\frac{E}{\hbar}\right) = \frac{1}{E-\varepsilon_j+i0}. \tag{8}$$

Если же атом подвергается воздействию случайных внешних полей, приводящих к уширению его энергетического уровня, то член $i0$ следует заменить конечной величиной $i\gamma_j/2$, не изменяя перед ней положительного знака, диктуемого принципом причинности. К аналогичному результату приводит суммирование лестничных диаграмм Фейнмана для возбужденных атомов вследствие взаимодействия их с электромагнитным вакуумом. По этой причине, не уточняя величину γ_j, вместо формулы (8) всюду ниже будем использовать выражение

$$G_r^j\left(\frac{E}{\hbar}\right) = \frac{1}{E - \varepsilon_j + i\dfrac{\gamma_j}{2}}.$$

Воспользуемся тем, что

$$\hat{T}_A \hat{A}^{\nu_1}(x_1)\hat{A}^{\nu_2}(x_2) = i\hbar D^{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2) + \\ + \hat{N}\hat{A}^{\nu_1}(x_1)\hat{A}^{\nu_2}(x_2), \quad (9)$$

где $D^{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2)$ — неоператорная функция. Первое слагаемое в (9) на процесс рассеяния электромагнитного поля влияния не оказывает. Окончательно

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{1}{i\hbar}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \int \hat{\psi}^+(x_1)\hat{p}^{\nu_1}_{\mathbf{r}_1} G_r(x_1, x_2)\hat{p}^{\nu_2}_{\mathbf{r}_2} \times \\ \times \left[\hat{A}^{\nu_2(-)}(x_2)\hat{A}^{\nu_1(+)}(x_1) + \hat{A}^{\nu_1(-)}(x_1)\hat{A}^{\nu_2(+)}(x_2)\right] \times \\ \times dx_1 dx_2. \quad (10)$$

Слагаемые правой части этого равенства отвечают соответственно за процессы рассеяния электромагнитного поля на невозбужденном и возбужденном атомах.

3.2. Рассеяние на невозбужденном атоме

Учитываем в правой части (10) первое слагаемое. Подставляя (6) и (8) в (10), находим, что при $t \to \infty$ и $t_0 \to -\infty$

$$\hat{S}^{(2)}|\alpha, j_0\rangle = \frac{\pi c}{iVk_0}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \sum_{j_2\mathbf{k}_1\lambda_1} p^{\nu_1}_{j_0j_2} p^{\nu_2}_{j_2j_0} \hat{b}^+_{j_0}\hat{b}_{j_0} \times \\ \times \frac{\delta(k_1c - k_0c)}{\varepsilon_{j_0} + \hbar k_0 c - \varepsilon_{j_2} + i\gamma_{j_2}/2} \times \\ \times \exp\{-i\mathbf{R}\cdot(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0)\}\, e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_1\lambda_1} e^{\nu_2}_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \hat{\alpha}^+_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\alpha|\alpha, f_0\rangle.$$

Через $|\alpha, f_0\rangle$ обозначена волновая функция начального состояния системы. В дипольном приближении

$$p^{\nu}_{j_0j_2} = \int \psi^*_{j_0}(\boldsymbol{\rho})\hat{p}^{\nu}_{\boldsymbol{\rho}}\psi_{j_2}(\boldsymbol{\rho})\, d\boldsymbol{\rho}.$$

Переход к пределу $t \to \infty$ не является обязательным, но сильно упрощает расчеты. Согласно (7) нас интересует конструкция

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu(c)}(x) = \langle\alpha, j_0|\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(2)}|\alpha, j_0\rangle + \text{c.c.}$$

Воспользуемся при гладкой функции $f(k)$ и $V \to \infty$, $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \to \infty$ цепочкой равенств

$$\sum_{\mathbf{k}_1\lambda_1} e^{\nu}_{\mathbf{k}_1\lambda_1} e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_1\lambda_1} \delta(k_1c - k_0c) \times \\ \times \exp\{i\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{R})\} f(k_1) = \\ = \frac{V}{(2\pi)^3}\int\left(\delta_{\nu\nu_1} + \frac{\partial}{\partial r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_1}}\right) \times \\ \times \exp\{i\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{R})\}\,\delta(k_1c - k_0c) f(k_1)\, d\mathbf{k}_1 = \\ = \frac{V}{2\pi^2} k_0 f(k_0)\frac{\sin(k_0|\mathbf{r}-\mathbf{R}|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}(\delta_{\nu\nu_1} - n^{\nu}n^{\nu_1}),$$

где

$$n^{\nu} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})^{\nu}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}.$$

В возникшем произведении надлежит удержать лишь слагаемое, описывающее расходящуюся волну. Опущенное при этом слагаемое обращается в нуль при сколь угодно малом интервале интегрирования по k_0 и $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \to \infty$, что подразумевается. Окончательно

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu(c)}(x) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{\delta_{\nu\nu_1} - n^{\nu}n^{\nu_1}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} a_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \times \\ \times \exp(i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R})\, e^{\nu_2}_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \times \\ \times \sum_{j_2} p^{\nu_1}_{j_0j_2} p^{\nu_2}_{j_2j_0} \frac{1}{\hbar c k_0 - \hbar\omega_{rad} + i\gamma_{j_2}/2} \times \\ \times \exp(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{R}| - ik_0ct) + \text{c.c.} \quad (11)$$

3.3. Рассеяние на возбужденном атоме

Преобразования второго слагаемого в правой части (10), аналогичные выполненным в разд. 3.2, приводят к соотношению

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu(c)}(x) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{\delta_{\nu\nu_2} - n^{\nu}n^{\nu_2}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} a_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \times \\ \times \exp(i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R})\, e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \times \\ \times \sum_{j_2} p^{\nu_1}_{j_0j_2} p^{\nu_2}_{j_2j_0} \frac{1}{\hbar\omega_{rad} - \hbar c k_0 + i\gamma_{j_2}/2} \times \\ \times \exp(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{R}| - ik_0ct) + \text{c.c.} \quad (12)$$

Если учесть уширение атомного уровня j_0, то в формуле (12) следует осуществить замену $\gamma_{j_2} \to \gamma = \gamma_{j_0} + \gamma_{j_2}$. Точность формул (11) и (12) ограничивается неравенством

$$\frac{\gamma_{rad}}{(\hbar\omega_{rad} - \hbar c k_0)^2 + \gamma^2/4} \ll 1,$$

где γ_{rad} — радиационная ширина возбужденного состояния атома.

3.4. Некогерентный канал рассеяния

Во втором порядке теории возмущений

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu(n)}(x) = \langle \alpha, j_0 | \hat{S}^{(1)+} \hat{A}^{\nu}(x) \hat{S}^{(1)} | \alpha, j_0 \rangle.$$

В развернутом виде, имея в виду процессы рассеяния, можно записать

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu(n)}(x) = \frac{1}{(i\hbar)^2}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \langle \alpha, j_0| \times \\ \times \int \hat{\psi}^+ \hat{p}^{\nu_1}_{\mathbf{r}_1} \hat{A}^{\nu_1(+)} \hat{\psi}\, dx_1 \hat{A}^{\nu(+)} \times \\ \times \int \hat{\psi}^+ \hat{p}^{\nu_2}_{\mathbf{r}_2} \hat{A}^{\nu_2(-)} \hat{\psi}\, dx_2 |\alpha, j_0\rangle + \text{c.c.}$$

После выполнения процедур, указанных в разд. 3.1, получим

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu(n)}(x) = \frac{1}{2\hbar}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{\delta_{\nu\nu_2} - n^{\nu} n^{\nu_2}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}\, a_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \times \\ \times \exp\left(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}\right) e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \times \\ \times \sum_{j_2} p^{\nu_1}_{j_0 j_2} p^{\nu_2}_{j_2 j_0} \delta\left(\frac{\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_2}}{\hbar} - k_0 c\right) \times \\ \times \exp\left(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{R}| - ik_0 ct\right) + \text{c.c.} \quad (13)$$

Если учитывать уширение энергетических уровней атомов, то в формуле (13) надлежит осуществить замену

$$\delta\left(\frac{\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_2}}{\hbar} - k_0 c\right) \to -\frac{\hbar}{2\pi i} \times \\ \times \left(\frac{1}{\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_2} - \hbar k_0 c + i\gamma/2} - \frac{1}{\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_2} - \hbar k_0 c - i\gamma/2}\right).$$

При селективном рассеянии электромагнитного поля на невырожденном основном состоянии атома некогерентный канал отсутствует. Найдем теперь полную амплитуду электромагнитного поля, рассеянного на возбужденном атоме:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu}(x) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu(c)}(x) + \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu(n)}(x) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \times \\ \times \frac{\delta_{\nu\nu_2} - n^{\nu} n^{\nu_2}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}\, a_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \exp\left(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}\right) e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \times \\ \times \sum_{j_2} p^{\nu_1}_{j_0 j_2} p^{\nu_2}_{j_2 j_0} \frac{1}{\hbar\omega_{rad} - \hbar c k_0 - i\gamma/2} \times \\ \times \exp\left(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{R}| - ik_0 ct\right) + \text{c.c.} \quad (14)$$

Из формулы (13) следует, что при наличии нескольких рассеивателей, расположенных в разных точках, в некогерентном канале возникают интерференционные явления, в общем случае определяемые их специфическим показателем преломления.

3.5. Полуклассическая теория рассеяния

В гейзенберговом представлении система уравнений для полевых операторов $\check{\psi}(x)$ и $\check{A}^{\nu}(x)$, эквивалентная системе уравнений разд. 2, выглядит следующим образом:

$$i\hbar \frac{\partial \check{\psi}(x)}{\partial t} = \left(\frac{\hat{p}^2_{\mathbf{r}}}{2m} + U(\mathbf{r} - \mathbf{R}) - \frac{e}{mc} \check{A}^{\nu}(x) \hat{p}^{\nu}_{\mathbf{r}}\right) \check{\psi}(x),$$

$$\Box \check{A}^{\nu}(x) = -\frac{1}{c}\, \check{j}^{\nu}(x),$$

$$\check{j}^{\nu}(x) = \frac{e}{2m}\left(\check{\psi}^+ \hat{p}^{\nu}_{\mathbf{r}} \check{\psi} + \hat{p}^{\nu *}_{\mathbf{r}} \check{\psi}^+ \check{\psi}\right).$$

Отсюда получаем

$$\check{A}^{\nu}(x) = \check{A}^{\nu 0}(x) - \frac{e}{mc} \times \\ \times \int \Delta^{\nu\nu_1}_r(x, x_1) \check{\psi}^+(x_1) \hat{p}^{\nu_1}_{\mathbf{r}_1} \check{\psi}(x_1)\, dx_1. \quad (15)$$

Здесь $\check{A}^{\nu 0}(x)$ определяется формулой (6) и

$$\Delta^{\nu\nu_1}_r(x, x_1) = \frac{1}{i\hbar}\left[\check{A}^{\nu 0}(x); \check{A}^{\nu_1 0}(x_1)\right] \vartheta(t - t_1) = \\ = -\frac{c}{4\pi} \frac{\delta_{\nu\nu_1} - n^{\nu} n^{\nu_1}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \times \\ \times \delta\left(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - c(t - t_1)\right), \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \to \infty. \quad (16)$$

Нас интересует второй порядок теории возмущений. Это означает, что оператор $\check{\psi}(x)$ достаточно вычислить в первом порядке:

$$\check{\psi}(x) = \check{\psi}^0(x) - \frac{e}{mc} \int G_r(x, x_1) \hat{p}^{\nu_1}_{\mathbf{r}_1} \check{A}^{\nu_1}(x_1)\, dx_1. \quad (17)$$

Подстановка выражений (16) и (17) в формулу (15) позволяет записать

$$\check{A}^{\nu}(x) = \check{A}^{\nu 0}(x) + \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \int \Delta^{\nu\nu_1}_r(x, x_1) \check{\check{\psi}}^+(x_1) \hat{p}^{\nu_1}_{\mathbf{r}_1} \times \\ \times G_r(x_1, x_2) \hat{p}^{\nu_2}_{\mathbf{r}_2} \hat{A}^{\nu_2}(x_2) \check{\check{\psi}}(x_2)\, dx_1 dx_2 + \text{H.c.} \quad (18)$$

Переходя в (18) к средним величинам, после разрыва квантовых корреляторов получаем результат, не отличающийся от результата полуклассической теории. Осуществляя в формуле (18) замену

$$\left\langle \check{A}^{\nu_2}(x_2) \right\rangle \to \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu_2 0}(x_2) = \\ = e^{\nu_2}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\left(a_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2 - ik_0 ct_2) + \right. \\ \left. + a^*_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \exp(-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2 + ik_0 ct_2)\right),$$

для рассеянного поля будем иметь

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\nu}(x) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{\delta_{\nu\nu_1} - n^{\nu} n^{\nu_1}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}\, a_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \times \\ \times \exp(\pm i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}) \sum_{j_2} p^{\nu_1}_{j_0 j_2} p^{\nu_2}_{j_2 j_0} \frac{1}{\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_2} \pm \hbar c k_0 + i0} \times \\ \times e^{\nu_2}_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \exp\left(\pm ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \mp ik_0 ct\right) + \text{c.c.} \quad (19)$$

Учет уширения атомных уровней проводим заменой в знаменателе $i0$ на $i\gamma/2 = i(\gamma_{j_0}+\gamma_{j_2})/2$.

Сравнение (19) с формулами (11) и (14) показывает, что в используемом приближении квантовая теория и полуклассическая теория излучения приводят для амплитуды рассеянного поля $\boldsymbol{\mathcal{A}}^\nu(x)$ к совпадающим результатам. Именно такое необходимое совпадение результатов требует равенство постоянных γ в формулах (19), (11) и (14).

3.6. Билинейные средние

В этом разделе нас будет интересовать конструкция
$$\langle\Psi|\hat N\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu(x)\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu(x)|\Psi\rangle.$$
Для ее расчета в четвертом порядке теории возмущений по заряду можно воспользоваться формулой (2). Но этого делать не следует. Прямой расчет показывает, что для двухуровневой системы в случае рассеяния резонансного поля $\omega_0 = ck_0 = \omega_{rad}$ конструкция
$$\langle\Psi_0|\hat S^{(1)+}\hat N\hat A^\nu(x)\hat A^\nu(x)\hat S^{(3)}|\Psi_0\rangle,$$
отвечающая в этом приближении вкладу некогерентного канала рассеяния оказывается отрицательной величиной. Это противоречит очевидной положительной определенности вклада некогерентного канала:
$$\langle\Psi - f_0\psi_0|\hat N(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu)^2|\Psi - f_0\psi_0\rangle > 0.$$
Это противоречие для другой модели было обнаружено в работе [8]. Для восстановления положительной определенности в четвертом порядке теории возмущений нужно усреднять произведение $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu(x)\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu(x)$ по волновой функции $(1+\hat S^{(1)}+\hat S^{(2)}+\hat S^{(3)})\Psi_0$. Но при этом возникнут слагаемые, пропорциональные шестой степени заряда. Это означает, что положительная определенность восстанавливается за счет высших порядков теории возмущений. Низшими порядками ограничиваться нельзя, а следовательно, ставится под сомнение при расчете $\langle\Psi|\hat N\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu(x)\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu(x)|\Psi\rangle$ сама теория возмущений. По этой причине вклад некогерентных процессов в формулу мы оценим иначе, а именно, воспользовавшись неравенством
$$\langle\Psi - f_0\psi_0|\hat N\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu|\Psi - f_0\psi_0\rangle^2 > \\ > \langle\Psi - f_0\psi_0|\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu|\Psi - f_0\psi_0\rangle^2 = \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\nu(n)}\right)^2. \quad (20)$$
Аналогичное неравенство используем для оценки вклада когерентного канала. Теперь из (12), (13) и (20) следует, что согласно квантовой теории при рассеянии на возбужденном атоме в двухуровневом приближении при наличии зеемановских подуровней для сечения рассеяния имеем
$$\sigma_{qu}(\omega_0) = \frac{\langle\hat N\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu\rangle_{qu}}{2|\alpha_{\mathbf{k}_0\lambda_0}|^2} \geq \\ \geq \left|\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{mc}\right)^2(\delta_{\nu\nu_2}-n^\nu n^{\nu_2})e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\sum_{j_2}p^{\nu_1}_{j_0j_2}p^{\nu_2}_{j_2j_0}\right|^2 \times \\ \times\frac{1}{(\hbar\omega_{rad}-\hbar ck_0)^2+\gamma^2/4}\times \\ \times\left(1+\frac{\gamma^2}{(\hbar\omega_{rad}-\hbar ck_0)^2+\gamma^2/4}\right). \quad (21)$$
При этом согласно полуклассической теории излучения
$$\sigma_{scl}(\omega_0) = \frac{\langle\hat N\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu\rangle_{scl}}{2|\alpha_{\mathbf{k}_0\lambda_0}|^2} \geq \\ \geq \left|\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{mc}\right)^2(\delta_{\nu\nu_2}-n^\nu n^{\nu_2})e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\sum_{j_2}p^{\nu_1}_{j_0j_2}p^{\nu_2}_{j_2j_0}\right|^2 \times \\ \times\frac{1}{(\hbar\omega_{rad}-\hbar ck_0)^2+\gamma^2/4}. \quad (22)$$
Для резонансной частоты рассеяния $\omega_0 = \omega_{rad}$ отношение результатов, полученных на основе этих двух методов расчета, оказывается равным
$$\frac{\sigma_{qu}(\omega_{rad})}{\sigma_{scl}(\omega_{rad})} = 5.$$
Это значение не зависит от величины γ. Отметим, что при рассеянии на невозбужденных атомах это отношение равно единице.

В итоге, оказалось, что полуклассическая теория излучения существенно занижает сечение резонансного рассеяния. Квантовая теория, в свою очередь, указывает на нарушение равенства
$$\langle\hat N\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu\rangle = \langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu\rangle\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^\nu\rangle$$
в рассеянном излучении, даже если такое равенство выполнялось в рассеиваемом электромагнитном поле. Таким образом, квантовая теория указывает на изменение внутренней квантовой статистической структуры электромагнитного поля, что полуклассическая теория излучения сделать не в состоянии.

4. ПЕРВОНАЧАЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НАХОДИТСЯ В ФОКОВСКОМ СОСТОЯНИИ

Если первоначальное состояние света фоковское, то равенство (2) и проблемы, связанные с некогерентным каналом рассеяния, остаются в силе. Но эти проблемы не могут быть разрешены указанным выше способом, опирающимся на существование $\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu}\rangle$. Тем не менее, описанный выше прием подсказывает выход и указывает путь перестройки ряда теории возмущений. Интересуясь вектором Пойнтинга, вместо $\langle\hat{N}(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^{\nu})^2\rangle$ в этом разделе будем изучать конструкцию, также определяющую собой вектор Пойнтинга:

$$\langle\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)\rangle = \\ = \langle f_0\psi_0|\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)|f_0\psi_0\rangle + \\ + \sum_{i\neq 0}\langle f_i(t)\psi_i|\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)|f_i(t)\psi_i\rangle. \quad (23)$$

Как и ранее, будем интересоваться лишь селективным рассеянием, не изменяющим частоту рассеянного света. Как и ранее, обращает на себя внимание присутствие в выражении (23) слагаемого, отвечающего некогерентному каналу рассеяния.

4.1. Когерентный канал рассеяния. Рассеяние на возбужденном атоме

При когерентном рассеянии квантовое состояние рассеивателя, описываемое функцией ψ_0, не изменяется. Поэтому, ограничиваясь четвертым порядком теории возмущений, из (23) находим, что

$$\langle\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)\rangle_{coh} = \\ = \langle N^0, j_0|\hat{S}^{(2)+}\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(2)}|N^0, j_0\rangle.$$

Как и прежде, индекс j_0 характеризует начальное состояние атома. Предполагается, что в рассеиваемой моде $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$ находится N_0 фотонов. Воспользовавшись теоремой Вика [9] и опуская «вакуумное» слагаемое, эту формулу можно переписать как

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{1}{i\hbar}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \int \hat{\psi}^{+}(x_1)\hat{p}^{\nu_1}_{\mathbf{r}_1} G_r(x_1, x_2)\hat{p}^{\nu_2}_{\mathbf{r}_2}\hat{\psi}(x_2) \times \\ \times \left[\hat{A}^{\nu_1(-)}(x_1)\hat{A}^{\nu_2(+)}(x_2) + \hat{A}^{\nu_2(-)}(x_2)\hat{A}^{\nu_1(+)}(x_1)\right] \times \\ \times dx_1 dx_2. \quad (24)$$

В формуле (24) первое слагаемое правой части описывает процесс рассеяния на невозбужденном атоме, второе — на возбужденном атоме.

Подстановка во второе слагаемое (24) явных выражений для G_r и полевых операторов $\hat{A}^{\nu(-)}$ и $\hat{A}^{\nu(+)}$ дает

$$\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(2)}|N^0, j_0\rangle = -\frac{\sqrt{N^0}}{4\pi}\sqrt{\frac{\hbar c}{2k_0 V}}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \times \\ \times \exp(i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R})\frac{\delta_{\nu\nu_2} - n^{\nu}n^{\nu_2}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0} \times \\ \times \sum_{j_2} p^{\nu_1}_{j_0 j_2} p^{\nu_2}_{j_2 j_0}\frac{1}{\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_2} + \hbar c k_0 + i0} \times \\ \times \exp\left(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{R}| - ik_0 ct\right)|N^0 - 1, j_0\rangle.$$

Расчет по этой формуле носит стандартный характер. Следует лишь отметить, что, интересуясь процессами рассеяния, мы опускаем сходящуюся к центру атома волну, т. е. осуществляем замену

$$\exp(-ik_0 ct)\sin\left(k|\mathbf{r}-\mathbf{R}|\right) \to \\ \to \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{R}| - ikct)}{2i}. \quad (25)$$

Теперь ясно, что

$$\langle N^0, j_0|\hat{S}^{(2)+}\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)|\hat{S}^{(2)}|N^0, j_0\rangle = \\ = N^0\frac{\hbar c}{2k_0 V}\left|\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{mc}\right)^2\frac{\delta_{\nu\nu_2} - n^{\nu}n^{\nu_2}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} \times \right. \\ \left. \times e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\sum_{j_2} p^{\nu_1}_{j_0 j_2} p^{\nu_2}_{j_2 j_0}\frac{1}{\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_2} - \hbar c k_0 + i0}\right|^2. \quad (26)$$

Учитывая, что модуль вектора Пойнтинга рассеиваемого поля равен

$$s_0 = k_0\hbar\frac{N^0}{V},$$

для сечения когерентного рассеяния $\sigma_{coh}(\omega_0)$ мы вновь получаем формулу (22):

$$\sigma_{coh}(\omega_0) = \left|\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{mc}\right)^2(\delta_{\nu\nu_1} - n^{\nu}n^{\nu_1}) \times \right. \\ \left. \times e^{\nu_2}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\sum_{j_2} p^{\nu_2}_{j_0 j_2} p^{\nu_1}_{j_2 j_0}\frac{1}{\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_{j_2} - \hbar c k_0 + i0}\right|^2. \quad (27)$$

При наличии нескольких рассеивателей в формуле (27), как и в формуле (22), появляются интерференционные члены. Мы констатируем, что $\sigma_{scl} = \sigma_{coh}$. Однако в квантовой теории согласно (23) существует еще положительно определенное слагаемое, отвечающее некогерентному каналу рассеяния.

4.2. Некогерентный канал рассеяния

В четвертом порядке теории возмущений рассеянному излучению согласно (23) отвечают две конструкции

$$\langle \hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)\rangle_n = \\ = \langle N^0, j_0|\hat{S}^{(2)+}\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(2)}|N^0, j_0\rangle_n^{(1)} + \\ + \Big[\langle N^0, j_0|\hat{S}^{(1)+}\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x) \times \\ \times \hat{S}^{(3)}|N^0, j_0\rangle_n^{(2)} + \text{c.c.}\Big], \quad (28)$$

обладающие разными свойствами. Первая из них в (28) при двухуровневом описании атома реализуется лишь в случае, если его исходное состояние вырождено по магнитному квантовому числу. Результат ее расчета имеет вид

$$\langle N^0, j_0|\hat{S}^{(2)+}\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(2)}|N^0, j_0\rangle_n^{(1)} = \\ = N^0\frac{\hbar c}{2kV}\sum_{j_2,j_0'\neq j_0}\left|\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{mc}\right)^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta_{\nu\nu_2} - n^\nu n^{\nu_2}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} p^{\nu_1}_{j_0j_2}p^{\nu_2}_{j_2j_0'}\frac{1}{\varepsilon_{j_0'} - \varepsilon_{j_2} - \hbar ck_0 + i0}e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\right|^2$$

и внешне аналогичен результату для когерентного канала (26) с той лишь разницей, что при наличии многих рассеивателей интерференционной картины в рассеянном поле не возникает. Итак,

$$\sigma_n^{(1)} = \sum_{j_2,j_0'\neq j_0}\left|\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{mc}\right)^2(\delta_{\nu\nu_2} - n^\nu n^{\nu_2}) \times \right. \\ \left. \times p^{\nu_1}_{j_0j_2}p^{\nu_2}_{j_2j_0'}\frac{1}{\varepsilon_{j_0'} - \varepsilon_{j_2} - \hbar ck_0 + i0}e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\right|^2. \quad (29)$$

Для расчета второй конструкции в (28) сначала находим

$$\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(1)}|N^0, j_0\rangle = -\frac{\pi}{i\hbar}\frac{e}{mc} \times \\ \times \sum_{\mathbf{k}_1\lambda_1j_4}\frac{\hbar c}{k_1V}p^{\nu_4}_{j_4j_0}e^{\nu}_{\mathbf{k}_1\lambda_1}e^{\nu_4}_{\mathbf{k}_1\lambda_1} \times \\ \times \exp\{i\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{R}) - ick_1t\}\,\delta(k_1c - \omega_{rad})|N^0, j_4\rangle.$$

Суммирование по $\mathbf{k}_1$ и λ_1 при $V\to\infty$ и $|\mathbf{r}-\mathbf{R}|\to\infty$ осуществляется следующим образом:

$$\sum_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\frac{1}{k_1}e^{\nu}_{\mathbf{k}_1\lambda_1}e^{\nu_4}_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\exp\{i\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{R}) - ick_1t\} \times \\ \times \delta(k_1c - \omega_{rad}) = \frac{V}{(2\pi)^3}\int k_1\left(\delta_{\nu\nu_4} + \frac{\partial}{\partial r^\nu}\frac{\partial}{\partial r^{\nu_4}}\right) \times \\ \times \exp\{i\mathbf{k}_1\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{R}) - ikct\}\,\delta(k_1c - \omega_{rad})\,dk_1d\Omega = \\ = \frac{V}{2\pi^2c}(\delta_{\nu\nu_4} - n^\nu n^{\nu_4})\frac{\sin\left(\dfrac{\omega_{rad}}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{R}|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|},$$

$$n^\nu = \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{R})^\nu}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}.$$

Теперь получим

$$\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(1)}|N^0, j_0\rangle = \frac{i}{2\pi}\frac{e}{mc}\sum_{j_4}p^{\nu_4}_{j_4j_0} \times \\ \times \exp(-i\omega_{rad}t)|N^0, j_4\rangle(\delta_{\nu\nu_4} - n^\nu n^{\nu_4}) \times \\ \times \frac{\sin\left(\dfrac{\omega_{rad}}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{R}|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}. \quad (30)$$

Приводим результат аналогичного расчета конструкции, содержащей оператор $\hat{S}^{(3)}$:

$$\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(3)}|N^0, j_0\rangle = \frac{i\hbar c^2}{8\pi V\omega_{rad}}N^0\left(\frac{e}{mc}\right)^3 \times \\ \times \sum_{j_1j_2j_3}p^{\nu_1}_{j_1j_2}p^{\nu_2}_{j_2j_3}p^{\nu_3}_{j_3j_0}e^{\nu_2}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}G_r^{j_2}\left(\frac{\varepsilon_{j_1}}{\hbar} + k_0c\right) \times \\ \times G_r^{j_3}\left(\frac{\varepsilon_{j_1}}{\hbar}\right)\exp(-i\omega_{rad}t)|N^0, j_1\rangle(\delta_{\nu\nu_3} - n^\nu n^{\nu_3}) \times \\ \times \frac{\sin\left(\dfrac{\omega_{rad}}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{R}|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}. \quad (31)$$

Эта формула оказывается сильно сингулярной, поскольку содержит сомножитель

$$G_r^{j_3}\left(\frac{\varepsilon_{j_1}}{\hbar}\right) = \frac{1}{\varepsilon_{j_1} - \varepsilon_{j_3} + i0}.$$

Но в двухуровневом приближении $\varepsilon_{j_1} = \varepsilon_{j_3}$. Даже замена $i0$ на конечную величину $i\gamma/2$, как мы увидим, не спасает положения. В условиях резонансного рассеяния $\omega_0 = k_0c = \omega_{rad}$ также оказывается, что $G_r^{j_2}(\varepsilon_{j_1}/\hbar) = (i\gamma/2)^{-1}$. Помимо сильной сингулярности здесь $G_r^{j_2}G_r^{j_3} < 0$, что вместе с (30) и (31) означает отрицательность выражения

$$\langle N^0, j_0|\hat{S}^{(1)+}\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x) \times \\ \times \hat{S}^{(3)}|N^0, j_0\rangle_n^{(2)} + \text{c.c.} < 0. \quad (32)$$

Такой результат противоречит очевидной положительности второго слагаемого правой части (23). Требуемая положительность будет восстановлена, если мы, как и в разд. 3.6, вместо (32) воспользуемся более точным выражением

$$\langle N^0, j_0|(\hat{S}^{(1)+} + \hat{S}^{(3)+})\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x) \times \\ \times (\hat{S}^{(1)} + \hat{S}^{(3)})|N^0, j_0\rangle_n^{(2)} > 0. \quad (33)$$

Но выражение (33) по сравнению с (32) содержит более высокие степени константы взаимодействия. Именно они обеспечивают положительную определенность (33). Это означает, что слагаемые, пропорциональные e^6, по модулю превосходят слагаемые, пропорциональные более низшей степени заряда e^4. Таким образом, исчезает возможность применения теории возмущения в целом. Уменьшение величины константы взаимодействия до сколь угодно малой величины не спасает положение.

Физические процессы, приводящие к такого рода особенностям пропорциональны N^0 и состоят из комбинаций упругого резонансного рассеяния фотонов и процессов вынужденного излучения атомов, сопровождающих процессы рассеяния. Такого рода комбинированные процессы не могут быть представлены как совокупность более элементарных процессов. Накапливаясь, они не позволяют вести расчеты по стандартному пути суммирования диаграмм. Указанные процессы обладают и другой особенностью. При наличии нескольких, например двух, возбужденных рассеивателей, расположенных в точках $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, возникают оптические интерференционные явления, описываемые произведением

$$\sin(k_1|\mathbf{r} - \mathbf{R}_1|)\sin(k_2|\mathbf{r} - \mathbf{R}_2|),$$

где $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ — волновые векторы рассеянных фотонов. При распространении излучения в возбужденных средах, как отмечено в разд. 3.4, подобного рода члены оказывают влияние на формирование показателя преломления в некогерентном канале рассеяния. Влияние некогерентного канала рассеяния на формирование показателя преломления полуклассическая теория излучения учесть не может. В свою очередь, отсюда следует, что стандартный показатель преломления недостаточен для описания оптических интерференционных явлений в возбужденных средах. Это обстоятельство позволяет выделить эти процессы в особую группу, скажем, некогерентные процессы второго рода. Для получения положительно определенного результата в некогерентном канале ряд теории возмущений надо перестроить.

4.3. Перестройка ряда теории возмущений

Обозначим собственные функции исходного гамильтониана $\hat{H}_a + \hat{H}_{ph} + \hat{H}'$ через Φ_j. Поскольку система функций Φ_j полна,

$$\sum_{i\neq 0}\langle f_i(t)\psi_i|\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)|f_i(t)\psi_i\rangle = \\ = \sum_{j,i\neq 0}\left|\langle\Phi_j|\hat{A}^{\nu(+)}(x)|f_i\psi_i\rangle\right|^2.$$

Любая аппроксимация полученного выражения оказывается теперь положительно определенной. При рассеянии резонансного света в некогерентном канале функция $f_i\psi_i$ должна быть пропорциональна $\hat{\alpha}^+_{\mathbf{k}\lambda}|N^0, f_1\rangle$, где f_1 отвечает невозбужденному состоянию атома. Такая волновая функция описывает рассеянный фотон в моде $(\mathbf{k}, \lambda)$ и N^0 фотонов в моде $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$ с учетом процесса вынужденного излучения. Поскольку состояние $f_i\psi_i$ возникает в результате рассеяния фотона из исходного состояния $|N^0, j_0\rangle$, то $f_i\psi_i = \hat{S}|N^0, f_0\rangle$. С другой стороны $\Phi_j = \hat{S}\Phi_j^0$, где Φ_j^0 — одна из собственных функций гамильтониана электромагнитного поля и рассеивающего атома в отсутствие их взаимодействия. Итак, вклад некогерентного канала в (23) может быть выражен следующим образом:

$$\sum_{i\neq 0}\langle f_i(t)\psi_i|\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)|f_i(t)\psi_i\rangle = \\ = \sum_j\left|\langle\Phi_j^0|\hat{S}^+\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}|N^0, j_0\rangle\right|^2. \quad (34)$$

Будем интересоваться результатом в приближении e^4. Если правый оператор $\hat{S}$ в формуле (34) заменить на $\hat{S}^{(2)}$, а левый положить равным единице, то вернемся к выражению (29). Другой оставшейся возможностью оказывается замена в (34) обоих операторов $\hat{S}$ на $\hat{S}^{(1)}$. Помимо этого следует учесть, что интересующий нас результат должен быть пропорционален N^0. Удовлетворяющая этому требованию возможность оказывается единственной и потому

$$\sum_{i\neq 0}\langle f_i(t)\psi_i|\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)|f_i(t)\psi_i\rangle = \\ = \langle N^0, j_0|\hat{S}^{(2)+}\hat{A}^{\nu(-)}(x)\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(2)}|N^0, j_0\rangle_n^{(1)} + \\ + \sum_{j_0'}\left|\langle N^0 - 1, j_0'|\hat{S}^{(1)+}\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(1)}|N^0, j_0\rangle\right|^2. \quad (35)$$

Суммирование по j_0' означает суммирование по подуровням возбужденного состояния атома, отличающимся магнитными квантовыми числами. Входящая в формулу (35) конструкция (30) была просчитана выше. Теперь с использованием (25) находим, что

$$\langle N^0-1, j_0'|\hat{S}^{(1)+}\hat{A}^{\nu(+)}(x)\hat{S}^{(1)}|N^0, j_0\rangle = \\ = -\frac{\sqrt{N^0}}{2i\hbar}\sqrt{\frac{\hbar c}{2k_0V}}\left(\frac{e}{mc}\right)^2\exp(i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R})\times \\ \times\sum_{j_2}\frac{\delta_{\nu\nu_2}-n^\nu n^{\nu_2}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}p^{\nu_1}_{j_0'j_2}p^{\nu_2}_{j_2j_0}\delta(\omega_{rad}-k_0c)e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\times \\ \times\exp(ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{R}|-ik_0ct). \quad (36)$$

Определяемое этим выражением сечение рассеяния в некогерентном канале, отвечающее неупругим процессам второго рода, оказывается равным

$$\sigma_n^{(2)} = \sum_{j_0'}\left|\frac{1}{2}\left(\frac{e}{mc}\right)^2\delta(\omega_{rad}-k_0c)e^{\nu_1}_{\mathbf{k}_0\lambda_0}\times \right. \\ \left. \times\sum_{j_2}\frac{p^{\nu_1}_{j_0'j_2}p^{\nu_2}_{j_2j_0}}{\hbar}\left(\delta_{\nu\nu_2}-n^\nu n^{\nu_2}\right)\right|^2. \quad (37)$$

Полное сечение рассеяния σ_{tot} согласно квантовой теории и формулам (23) и (28) выражается суммой

$$\sigma_{tot} = \sigma_{coh}+\sigma_n^{(1)}+\sigma_n^{(2)}, \quad (38)$$

слагаемые которой находятся из (27), (29) и (37). Если исходное состояние атомов не вырождено и суммирование по индексу j_0' отсутствует, то формула (38) допускает иную запись. Предварительно мы учтем возможное стохастическое воздействие на возбужденный рассеивающий атом внешних полей, что приведет в (37) к замене

$$\delta(\omega_{rad}-k_0c)\to-\frac{1}{2\pi i}\times \\ \times\left(\frac{1}{\omega_{rad}-k_0c+i\dfrac{\gamma}{2\hbar}}-\frac{1}{\omega_{rad}-k_0c-i\dfrac{\gamma}{2\hbar}}\right).$$

Из формулы (38) следует, что

$$\sigma_{tot} = \sigma_{scl}\left[1+\frac{\gamma^2/\hbar^2}{(\omega_{rad}-k_0c)^2+\gamma^2/4\hbar^2}\right], \quad (39)$$

это полностью согласуется с формулами (21) и (22). Отсюда, впрочем, следует вывод о том, что основанные на неравенстве (3) расчеты исчерпывают все члены, пропорциональные e^4. Неравенство (3) возникает лишь за счет аппроксимаций в членах более высокого порядка. Возвращаясь к формуле (38), заметим, что дополнительное превосходство σ_{tot} над σ_{scl} возникает за счет суммирования по j_0' в случае наличия вырождения по магнитному квантовому числу исходного состояния атома. В прозрачных средах, т. е. при $|k_0c-\omega_{rad}|\gg\gamma/\hbar$ согласно (39) результатам полуклассической теории излучения можно вполне доверять. В случае обратного неравенства это совсем не так. Ситуация усугубляется тем, что при наличии нескольких рассеивателей в сечении $\sigma_n^{(2)}$ просматриваются интерференционные явления. Так, если рассеяние происходит на двух атомах, то аналог (36) будет состоять из двух слагаемых, пропорциональных соответственно

$$\exp(i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R}_1+ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{R}_1|-ik_0ct)$$

и

$$\exp(i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R}_2+ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{R}_2|-ik_0ct).$$

Возникновение при этом в сечении некогерентного канала рассеяния интерференционной картины с других позиций было отмечено в разд. 3.4, 4.2. Подобного рода интерференционные картины не могут быть описаны в рамках стандартного показателя преломления, следующего из полуклассической теории излучения. Мы вновь приходим к выводу о том, что эволюция резонансного излучения даже в термически возбужденных средах и линейном по полю режиме не может изучаться в рамках стандартного показателя преломления. Именно интерференционные свойства изучаемого процесса позволяют экспериментально отличить его от процесса спонтанного излучения, подобными свойствами не обладающего и не осуществляющего вклад во френелевское отражение резонансного излучения от границы раздела возбужденных сред.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резонансное рассеяние электромагнитного поля возбужденным атомом требует привлечения методов квантовой электродинамики. Полуклассическая теория излучения дает заниженные результаты. Квантовые свойства электромагнитного поля проявляются здесь на макроскопическом уровне. Процесс рассеяния состоит из двух компонент: когерентной и некогерентной. В результате когерентного рассеяния рассеивающий атом возвращается в исходное квантовое состояние. При рассеянии электромагнитного поля многими рассеивателями этот процесс формирует интерференционную картину. В некогерентном канале рассеяния, изменяющем внутреннее состояние атома, наряду с рассеянием рамановского типа существует связка процессов, специфическая для рассеяния на возбужденных системах. Такая связка состоит из когерентного рассеяния и вынужденного излучения, сопровождающего рассеяние.

Это комбинированное рассеяние обладает сильной особенностью и не может быть разложено на составляющие компоненты. Стандартная теория возмущений или ее модификация здесь неприменимы. Указан обходной путь исследования подобного рода процессов. Отличительным свойством таких, по сути дела, некогерентных процессов оказываются их когерентные свойства, проявляющиеся в протяженных средах. Возникающие при этом интерференционные картины не могут быть описаны в рамках стандартного показателя преломления, поскольку они не охватываются полуклассической теорией излучения. По этой причине эволюция резонансного излучения даже в термически возбужденных средах, т. е. в отсутствие инверсной населенности, требует для своего описания наряду со стандартным показателем преломления дополнительной зависящей от частоты характеристики, названной в работе [10] когерентным (причинным) показателем преломления. Этот показатель преломления обладает иными аналитическими свойствами.

В работе сформулированы необходимые условия применимости полуклассической теории излучения для описания взаимодействия излучения с веществом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. J. Koester, IEEE J. Quant. Electron. **QE-2**, 580 (1966).

2. R. F. Cybulski and C. K. Carmiglia, J. Opt. Soc. Amer. **67**, 1620 (1977).

3. Т. С. Биба, Н. С. Петров, И. З. Джилавдари, Ж. прикл. спектр. **32**, 266 (1980).

4. Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, *Отражение света от усиливающих и нелинейных сред*, Наука и техника, Минск (1981).

5. Johannes Skaar, Phys. Rev. E **73**, 026605 (2006).

6. Б. А. Векленко, Изв. вузов, Физика, вып. 9, 71 (1983).

7. Б. А. Векленко, Р. Б. Гусаров, Ю. Б. Шеркунов, ЖЭТФ **113**, 521 (1998).

8. Б. А. Векленко, Изв. вузов, Физика, вып. 6, 132 (1987).

9. G. Wick, Phys. Rev. **75**, 486 (1949).

10. Б. А. Векленко, Ю. Б. Шеркунов, Изв. вузов, Физика, вып. 6, 17 (2000).