ЖЭТФ, 2011, том 140, вып. 6 (12), стр. 1088–1095

СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ВБЛИЗИ МАССИВНОЙ КРОТОВОЙ НОРЫ

И. Д. Новиков [a,b], ***А. А. Шацкий*** [a*]

[a] *Астрокосмический центр, Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 117997, Москва, Россия*

[b] *The Nielse Bohr International Academy, The Nielse Bohr Institute DK-2100, Copenhagen, Denmark*

Поступила в редакцию 25 апреля 2011 г.

Доказана возможность существования электромагнитных «волос» не только у безмассовых, но и у массивных, проходимых кротовых нор, а также рассмотрен плавный предельный переход от проходимых кротовых нор к черным дырам Рейснера – Нордстрема с соответствующим исчезновением «волос». Построен общий метод нахождения решения стационарных, осесимметричных уравнений Максвелла в поле массивных, сферически-симметричных кротовых нор. Как частный пример применения этого метода, найдено решение осесимметричной магнитостатики кольцевого тока в поле кротовой норы Бронникова – Эллиса – Мориса – Торна.

1. ВВЕДЕНИЕ

Особенности электродинамики кротовых нор впервые были отмечены Уилером в работах [1, 2]. Впоследствии эти вопросы рассматривались в целом ряде работ. В статье [3] были исследованы многие особенности свойств электрических и магнитных полей в статических и квазистатических кротовых норах. Там же есть ссылки на более ранние работы. В последние годы работа по изучению электромагнитных полей в окрестности кротовых нор вновь активизировалась. Такие задачи, помимо общего принципиального интереса, важны еще и потому, что в работах [4–6] рассмотрена возможность существования макроскопических кротовых нор в реальной Вселенной. Для наблюдательного проявления кротовых нор в астрофизике окружающие их магнитные поля могут иметь принципиальное значение.

Кроме того, для полного понимания физических процессов вблизи релятивистских гравитирующих объектов важен сам факт нахождения новых точных решений (в частности — решений для электромагнитных полей в общей теории относительности, ОТО).

Первая широко известная пионерская работа 1976 г. принадлежит Линету [7], в ней найдено точное решение в замкнутом виде для поля точечного заряда вблизи шварцшильдовской черной дыры. Этот же автор, но уже в 2008 г. нашел точное решение в замкнутом виде для поля точечного заряда вблизи безмассовой кротовой норы [8]. Третья работа 2007 г. принадлежит Алексееву и Белинскому [9], в ней найдено точное решение для поля равновесной конфигурации двух заряженных черных дыр Рейснера – Нордстрема; см. также обзоры [10, 11] по черным дырам. В работах [8, 12–14] были изучены свойства электрических полей вблизи кротовых нор, создаваемых точечными квазистатическими зарядами, а также найдены конфигурации полей типа «заряд без заряда» и «диполь без диполя» [14]. При этом до сих пор в качестве исходных моделей кротовых нор выбирались простейшие модели, а именно, сферически-симметричные, безмассовые кротовые норы, метрика которых в общем виде может быть представлена в виде [15]

$$ds^2 = d\tau^2 - dR^2 - r^2(R)\left[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right], \qquad (1)$$

где $r^2(R)$ может являться произвольной функцией, удовлетворяющей условиям монотонного убывания в другой вселенной (при $R<0$) и монотонного роста в нашей Вселенной (при $R>0$). При этом мини-

*E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru

мальное значение $r(0) \equiv r_0 > 0$ является (по определению) горловиной кротовой норы.

Компонента $g_{\tau\tau}$ метрики (1) равна единице, поэтому такая кротовая нора не притягивает (и не отталкивает) покоящиеся массивные тела (неподвижные тела в поле такой кротовой норы остаются неподвижными). Такие кротовые норы принято называть безмассовыми, например, кротовая нора Бронникова – Эллиса – Мориса – Торна (БЭМТ) имеет зависимость $r^2(R) = r_0^2 + R^2$ (см., например, [16, 17]).

Модели безмассовых кротовых нор были выбраны в работах [8, 12, 13] для исследования электромагнитных полей в связи с относительно простым применением математического аппарата ОТО в метрике (1).

В общем случае метрика статичной, сферически-симметричной и массивной кротовой норы может быть записана в виде [15]

$$ds^2 = g_{\tau\tau}(R)d\tau^2 - dR^2 - r^2(R)\left[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right]. \quad (2)$$

В этом случае кротовая нора может обладать массой M, которая в вакууме (на бесконечном расстоянии от горловины), согласно теореме Биркгофа, определяется как $g_{\tau\tau}(r \to \infty) \approx 1 - 2M/r$.

У массивной проходимой кротовой норы на функцию $g_{\tau\tau}(R)$ накладывается очень важное ограничение: на всей области определения $R \in (-\infty, +\infty)$ должно быть выполнено условие отсутствия горизонта черной дыры: $g_{\tau\tau}(R) > 0$.

Метрику (2) можно переписать в координатах кривизн:

$$ds^2 = g^{\pm}_{\tau\tau}(r)d\tau^2 - B^{-1}_{\pm}(r)dr^2 - r^2_{\pm} \times \times \left[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right], \quad (3)$$

где

$$B_{\pm}(r) = \left(\frac{dr}{dR}\right)^2.$$

Здесь и далее индексы «$\pm$» обозначают области нашей «+» и другой «−» вселенных.

В работе [14] было показано, что у безмассовых кротовых нор, в отличие от черных дыр, могут присутствовать электромагнитные мультиполи любого порядка. Этот эффект объясняется отсутствием горизонта, который уничтожает все мультиполи кроме монополя. Кроме того, отсутствие горизонта приводит к возможности существования тангенциальных компонент электромагнитного поля на горловине кротовой норы. Теорема «об отсутствии электромагнитных волос у черной дыры» запрещает подобные свойства для черных дыр.

В данной работе изучены электромагнитные поля для массивных, проходимых кротовых нор. Кроме того, показано, каким образом происходит изменение электромагнитных свойств кротовых нор при плавном переходе от массивной проходимой кротовой норы к черной дыре (для безмассовых кротовых нор такой плавный переход невозможен в принципе). В качестве примера применения метода в разд. 5 найдено решение для осесимметричной магнитостатики кольцевого тока в поле кротовой норы БЭМТ.

В данной работе мы рассматриваем статические кротовые норы и не обсуждаем вопросы о физической природе материи, обеспечивающей их статичность.

2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Рассмотрим поле одиночного точечного заряда e при $\theta = 0$ и $r = r_e \geq r_0$ в нашем пространстве (другие конфигурации зарядов могут быть исследованы с помощью принципа суперпозиции, справедливого для слабых электромагнитных полей).

Запишем уравнения Максвелла в искривленном пространстве-времени ОТО[1]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}g^{jn}g^{km}F_{nm}\right)_{,k} = -4\pi j^j. \quad (4)$$

Здесь g — детерминант метрического тензора, $F_{nm} = \partial_n A_m - \partial_m A_n$ — тензор электромагнитного поля, j^j — 4-вектор тока.

В случае метрики (3)

$$g = -\frac{g_{\tau\tau}}{B}r^4\sin^2\theta,$$
$$j^j = \frac{e\delta^j_\tau\delta(r-r_e)\delta(\theta)}{2\pi\sqrt{-g}} = \frac{e\delta^j_\tau\delta(r-r_e)\delta(\cos\theta - 1)}{2\pi r^2\sqrt{g_{\tau\tau}/B}}. \quad (5)$$

Из свойств симметрии 4-потенциал A_m имеет только временную компоненту. Далее обозначаем $\xi \equiv r/r_0$, $\xi_e \equiv r_e/r_0$, $t \equiv \cos\theta$. Подставляя выражение для A_τ в (4), получаем уравнение

$$\left(\xi^2\sqrt{B/g_{\tau\tau}}A_{\tau,\xi}\right)_{,\xi} + \left(\frac{1-t^2}{\sqrt{Bg_{\tau\tau}}}A_{\tau,t}\right)_{,t} = = -\frac{2e\delta(\xi - \xi_e)\delta(t-1)}{r_0}. \quad (6)$$

Решение для потенциала A_τ будем искать методом разделения переменных:

$$A_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\xi)P_n(t). \quad (7)$$

[1] Везде в работе используется система единиц, в которой скорость света $c = 1$ и гравитационная постоянная $G = 1$.

Здесь Y_n и P_n — независимые функции. Тогда однородное уравнение (6) переписывается в виде двух отдельных уравнений:

$$(1-t^2)P_{n,tt} - 2tP_{n,t} = -n(n+1)P_n, \tag{8}$$

$$\left(\xi^2\sqrt{\frac{B}{g_{\tau\tau}}}Y_{n,\xi}\right)_{,\xi} = \frac{n(n+1)Y_n}{\sqrt{Bg_{\tau\tau}}}. \tag{9}$$

Решением уравнения (8) являются полиномы Лежандра первого рода $P_n(t)$, таким образом, общее решение представимо в виде разложения по мультиполям.

Отсюда сразу можно получить монопольную часть общего решения для напряженности электрического поля (с учетом $P_0 = 1$, а также сшивки на сферах $\xi = 1$ и $\xi = \xi_e$) у незаряженной кротовой норы:

$$F_{r\tau}^{mon,q=0} = \frac{1}{r_0}Y_0(\xi)_{,\xi} = \left\{\begin{array}{ll} 0, & R < R_e, \\ \dfrac{e}{r^2\sqrt{B/g_{\tau\tau}}}, & R > R_e. \end{array}\right. \tag{10}$$

Здесь R_e — радиальная координата физической длины R, соответствующая $r_e = r(R_e)$.

Если же кротовая нора имеет собственный (топологический) заряд q, то решение (10) переписывается в виде

$$F_{r\tau}^{mon} = \frac{1}{r_0}Y_0(\xi)_{,\xi} = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{-q}{r^2\sqrt{B/g_{\tau\tau}}}, & R < 0, \\ \dfrac{q}{r^2\sqrt{B/g_{\tau\tau}}}, & 0 < R < R_e, \\ \dfrac{e+q}{r^2\sqrt{B/g_{\tau\tau}}}, & R > R_e. \end{array}\right. \tag{11}$$

3. НАЛИЧИЕ «ВОЛОС» У КРОТОВЫХ НОР

Как известно у черной дыры нет электромагнитных «волос», из этого следует, в частности, что тангенциальные компоненты поля любого мультиполя должны обращаться в нуль на горизонте.

Покажем теперь, что для кротовой норы это может быть и не так, а напротив: любой мультиполь (кроме монополя) может обладать ненулевыми тангенциальными компонентами поля на горловине кротовой норы.

Рассмотрим мультиполи с $n \geq 1$ (монополь был рассмотрен в конце предыдущего раздела). Как известно, и поле, и потенциал от любого мультиполя должны оставаться конечными во всем пространстве (см., например, [14]). На горловине кротовой норы потенциал в нашей и в другой вселенных должен гладко сшиваться, т. е. производные потенциала остаются на горловине конечными функциями. Тангенциальная компонента поля от каждого мультиполя записывается как $Y_n(\xi)P_n(\cos\theta)_{,\theta}$.

Перепишем уравнение (9) в виде

$$n(n+1)Y_n = B\left(\xi^2 Y_{n,\xi}\right)_{,\xi} + \frac{\xi^2 Y_{n,\xi}}{2}\left[B_{,\xi} - \frac{Bg_{\tau\tau,\xi}}{g_{\tau\tau}}\right]. \tag{12}$$

Величина $g_{\tau\tau}$ и ее производная остаются положительными около горловины (и во всем пространстве), а величина B обращается в нуль на горловине. В то же время производная $B_{,\xi}$ должна оставаться положительной около горловины (и во всем пространстве), иначе горловина кротовой норы может иметь бесконечную физическую протяженность l:

$$l(\xi) = r_0\int\limits_1^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{B(\xi)}}, \tag{13}$$

т. е. интеграл (13) не должен расходиться на горловине.

В работах [4, 5, 18, 19] была рассмотрена магнитная кротовая нора, у которой основная часть материи является обычным магнитным полем (топологическим монополем) и лишь малая часть материи (сколь угодно малая) является фантомной. Эта магнитная кротовая нора по своей геометрии очень близка к предельной черной дыре Рейснера–Нордстрема с зарядом q, равным массе m и радиусу горизонта r_h. При этом у магнитной кротовой норы отличие радиуса горизонта r_h от радиуса горловины r_0 является сколь угодно малой величиной, которая определяет также уравнение состояния фантомной материи.

Одной из возможных форм записи метрического тензора проходимой магнитной кротовой норы может быть следующая:

$$\begin{gathered} ds^2 = \left(1-\frac{r_h}{r}\right)^2 d\tau^2 - \\ - \frac{dr^2}{\left(1-\dfrac{2r_h-r_0}{r}\right)\left(1-\dfrac{r_0}{r}\right)} - \\ - r^2\left[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right], \\ r_h \approx r_0, \quad r_h < r_0. \end{gathered} \tag{14}$$

Отсюда видно, что в пределе при $r_0 \to r_h$ имеем $B \to g_{\tau\tau}$ и $B_{,r}(r_0) \to 0$. Такая предельная магнитная кротовая нора обладает бесконечной протяженностью горловины l и является, на самом деле, уже предельной черной дырой Рейснера – Нордстрема. Этот объект является непроходимым по двум причинам: из-за наличия горизонта (в точке горловины) и из-за бесконечной протяженности горловины $l(\xi)$, не позволяющей за конечное время уйти в другую вселенную. В этом случае все слагаемые в правой части выражения (12) на горловине обращаются в нуль, что соответствует отсутствию «волос».

Если же у магнитной кротовой норы $r_h < r_0$, то на горловине $B_{,\xi}|_{(\xi=1)} > 0$ и поэтому тангенциальные компоненты поля на горловине присутствуют, т. е. у такой кротовой норы есть «волосы» (и нет горизонта).

Единственным исключением для проходимых кротовых нор, не имеющих «волос», с $g_{\tau\tau} > 0$ и с конечной протяженностью горловины являются кротовые норы с функцией $B(r)$, которая вблизи горловины может быть представлена в виде $B(r) = (1 - r_0/r)^k$ при $1 < k < 2$.

Можно было бы рассмотреть и другие модели кротовых нор (не обладающих горизонтом, и поэтому не являющихся черными дырами[2)]) с бесконечной протяженностью горловины, у которых также не будет на горловине «волос», однако такие кротовые норы уже не будут проходимыми (из-за бесконечной протяженности горловины) и поэтому мы их не рассматриваем в данной работе.

4. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

Область определения общего решения можно разбить на три части (см. рисунок).

1. Область другой вселенной $R < 0$, обозначаем ее индексом «a».

2. Область нашей вселенной при $1 < \xi < \xi_e$, обозначаем ее индексом «b».

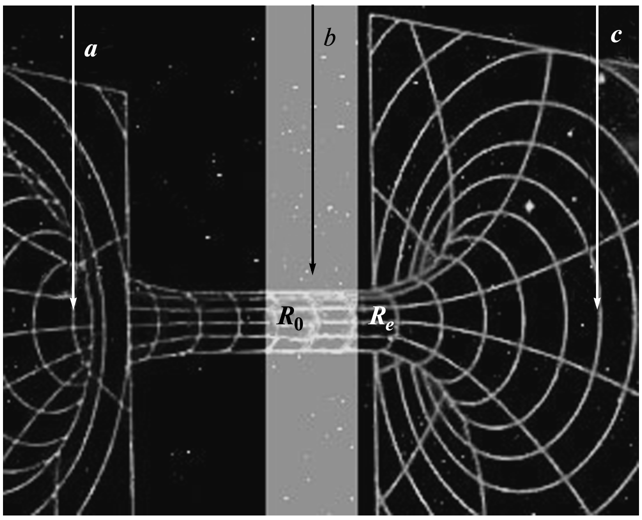
3. Область нашей вселенной при $\xi > \xi_e$, обозначаем ее индексом «c».

Все три области непрерывно сшиваются друг с другом:

$$Y_n^a(1) = Y_n^b(1), \quad Y_n^b(\xi_e) = Y_n^c(\xi_e). \tag{15}$$

При этом решения $Y_n^a(\xi)$ и $Y_n^c(\xi)$ должны стремиться к нулю на бесконечности, поэтому могут отли-

[2)] Можно, например, рассмотреть непроходимую кротовую нору, у которой $g_{\tau\tau} > 0$, $B = (1 - r_0/r)^k$ и $k \geq 2$.



Области условного разбиения кротовой норы на три части: область a — при $R < R_0 \equiv 0$, область b — при $0 < R < R_e$, область c — при $R_e < R$

чаться друг от друга только постоянным коэффициентом: $Y_n^a(\xi) = C_n^a Y_n^c(\xi)$, где коэффициент C_n^a определяется из формулы (15):

$$C_n^a = \frac{Y_n^b(1)}{Y_n^c(1)}. \tag{16}$$

При этом условие гладкой (не только непрерывной, как в (15)) сшивки на горловине кротовой норы обеспечивается автоматически, так как гладкая сшивка должна идти по координате R, а не по r, поэтому на горловине производные функций $Y_n^a(\xi)$ и $Y_n^b(\xi)$ должны умножаться на величину $r_{,R} = \sqrt{B}$, что и обеспечивает гладкость.

Любое дифференциальное уравнение второго порядка при заданных граничных условиях имеет два независимых решения, между которыми существует известная связь. В случае уравнения (9) решения $Y_n^a(\xi)$ и $Y_n^c(\xi)$ должны стремиться к нулю на бесконечности как $1/r^{n+1}$ в соответствии с мультипольной асимптотикой. Тогда решение $Y_n^b(\xi)$ выражается через $Y_n^c(\xi)$ по известной формуле (см., например, [20]):

$$Y_n^b(\xi) = C_n^b Y_n^c(\xi) \int\limits_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\tilde{\xi}}{\left[Y_n^c(\tilde{\xi})\right]^2 \tilde{\xi}^2 \sqrt{B/g_{\tau\tau}}}, \tag{17}$$

где C_n^b и ξ_1 также являются постоянными коэффициентами. Математические подробности этого раздела содержатся в Приложении А.

Как уже было сказано, общим решением с учетом монопольной компоненты (11) является сумма (7). Некоторые относительно простые частные случаи применения этого метода ранее были рассмотрены в работах [12–14, 21]. В следующем разделе мы также рассмотрим еще один частный случай осесимметричной магнитостатики, для кротовых нор ранее не рассматривавшийся.

5. МАГНИТОСТАТИКА КОЛЬЦЕВОГО ТОКА

Рассмотрим теперь случай осесимметричной магнитостатики кольцевого тока в поле кротовой норы. Магнитостатика кротовых нор является не менее важной, чем электростатика. Решение будем искать описанным выше методом для случая простейшей безмассовой кротовой норы БЭМТ с метрикой (1) для $r^2 = r_0^2 + R^2$.

Математические подробности этих вычислений вынесены в Приложение B.

Рассмотрим здесь только простейший частный случай кольцевого тока на горловине кротовой норы: $x_J = 0$. Найдем главную — дипольную — компоненту ($n = 1$) выражения (B.30). Решение для нее во всем пространстве запишется в виде

$$A_\varphi^{dip}(x,t,0,t_J) = \\ = \frac{\mu(1-t^2)|x-(1+x^2)\,\mathrm{artg}(1/x)|}{r_0} \to \\ \to \frac{\mu\sin^2\theta}{|R|}, \quad \mu \equiv \frac{3}{8} J r_0^2 (1-t_J^2). \qquad (18)$$

Здесь величина μ имеет смысл магнитного момента системы, а стрелка означает предел при $x \to \pm\infty$.

Как и следует ожидать, дипольное магнитное поле вдоль оси $\theta = 0$ не меняет знака при пересечении горловины:

$$H_{dip}^{\hat r}(x,t,0,t_J) \equiv \sqrt{g^{\theta\theta}g^{\varphi\varphi}}F_{\theta\varphi}^{dip} = \\ = \frac{2\mu t|x-(1+x^2)\,\mathrm{artg}(1/x)|}{r_0^3(1+x^2)} \to \frac{2\mu\cos\theta}{|R^3|}. \qquad (19)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы доказали возможность существования «волос» не только у безмассовых, но и у массивных, проходимых кротовых нор, а также рассмотрели плавный предельный переход от кротовых нор к черным дырам Рейснера–Нордстрема с соответствующим исчезновением «волос». Мы построили также общий метод нахождения решения стационарных, осесимметричных уравнений Максвелла в поле массивных, сферически-симметричных кротовых нор. Как частный пример применения этого метода было найдено решение осесимметричной магнитостатики кольцевого тока в поле кротовой норы БЭМТ.

Поскольку далекие астрофизические объекты гораздо легче обнаружить при наличии у них электромагнитных «волос» (мультиполей), данная работа может оказаться полезной для наблюдательного обнаружения кротовых нор.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федеральной программы «Научно-педагогическая инновационная Россия 2009–2011» и программы Президиума академии наук «Происхождение, структура и эволюция объектов во Вселенной 2011».

ПРИЛОЖЕНИЕ A

Нахождение гладкого решения для массивной кротовой норы

Функции $Y_n^a(\xi)$ и $Y_n^b(\xi)$ выражаются через коэффициенты C_n^a, C_n^b и через функцию $Y_n^c(\xi)$, которую можно найти из уравнения (9) численно. Амплитуда функции $Y_n^c(\xi)$ выбирается так, чтобы общее решение (7) совпадало на бесконечности (в пространстве Минковского) с известным разложением по мультиполям:

$$A_\tau^{Minkovsky}(r,t,r_e) = \frac{e}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_e}{r}\right)^n P_n(t), \\ r_e \ll r, \qquad (A.1)$$

т. е. должно быть

$$Y_n^c(\xi\to\infty) \to \frac{e}{r_0}\frac{\xi_e^n}{\xi^{n+1}}.$$

В точке $\xi = \xi_e$ условия сшивки (15) и соотношение (17) приводят к выражению

$$\frac{r_0}{e(2n+1)Y_n^c(\xi_e)} = \int_{\xi_1}^{\xi_e} \frac{d\tilde\xi}{\left[Y_n^c(\tilde\xi)\right]^2 \tilde\xi^2\sqrt{B/g_{\tau\tau}}}. \qquad (A.2)$$

Оно позволяет определить константу интегрирования ξ_1.

Для нахождения коэффициента C_n^b делим выражение (17) на $Y_n^c(\xi)$ и дифференцируем по ξ:

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{Y_n^b(\xi)}{Y_n^c(\xi)}\right] = \frac{C_n^b}{[Y_n^c(\xi)]^2\,\xi^2\sqrt{B/g_{\tau\tau}}}. \qquad (A.3)$$

Для нахождения неизвестного коэффициента C_n^b подставляем в уравнение (6) выражение (7), умножаем его на $P_n(t)$ и интегрируем по dt в пределах от -1 до 1. С учетом уравнения Лежандра (8) и свойства ортогональности полиномов Лежандра первого рода получаем

$$\left(\xi^2\sqrt{\frac{B}{g_{\tau\tau}}}Y_{n,\xi}\right)_{,\xi} - n(n+1)\frac{Y_n}{\sqrt{Bg_{\tau\tau}}} = = -\frac{(2n+1)e\delta(\xi-\xi_e)}{r_0}. \quad (A.4)$$

Интегрируем обе части (A.4) по ξ в пределах от $\xi_e-\epsilon$ до $\xi_e+\epsilon$, потом устремляем ϵ к нулю и получаем в точке ξ_e:

$$\partial_\xi(Y_n^b - Y_n^c) = \frac{e(2n+1)}{r_0\xi_e^2\sqrt{B/g_{\tau\tau}}}. \quad (A.5)$$

С другой стороны, с учетом соотношений (15) и (A.3) выражение (A.5) в точке ξ_e переписывается в виде

$$\frac{C_n^b}{\left[Y_n^c(\xi_e)\right]^2\xi_e^2\sqrt{B/g_{\tau\tau}}} = \frac{\partial_\xi(Y_n^b - Y_n^c)}{Y_n^c} = = \frac{e(2n+1)}{r_0Y_n^c(\xi_e)\xi_e^2\sqrt{B/g_{\tau\tau}}}. \quad (A.6)$$

Отсюда получаем необходимый коэффициент:

$$C_n^b = \frac{e(2n+1)Y_n^c(\xi_e)}{r_0}. \quad (A.7)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ B

Магнитное поле кольцевого тока безмассовой кротовой норы

4-вектор тока запишем в виде

$$j^j = \frac{J\delta_\varphi^j\delta(R-R_J)\delta(\theta-\theta_J)}{2\pi r^2\sin\theta}. \quad (B.1)$$

Аксиальная компонента уравнения Максвелла (4) для единственной ненулевой компоненты A_φ имеет вид

$$r^2A_{\varphi,RR} + (1-t^2)A_{\varphi,tt} = -4\pi r^4(1-t^2)j^\varphi. \quad (B.2)$$

Решение также ищем методом разделения переменных:

$$A_\varphi(x_J,t_J,x,t) = A_\varphi^{mon}(t) + + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x_J,t_J)Y_n(x)T_n(t), \quad (B.3)$$

где $x \equiv R/r_0$, $x_J \equiv R_J/r_0$, $t_J \equiv \cos\theta_J$.

Однородное уравнение (B.2) аналогично уравнениям (8), (9) переписывается в виде

$$(1-t^2)T_{n,tt} = -n(n+1)T_n, \quad (B.4)$$

$$(1+x^2)Y_{n,xx} = n(n+1)Y_n. \quad (B.5)$$

Отсюда получаем для монопольной компоненты:

$$A_\varphi^{mon}(t) = q_m t, \quad H_{mon}^{\hat{r}} \equiv \sqrt{F^{\theta\varphi}F_{\theta\varphi}} = \frac{q_m}{r^2}. \quad (B.6)$$

Для $n \geq 1$ вводим новые функции:

$$P_n(t) = T_{n,t}, \quad Q_n(ix) = Y_{n,x} \quad (B.7)$$

и, дифференцируя (B.4), (B.5), получаем

$$\left[(1-t^2)P_{n,t}\right]_{,t} = -n(n+1)P_n, \quad (B.8)$$

$$\left[(1+x^2)Q_{n,x}\right]_{,x} = n(n+1)Q_n. \quad (B.9)$$

Это уравнения Лежандра для действительного (B.8) и мнимого (B.9) аргументов. Интегрируя (B.8) и (B.9), получаем

$$T_n(t) = \int_{-1}^{t} P_n(t)\,dt = \frac{-(1-t^2)P_{n,t}}{n(n+1)}, \quad (B.10)$$

$$Y_n^{a,c}(x) = -\int_x^\infty Q_n\,dx = \frac{(1+x^2)Q_{n,x}}{n(n+1)}, \quad (B.11)$$

$$Y_n^b(x) = T_n(ix) = \frac{(1+x^2)P_n(ix)_{,x}}{n(n+1)}. \quad (B.12)$$

Здесь индексы «a», «b» и «c» обозначают аналогичные предыдущему разделу области у кротовой норы: $x_a < 0$, $0 < x_b < x_J$, $x_J < x_c$, а Q_n — полиномы Лежандра второго рода от мнимого аргумента (стремящиеся к нулю на бесконечности):

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \\ P_n(ix) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2+1)^n, \end{aligned} \quad (B.13)$$

$$Q_n(ix) = P_n(ix)\,\mathrm{artg}\left(\frac{1}{x}\right) + + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}P_{k-1}(ix)P_{n-k}(ix). \quad (B.14)$$

Таблица

n	$P_n(t)$	$P_n(ix)$	$Q_n(ix)$	$T_n(t)$	$Y_n^b(x)$	$Y_n^{a,c}(x)$
0	1	1	A	–	–	–
1	t	$-x$	$-xA+1$	$\frac{t^2-1}{2}$	$-\frac{1+x^2}{2}$	$\frac{x-(1+x^2)A}{2}$
2	$\frac{3t^2-1}{2}$	$\frac{1+3x^2}{2}$	$\frac{1+3x^2}{2}A-\frac{3x}{2}$	$\frac{t(t^2-1)}{2}$	$\frac{x(1+x^2)}{2}$	$\frac{Ax(1+x^2)}{2}-\frac{1}{3}-\frac{x^2}{2}$
3	$\frac{5t^3-3t}{2}$	$-\frac{5x^3+3x}{2}$	$-\frac{5x^3+3x}{2}A+\frac{5x^2}{2}+\frac{2}{3}$	$\frac{(t^2-1)(5t^2-1)}{8}$	$\frac{-(1+x^2)(1+5x^2)}{8}$	$\frac{-(1+x^2)(1+5x^2)A}{8}+\frac{x(13+15x^2)}{24}$

Примечание: $A = \mathrm{artg}\,(1/x)$.

В работе [14] были подробно описаны свойства полиномов Лежандра мнимого аргумента. Приведем необходимые для вычислений рекуррентные формулы:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad \text{(B.15)}$$

$$(n+1)P_{n+1}(ix) = = -(2n+1)xP_n(ix) + nP_{n-1}(ix). \quad \text{(B.16)}$$

В таблице[3)] приведены несколько первых членов необходимых нам полиномов, вычисленных на основе (B.14)–(B.16) и (B.10)–(B.12). При этом

$$\lim_{x\to\infty} Q_n(ix) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!(2n+1)x^{n+1}}, \qquad \lim_{x\to\infty} Y_n^{a,c}(x) = \frac{-2^n(n!)^2}{n(2n)!(2n+1)x^n}. \quad \text{(B.17)}$$

Найдем связь между коэффициентами C_n^b и C_n^c в (B.3). Для этого подставляем (B.3) в (B.2) и учитываем (B.1), (B.4), (B.6), (B.10):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n P_{n,t}\left[\frac{(1+x^2)Y_{n,xx}}{n(n+1)} - Y_n\right] = = 2Jr_0(1+x^2)\delta(x-x_J)\delta(t-t_J). \quad \text{(B.18)}$$

Теперь интегрируем это выражение по dt в пределах от t до 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[1-P_n(t)\right]\left[\frac{(1+x^2)Y_{n,xx}}{n(n+1)} - Y_n\right] = = 2Jr_0(1+x^2)\delta(x-x_J)\Theta(t-t_J). \quad \text{(B.19)}$$

Здесь $\Theta(y)$ — ступенчатая функция. При выводе формулы (B.19) было учтено, что $P_n(1)=1$.

Теперь умножаем выражение (B.19) на $P_k(t)$ и, учитывая ортогональность полиномов Лежандра первого рода, интегрируем по dt в пределах от -1 до 1:

$$\frac{-2C_n}{2n+1}\left[\frac{(1+x^2)Y_{n,xx}}{n(n+1)} - Y_n\right] = = 2Jr_0(1+x^2)\delta(x-x_J)\int_{-1}^{t_J} P_n(t)\,dt. \quad \text{(B.20)}$$

Делим обе части (B.20) на $1+x^2$, интегрируем по x в пределах от $x_J-\epsilon$ до $x_J+\epsilon$, потом устремляем ϵ к нулю и получаем в точке x_J с учетом (B.7), (B.10):

$$C_n^b P_n(ix_J) - C_n^c Q_n(ix_J) = = n(n+1)(2n+1)Jr_0T_n(t_J). \quad \text{(B.21)}$$

С другой стороны, в любой точке (в том числе и в $x=x_J$) должно выполняться условие непрерывности потенциала:

$$C_n^b Y_n^b(x_J) = C_n^c Y_n^{a,c}(x_J). \quad \text{(B.22)}$$

Известная связь между двумя частными решениями дифференциального уравнения (B.5) имеет вид

$$P_n(ix)Y_n^{a,c} - Q_n(ix)Y_n^b = \frac{1}{n(n+1)}. \quad \text{(B.23)}$$

Из уравнений (B.21)–(B.23) выводим значения коэффициентов:

$$C_n^c = n^2(n+1)^2(2n+1)Jr_0T_n(t_J)Y_n^b(x_J), \quad \text{(B.24)}$$

[3)] Левая часть этой таблицы была опубликована в работе [14].

$$C_n^b = n^2(n+1)^2(2n+1)Jr_0T_n(t_J)Y_n^{a,c}(x_J). \quad (B.25)$$

Из выражения (B.14) видно, что на горловине функции Q_n (а значит и $Y_n^{a,c}$) испытывают скачок:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[Q_n(+i\epsilon) - Q_n(-i\epsilon)\right] = \pi P_n(i\epsilon). \quad (B.26)$$

В любой точке кроме $x = x_J$ решение должно быть гладким, поэтому на горловине кротовой норы должны быть непрерывны и сами функции, и их первые производные:

$$C_n^a Y_n^{a,c}(-\epsilon) + C_n^{hom} Y_n^{a,c}(-\epsilon) = \\ = C_n^b Y_n^b(+\epsilon) + C_n^{hom} Y_n^{a,c}(+\epsilon), \quad (B.27)$$

$$C_n^a Q_n(-i\epsilon) + C_n^{hom} Q_n(-i\epsilon) = \\ = C_n^b P_n(+i\epsilon) + C_n^{hom} Q_n(+i\epsilon). \quad (B.28)$$

Для того чтобы удовлетворить условиям гладкости на горловине, мы к решению во всем пространстве добавили всюду конечное решение однородного уравнения (B.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{hom} Y_n^{a,c}(x) T_n(t).$$

Из формул (B.26)–(B.28) получаем, что

$$C_n^a = 0, \quad C_n^{hom} = -C_n^b/\pi. \quad (B.29)$$

В итоге с учетом коэффициентов (B.24)–(B.25) окончательное полное решение имеет вид

$$A_\varphi(x,t,x_J,t_J) = q_m t + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \times \\ \times \begin{cases} -C_n^b Y_n^{a,c}(x)/\pi, & x < 0, \\ C_n^b\left[Y_n^b(x) - Y_n^{a,c}(x)/\pi\right], & 0 \le x \le x_J, \\ \left[C_n^c - C_n^b/\pi\right] Y_n^{a,c}(x), & x > x_J. \end{cases} \quad (B.30)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Wheeler, Phys. Rev. **97**, 511 (1955).
2. J. A. Wheeler, *Geometrodynamics*, Acad. Press, New York (1962).
3. V. Frolov and I. Novikov, Phys. Rev. D **42**, 1057 (1990).
4. Н. С. Кардашев, И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, Астрон. ж. **83**, 675 (2006).
5. N. S. Kardashev, I. D. Novikov, and A. A. Shatskiy, Int. J. Mod. Phys. D **16**, 909 (2007).
6. А. М. Черепащук, Вестник МГУ, сер. 3, физика, астрон. **2**, 62 (2005).
7. B. Linet, J. Phys. A **9**, 1081 (1976).
8. B. Linet, arXiv:0712.0539.
9. G. A. Alekseev and V. A. Belinski, Phys. Rev. D **76**, 021501 (2007).
10. И. Д. Новиков, В. П. Фролов, *Физика черных дыр*, Наука, Москва (1986).
11. V. P. Frolov and I. D. Novikov, *Black Hole Physics*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1998).
12. N. R. Khusnutdinov and I. V. Bakhmatov, arXiv: 0707.3396.
13. S. Krasnikov, arXiv:0802.1358.
14. В. С. Бескин, Н. С. Кардашев, И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, Астрон. ж. **88**, 1000 (2011).
15. M. Visser, *Lorentzian Wormholes: from Einstein to Hawking*, AIP, Woodbury (1995).
16. K. A. Bronnikov, Acta Phys. Pol. B **4**, 251 (1973).
17. H. G. Ellis, J. Math. Phys. **14**, 104 (1973).
18. И. Д. Новиков, Н. С. Кардашев, А. А. Шацкий, УФН **177**, 1017 (2007).
19. А. А. Шацкий, УФН **179**, 861 (2009).
20. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*, Физматлит, Москва (1959).
21. J. M. Cohen and R. M. Wald, J. Math. Phys. **12**, 1845 (1971).