

# СТАТИСТИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ СМЕШАННЫХ СОСТОЯНИЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ КУБИТОВ

Ю. И. Богданов<sup>a</sup>, А. К. Гавриченко<sup>a</sup>, К. С. Кравцов<sup>b</sup>,  
С. П. Кулик<sup>c</sup>, Е. В. Морева<sup>d,e\*</sup>, А. А. Соловьев<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Физико-технологический институт Российской академии наук  
117218, Москва, Россия

<sup>b</sup> Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук  
119991, Москва, Россия

<sup>c</sup> Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия

<sup>d</sup> Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Москва, Россия

<sup>e</sup> Международный учебно-научный лазерный центр,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 декабря 2010 г.

Проведено обобщение метода оценки адекватности, полноты и точности протоколов квантовой томографии на случай смешанных состояний поляризационных кубитов. Эффективность метода проиллюстрирована на основе математического моделирования и экспериментального исследования некоторых практически важных протоколов квантовой томографии.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Статистическое восстановление (томография) квантовых состояний и процессов играет центральную роль в квантовых информационных технологиях и квантовой связи [1–3]. Квантовая томография является основным инструментом в руках экспериментатора, позволяющим измерить неизвестное квантовое состояние, рассмотреть его эволюцию, а также оценить адекватность и точность процедур приготовления заданных специальных состояний и процедур измерения результатов квантовых вычислений.

При томографии квантовых состояний (quantum state tomography) неизвестное (например, чистое) состояние  $|\Psi\rangle$  подвергается набору из  $m$  унитарных преобразований, описываемых операторами  $\hat{G}_j$ . Пусть осуществляется проекционное измерение на

фиксированное состояние  $|\Psi_0\rangle$ . В результате получаем следующий набор из  $m$  вероятностей:

$$P_j = |\langle\varphi_j|\Psi\rangle|^2, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

где  $\langle\varphi_j| = \langle\Psi_0|\hat{G}_j$ .

Вероятности (1) определяют статистические частоты экспериментально регистрируемых событий и задают основу для приближенного восстановления исходного состояния  $|\Psi\rangle$  посредством решения некоторой обратной задачи. Например, в работе [4] был предложен набор преобразований  $\hat{G}_j$ , позволяющий однозначно восстановить произвольное (в том числе и смешанное) поляризационное состояние пары фотонов, распределенных в двух пространственных модах поля.

При томографии квантового процесса (quantum process tomography), напротив, неизвестными являются сами преобразования  $\hat{G}_j$ , а входные состояния  $|\Psi\rangle$  полагаются известными. При этом на основе статистических данных приближенно вос-

\*E-mail: moreva\_e@mail.ru

становливаются набор операторов, которые характеризуют тот или иной процесс. Например, в работах [5, 6] статистическое восстановление аналогичных [4]<sup>1)</sup> поляризационных состояний в пространственно-неоднородном полидоменном кристалле дигидрофосфата калия позволило сделать выводы о функции распределения доменов.

В работах [7, 8] была предложена и развита новая методология теоретической и экспериментальной оценки качества и эффективности квантовых информационных технологий, основанная на изучении полноты, адекватности и точности протоколов квантовых измерений. Однако экспериментально эта методика была апробирована только на чистых состояниях кубитов [7] и пар кубитов [8]. Основная цель настоящей работы состоит в экспериментальном изучении смешанных состояний на примере поляризационных кубитов. Особое внимание уделяется изучению точности томографии в зависимости от степени чистоты квантового состояния, а также детальному сравнению результатов физических экспериментов и результатов математического моделирования.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 дается краткое описание теории квантовых измерений на языке соответствующих протоколов, описывающих проведение типичных реальных экспериментов. В разд. 3 дается краткий обзор используемой нами методологии оценки полноты, адекватности и точности протоколов квантовой томографии. В разд. 4 описываются протоколы, реализованные в наших экспериментах, а в разд. 5 дается описание экспериментальной установки. С целью детального изучения точности квантовой томографии в разд. 6 приводится схема расчета приготавливаемого в эксперименте смешанного состояния. В разд. 7 изучается специальный (наиболее трудный для томографии) случай восстановления смешанных состояний, близких к чистым состояниям. Наконец, в разд. 8 приводятся основные результаты экспериментов и выводы.

## 2. ПРОТОКОЛ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Согласно принципу дополненности Н. Бора, различные проекционные измерения (1) образуют совокупность взаимно-дополнительных измерений. Рассматриваемая совокупность, в свою очередь, образует протокол квантовых измерений. Вся совокуп-

<sup>1)</sup> Различие состояло лишь в выборе типа мод: здесь использовались частотные, а не пространственные моды поля.

ность квантовых измерений протокола может быть компактно представлена в матричном виде [7, 8]:

$$M_j = X_{jl} c_l, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Здесь  $c_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, s$  — компоненты вектора состояния в гильбертовом пространстве размерности  $s$ . По повторяющемуся индексу  $l$  в формуле (2) предполагается суммирование. Протокол описывает  $m$  проекций квантового состояния (поэтому имеет  $m$  строк).  $M_j$  есть амплитуда вероятности  $j$ -й квантовой проекции. Интенсивности генерации событий  $\lambda_j$  (ожидаемые числа регистрируемых событий в единицу времени) задаются квадратами модулей амплитуд:

$$\lambda_j = |M_j|^2. \quad (3)$$

Матрица с компонентами  $X_{jl}$ , имеющая  $m$  строк и  $s$  столбцов задает так называемую аппаратную матрицу протокола квантовых измерений [7, 8]. Именно эта матрица описывает формально математически всю совокупность взаимно-дополнительных измерений ( $j$ -я строка матрицы  $X$  задает бра-вектор  $\langle \varphi_j |$  соответствующего проекционного измерения в формуле (1)).

Для смешанного состояния с матрицей плотности  $\rho$  соответствующая интенсивность регистрации событий, отвечающих  $j$ -й строке протокола, есть

$$\lambda_j = \text{tr}(\Lambda_j \rho). \quad (4)$$

Здесь  $\Lambda_j = X_j^\dagger X_j$  — оператор интенсивности квантового процесса,  $X_j$  —  $j$ -я строка аппаратной матрицы  $X$ .

В рассматриваемом случае оператор интенсивности квантового процесса  $\Lambda_j$  является проектором, поэтому

$$\Lambda_j^2 = \Lambda_j. \quad (5)$$

В более общем с формальной точки зрения случае  $\Lambda_j$  — произвольный положительно определенный оператор. Его можно представить как смесь проекционных операторов, рассмотренных выше:

$$\Lambda_j = \sum_k f_k X_j^{(k)+} X_j^{(k)}. \quad (6)$$

Здесь индекс  $k$  нумерует различные компоненты смеси, входящие с весами  $f_k > 0$ . Такое обобщенное измерение удобно представлять наглядно как редукцию совокупности проекционных измерений, в которых доступна только суммарная статистика, но недоступны статистические данные по отдельным компонентам. Обычное проекционное измерение есть частный случай записи (6), в которой  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = f_3 = \dots = 0$ .

Рассмотрим матрицу  $I$ , равную сумме по всем строкам протокола произведений времен экспозиции  $t_j$  на операторы интенсивности  $\Lambda_j$ :

$$I = \sum_{j=1}^m t_j \Lambda_j. \quad (7)$$

Важный частный случай соответствует ситуации, когда введенная матрица пропорциональна единичной матрице  $E$ :

$$I = I_0 E, \quad (8)$$

где  $I_0$  — постоянная, задающая суммарную интенсивность.

Если протокол удовлетворяет условию (8), то говорят, что он сводится к разложению единицы, в общем случае неортогональному [9]. Заметим, что в математической теории такие измерения рассматриваются в качестве наиболее общего расширения традиционных измерений фон Неймана, основанных на ортогональном разложении единицы. В то же время, реальные экспериментальные протоколы квантовых измерений зачастую не удовлетворяют условию (8). Резонность требования (8) основана на соображениях, связанных с сохранением полной вероятности. В реальных же экспериментах экспериментатор настраивает установку на выделение, как правило, только одной проекции квантового состояния. При этом представители ансамбля, отвечающие всем остальным проекциям, просто не регистрируются. Таким образом, реальные эксперименты (по техническим причинам) обычно не обеспечивают регистрацию всех представителей квантового статистического ансамбля и, в силу этого, не связаны условием сохранения полной вероятности. Рассматриваемый нами подход пригоден для анализа произвольных реальных протоколов квантовых измерений, основанных на регистрации элементарных событий, и не ограничен требованием (8). В экспериментах, проведенных в рамках настоящей работы, два из рассматриваемых ниже в разд. 4 протоколов (R4 и S6) сводятся к разложению единицы, а два других (J4 и B36) — нет.

Суммарная интенсивность генерации событий задает условие нормировки в виде

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j t_j = n, \quad (9)$$

где  $n$  — суммарное по всем строкам протокола ожидаемое число событий,  $t_j$  — время экспозиции для  $j$ -й строки.

Условие (9) заменяет собой традиционное условие нормировки  $\text{tr}(\rho) = 1$  для матрицы плотности.

### 3. МЕТОДОЛОГИЯ ОЦЕНКИ ПОЛНОТЫ, АДЕКВАТНОСТИ И ТОЧНОСТИ ПРОТОКОЛОВ КВАНТОВОЙ ТОМОГРАФИИ

Для описания всей совокупности измерений квантового протокола удобно каждую матрицу интенсивности квантового процесса  $\Lambda_j$  размерности  $s \times s$  вытянуть в виде одной строки длины  $s^2$  (при этом вторая строка помещается справа от первой и т. д.). Припишем каждой такой строке  $B_j$  вес, определяемый соответствующим временем экспозиции  $t_j$ . Составим из таких строк матрицу  $B$  размерности  $m \times s^2$ , которую будем называть матрицей измерений для томографического протокола. Будем предполагать, что  $m \geq s^2$ . В случае проекционных измерений, задаваемых строками  $X_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) аппаратной матрицы  $X$ , строки  $B_j$  матрицы измерений  $B$  могут быть вычислены с помощью тензорного произведения строки  $X_j$  и комплексно-сопряженной строки  $X_j^*$ :

$$B_j = t_j \cdot X_j^* \otimes X_j. \quad (10)$$

С использованием матрицы измерений  $B$  все результаты протокола могут быть компактно записаны в матричном виде:

$$B\rho = T. \quad (11)$$

Здесь  $\rho$  — матрица плотности, записанная в форме одного столбца (второй столбец ниже первого и т. д.). Для упрощения записи будем использовать то же самое обозначение  $\rho$  для нового объекта. Вектор-столбец  $T$  длины  $m$  служит для записи числа регистрируемых событий. Если  $\rho$  — точная теоретическая матрица плотности, то элементы столбца  $T$  отвечают ожидаемому числу событий, которые будут зарегистрированы.

Алгоритм решения уравнения (11) можно сформулировать на языке сингулярного разложения матриц (singular value decomposition — svd) [10, 11]. Такой способ нахождения решений системы линейных уравнений (10) лежит в основе метода псевдоинверсии Мура–Пенроуза.

Представим матрицу  $B$  в виде так называемого svd-разложения:

$$B = USV^+, \quad (12)$$

где  $U$  и  $V$  — унитарные матрицы, а  $S$  — диагональная неотрицательно определенная матрица (элементы диагонали этой матрицы называют сингулярными значениями). Размерности рассматриваемых

матриц соответственно равны  $m \times m$  для  $U$ ,  $m \times s^2$  для  $S$ ,  $s^2 \times s^2$  для  $V$ .

Введем новые переменные. Вместо независимой переменной-столбца  $\rho$  будем рассматривать унитарно связанную с ней переменную  $f$ , которую будем называть столбцом факторов:

$$f = U^+ \rho. \quad (13)$$

Аналогично, вместо исходного столбца измерений  $T$  будем рассматривать унитарно связанный с ним столбец  $Q$ , который будем называть характеристическим столбцом:

$$Q = U^+ T. \quad (14)$$

В новых обозначениях рассматриваемая система, очевидно, может быть записана в следующей форме:

$$Sf = Q. \quad (15)$$

Полученная система элементарна, так как  $S$  — диагональная матрица. Ее анализ позволит нам классифицировать измерения с точки зрения их адекватности и полноты [12].

Пусть  $m > s^2$ , т.е. число измерений превышает число элементов матрицы плотности. Рангом модели  $q$  будем называть число ненулевых сингулярных значений матрицы  $B$ . Очевидно, что  $q \leq s^2$ . В матрице  $S$  последние  $m - q$  строк заведомо нулевые. Отсюда следует, что для того, чтобы система была совместной, необходимо, чтобы и в характеристическом столбце  $Q$  последние  $m - q$  значений также были тождественно равны нулю. Полученное условие есть условие адекватности протокола измерений. Если оно не выполняется, то имеет место неадекватность модели: статистические данные заведомо не соответствуют никакой квантовомеханической матрице плотности; это может означать, например, что имелись грубые ошибки при выполнении эксперимента или расчета аппаратной матрицы протокола, либо не учтено адекватно окружение изучаемой квантовой системы. Заметим, что проверка адекватности может быть выполнена только в том случае, если протокол содержит в себе некоторую избыточность ( $m > q$ ). Заметим также, что рассматриваемая проверка будет точной только в том случае, когда известны точные значения ожидаемого числа событий в каждой строке протокола. Для реальных измерений соответствие между ожидаемым и регистрируемым числом событий только приближенное. В этом случае проверка адекватности измерений сводится к проверке соответствующей статистической гипотезы [13].

Пусть модель адекватна. Если все сингулярные значения заведомо отличны от нуля, т.е.  $q = s^2$ , то имеет место полнота. Протокол измерения полностью определяет любое квантовое состояние (как чистое, так и смешанное), которое только может быть задано в рассматриваемом гильбертовом пространстве.

В дальнейшем будем предполагать, что имеет место полнота ( $q = s^2$ ). Метод псевдоинверсии Мура–Пенроуза может быть использован для приближенного восстановления матрицы плотности, если в качестве правой части уравнения (11) взять экспериментально зарегистрированные частоты событий. Недостаток такого метода, однако, заключается в том, что в силу статистических флуктуаций экспериментальных данных реконструированная матрица плотности не всегда будет положительно определенной. Это происходит, поскольку компоненты смеси, имеющие нулевые или малые веса, могут быть реконструированы как компоненты с малыми отрицательными весами. Несмотря на отмеченный недостаток, представленный способ восстановления служит хорошим нулевым приближением для использованного нами метода максимального правдоподобия. Отметим, что метод максимального правдоподобия свободен от рассматриваемого недостатка, поскольку условие положительной определенности заложено в самой его природе. В то же время, использование решения, полученного методом псевдоинверсии, в качестве нулевого приближения существенно ускоряет поиск решения методом максимального правдоподобия.

Метод псевдоинверсии делает естественным введение так называемого числа обусловленности  $K$ , определяемого как отношение между максимальным  $b_{max}$  и минимальным  $b_{min}$  сингулярными значениями матрицы  $B$ :

$$K = \frac{b_{max}}{b_{min}}. \quad (16)$$

Физико-статистический смысл числа  $K$  определяется условием полноты томографического протокола: если хотя бы одно из сингулярных значений матрицы  $B$  окажется равным нулю, то  $K \rightarrow \infty$ , система (11) не будет иметь единственного решения, и квантовое состояние в общем случае окажется неопределенным. Следовательно, чем меньше  $K$ , тем лучше, в целом, протокол с точки зрения решения обратной задачи. Критерий, основанный на числе обусловленности  $K$ , удобно использовать [7, 8]. К тому же он позволяет оценить точность протокола до выполнения реального эксперимента.

Количественной характеристикой точности статистического восстановления квантового состояния служит так называемая вероятность совпадения (Fidelity)  $F$ , задающая степень согласия между неизвестным квантовым состоянием и его реконструкцией. В общем случае рассматриваемая величина дается следующей формулой [14]:

$$F = \left( \text{Tr} \sqrt{\rho_0^{1/2} \rho \rho_0^{1/2}} \right)^2, \quad (17)$$

где  $\rho_0$  и  $\rho$  — соответственно теоретическая и восстановленная матрицы плотности. В формуле (17) предполагается обычная нормировка следа матрицы плотности на единицу.

В частном случае чистых нормированных на единицу состояний рассматриваемая характеристика определяется формулой:

$$F = |\langle c_0 | c \rangle|^2, \quad (18)$$

где  $c_0$  и  $c$  — теоретический и восстановленный векторы состояния.

Естественность характеристики (17) связана с важной теоремой Ульмана [14]. Согласно этой теореме, выражение (17) задает достижимый максимум выражения (18) для всех возможных чистых векторов состояний  $c_0$  и  $c$ , до которых могут быть дополнены смешанные состояния  $\rho_0$  и  $\rho$ . Процедура очищения (дополнения смешанных состояний до чистых) имеет важное значение для квантовой томографии, поскольку ее использование существенно облегчает поиск решения, особенно в случае многопараметрических задач [13].

Потери точности естественно связать с величиной  $dF = 1 - F$ . Рассматриваемая характеристика оказывается случайной величиной, асимптотическое распределение которой можно представить в виде [13]

$$1 - F = \sum_{j=1}^{j_{max}} d_j \xi_j^2, \quad (19)$$

где  $d_j \geq 0$  — неотрицательные коэффициенты,  $\xi_j \in (0, 1)$ ,  $j = 1, \dots, j_{max}$  — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией,  $j_{max} = 2s - 2$  для чистых состояний и  $j_{max} = s^2 - 1$  для смешанных состояний полного ранга. В асимптотическом пределе параметры  $d_j$  оказываются обратно пропорциональными объему выборки (общему числу зарегистрированных событий)  $n$ , т. е.  $d_j \propto 1/n$ . Указанная зависимость позволяет легко осуществлять перерасчет от одного объема выборки к другому. Метод расчета вектора  $d$  подробно описан в работе [13].

Из соотношения (19) следует, что среднее значение для потерь точности можно вычислить по формуле

$$\langle 1 - F \rangle = \sum_{j=1}^{j_{max}} d_j. \quad (20)$$

В качестве параметра, характеризующего качество протокола квантовых измерений, можно ввести величину, которая не зависит от объема выборки  $n$ :

$$L = n \langle 1 - F \rangle = n \sum_{j=1}^{j_{max}} d_j. \quad (21)$$

Рассматриваемую величину будем называть функцией потерь. Она является функцией квантового состояния и характеризует асимптотические свойства протокола измерений.

#### 4. ОПИСАНИЕ ИССЛЕДУЕМЫХ ПРОТОКОЛОВ КВАНТОВОЙ ТОМОГРАФИИ

Одним из важных протоколов квантовой томографии является протокол R4, рассмотренный в работе [15]. Геометрически в основе этого протокола лежит правильный тетраэдр, вписанный в сферу Блоха. Протокол состоит из четырех строк, образованных соответствующими векторами состояния, проведенными из центра сферы Блоха нормально к граням тетраэдра. В работе [16] показано, что среди всех протоколов с четырьмя измерениями протокол, основанный на геометрии правильного тетраэдра, обладает наибольшей точностью по сравнению с другими протоколами на четырех состояниях при одном и том же числе зарегистрированных событий.

Измерения, основанные на параметрах Стокса, приводят к протоколу S6 из шести строк, в основе которого лежит симметрия куба. Геометрически он представляет собой шесть проекционных измерений на векторы, проведенные из центра сферы Блоха нормально к граням вписанного в нее куба. Соответствующие состояния имеют вид

$$|H\rangle, \quad |V\rangle, \quad |-45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle),$$

$$|45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle),$$

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle), \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle).$$

В эксперименте проекции на указанные состояния осуществляются при помощи пары фазовых

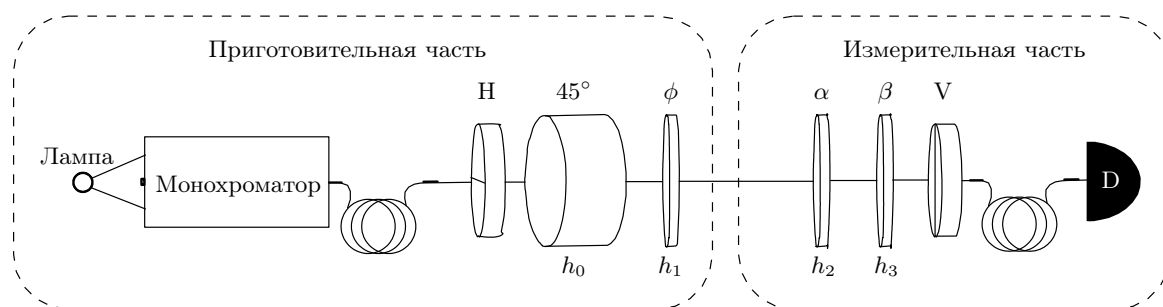


Рис. 1. Экспериментальная установка для приготовления и измерения смешанных поляризационных состояний

пластин (четверть- и полуволновой) и поляризатора.

Заметим, что наряду с представленными протоколами R4 и S6 интерес представляют и другие протоколы, в основе которых лежат правильные многогранники. К ним относятся так называемые платоновы тела с числом граней, соответственно, 8 для октаэдра, 12 для додекаэдра, 20 для икосаэдра [17, 18], а также другие многогранники с высокой симметрией, например, фуллерен (32 грани) и двойственный ему многогранник (60 граней) [18].

Если из протокола S6 удалить две строки, отвечающие проекциям на состояния  $| - 45^\circ \rangle$  и  $| L \rangle$ , то получим еще один известный протокол J4 [4].

Наряду с протоколами R4, S6 и J4, в приведенных ниже экспериментах исследовался протокол B36 [7], который реализовывался при помощи всего лишь одной фазовой пластинки и поляризатора. В рассматриваемом протоколе измерения проводятся при 36 различных ориентациях оптической оси пластинки относительно вертикали с шагом  $10^\circ$ . Высокая избыточность протокола позволяет проверить его адекватность и отследить грубые ошибки в установках параметров и данных.

Заметим, что поляризационные преобразования в протоколе B36, в отличие от первых трех протоколов, проводятся при помощи произвольной пластинки и существенно зависят от ее характеристик — оптической толщины  $\delta = \pi h \Delta n / \lambda$  и угла ориентации  $\alpha$  относительно вертикали ( $\Delta n$  — двупреломление материала пластинки на данной длине волны  $\lambda$ ,  $h$  — ее геометрическая толщина). Параметры этого протокола могут быть выбраны, исходя из задач исследования, ограниченности ресурсов или соображений оптимальности. Для четырех рассматриваемых протоколов числа обусловленности (16) составили:  $K_{R4} = K_{S6} = \sqrt{3} \approx 1.73$ ,  $K_{J4} \approx 3.23$ ,  $K_{B36} = 2.7$  (для пластинки толщиной  $h = 312.7$  мкм).

## 5. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Экспериментальная установка для приготовления и измерения состояний поляризационных кубитов как чистых, так и смешанных, представлена на рис. 1.

Для оценки качества и эффективности исследуемых квантовых томографических протоколов установка должна удовлетворять следующим требованиям:

- 1) позволять плавно менять степень чистоты исследуемых квантовых состояний;
- 2) быть адаптированной для проведения измерений различными протоколами квантовой томографии (J4, S6, R4, B9) с целью их сравнения;
- 3) позволять регулировать по усмотрению экспериментатора полное число регистрируемых событий.

Первое требование выполнялось за счет использования широкополосного источника излучения (лампа с галогенным циклом) и монохроматора МДР-41, который выделял узкий спектральный диапазон с центральной длиной волны 1.55 мкм. Ширину щели монохроматора можно было менять, задавая, тем самым, ширину выходного спектра в пределах 1–23 нм. Параллельный пучок света формировался при помощи одномодового волокна SMF-28, на входе и выходе которого устанавливались микрообъективы F240FC-1550. Призма Глана служила для приготовления исходного (чистого) поляризационного состояния  $|H\rangle$ .

В результате исходное чистое состояние  $|H\rangle$  преобразовывалось в смешанное со степенью чистоты, зависящей от спектральной ширины детектируемого излучения (см. разд. 6). Плавный переход от чистого состояния к полной смеси происходил при увеличении спектральной ширины излучения. Поскольку при этом «измерительная» часть установки име-

ла конечную спектральную полосу, поляризационные состояния на разных спектральных компонентах внутри этой полосы интегрировались, что соответствовало регистрации смешанного поляризационного состояния. Последним элементом в приготовительной части установки являлась кварцевая пластинка с толщиной  $h_1 = 436$  мкм, ориентированная под углом  $\varphi_0 = 30^\circ$ .

По мере увеличения ширины полосы пропускания монохроматора квантовое состояние перемещалось с поверхности сферы Блоха вглубь «шара» практически точно вдоль радиуса. Исходное чистое состояние на поверхности сферы Блоха соответствовало следующим углам в сферических координатах:  $\theta = 0.71796\pi$  и  $\varphi = 0.12594\pi$ .

Для получения смешанных состояний в «приготовительной» части установки дополнительно устанавливалась толстая кварцевая пластинка ( $h_0 = 10$  мм) и пластинка кальцита ( $h_0 = 4$  мм), оптические оси которых были ориентированы под углом  $45^\circ$  к вертикали. Этой толщины достаточно, чтобы разность оптических длин для двух собственных (ортогональных) поляризаций превосходила длину когерентности используемого излучения:

$$h_0(n_{\perp} - n_{\parallel})_{quartz} + h_1(n_{\perp} - n_{\parallel})_{tiff} \gg l_{coh} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \approx 100 \text{ мкм.}$$

Таким образом, на выходе пары пластинок  $h_0, h_1$  компоненты с ортогональными поляризациями складывались со случайной фазой, что и приводило к смешанному состоянию.

Второе требование обеспечивалось путем использования набора фазовых пластин с толщинами  $h_2 = 441.1$  мкм,  $h_3 = 312.7$  мкм. Для этих пластин были рассчитаны углы, соответствующие проекциям на необходимые состояния для трех протоколов J4, S6 и R4.

В протоколе В36 использовалась близкая к оптимальной по качеству восстановления фазовая пластинка ( $h_3 = 312.7$  мкм), число обусловленности для которой составляло  $K = 2.7$ .

Последнее требование было выполнено с помощью использования однофотонного детектора на основе лавинного фотодиода с оптоволоконным входом и внутренним формирователем строба [19]. При этом полное число регистрируемых событий варьировалось путем изменения частоты запуска детектора при фиксированной длительности строба 10 нс.

## 6. РАСЧЕТ ПРИГОТАВЛИВАЕМОГО СМЕШАННОГО СОСТОЯНИЯ

Для количественного изучения точности квантовой томографии нам необходимо рассчитать матрицу плотности приготавливаемого в эксперименте смешанного состояния. Этому вопросу посвящен настоящий раздел. Необходимые расчеты выполнены путем численного моделирования схемы эксперимента.

Разобьем спектр частот исходного излучения на достаточно малые участки и представим поляризационное состояние кубита в виде суммы состояний, отвечающих различным частотам в спектре:

$$|\Psi\rangle = \sum_k a_k |\Phi(\omega_k)\rangle, \quad (22)$$

где

$$|\Phi(\omega_k)\rangle = c_1(\omega_k)|H\rangle + c_2(\omega_k)|V\rangle,$$

а амплитуды  $a_k$  определяются формой спектра состояния, на котором реализован поляризационный кубит. Именно учет спектральной зависимости амплитуд  $c_{1,2}$  в (22) позволяет перейти к смешанному поляризационному состоянию. Матрица плотности состояния до его прохождения через оптические элементы имеет вид

$$\rho^{in} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{k,j} a_k a_j^* |\Phi(\omega_k)\rangle\langle\Phi(\omega_j)|. \quad (23)$$

Следующий шаг моделирования включает в себя расчет действия оптических пластинок на состояние кубита. Фазовая пластинка преобразует поляризационную матрицу плотности исходного состояния по правилу  $\rho' = G(\omega_k)\rho^{in}G^+(\omega_k)$ , где матрица

$$G(\omega_k) = \begin{pmatrix} t_k & r_k \\ -r_k^* & t_k^* \end{pmatrix} \quad (24)$$

зависит от эффективных (комплексных) коэффициентов отражения и пропускания  $r_k = i \sin \delta_k \sin(2\alpha)$ ,  $t_k = \cos \delta_k + i \sin \delta_k \cos(2\alpha)$ . Здесь

$$\delta_k = \frac{\pi(n_e^k - n_o^k)h}{\lambda_k}$$

— оптическая толщина пластины,  $\alpha$  — угол между оптической осью пластины и вертикалью, а индекс  $k$  отвечает за преобразование на определенной частоте. Для каждого частотного слагаемого в (23) найдем преобразованное поляризационное состояние кубита при помощи (24). Поскольку измерительная часть установки не различает частотные моды, теоретическое смешанное поляризационное состояние

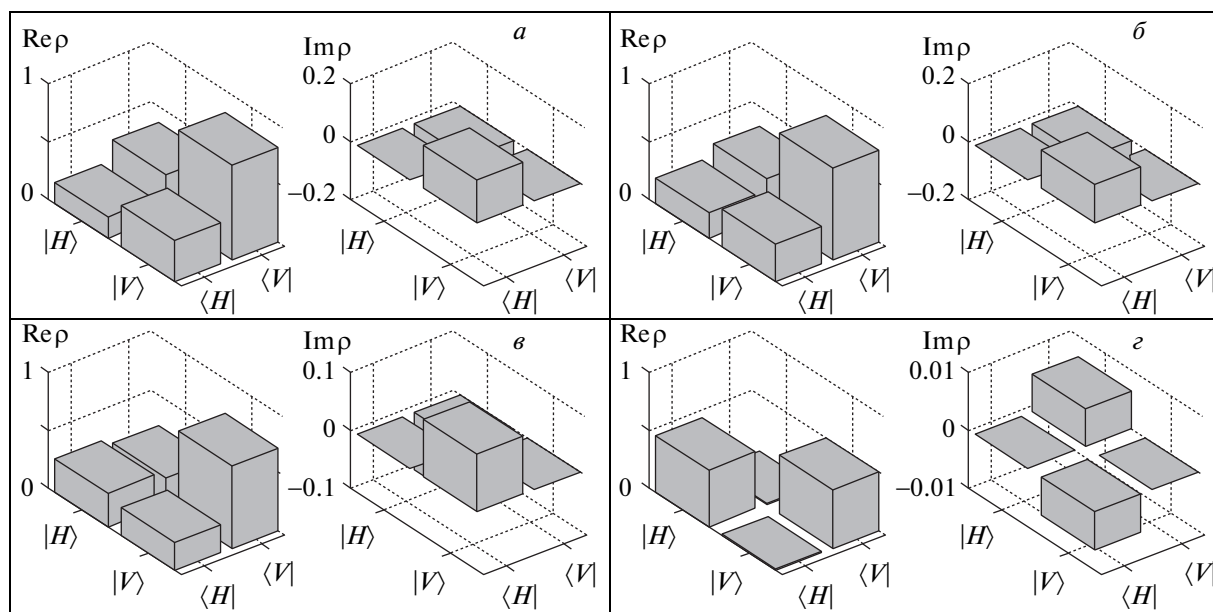


Рис. 2. Теоретические распределения компонент для действительной и мнимой частей матрицы плотности для состояний с разной степенью чистоты. Спектральная ширина излучения на входе поляризационных преобразователей составляет 1.6 (а), 7 (б), 13 (в), 22 (г) нм. Распределения г отвечают практически полностью смешанному состоянию

будет описываться матрицей плотности, редуцированной по частотам — путем взятия частичного следа. Эта матрица плотности, очевидно, имеет вид

$$\rho = \sum_k |a_k|^2 G(\omega_k) |\Phi(\omega_k)\rangle \langle \Phi(\omega_k)| G^+(\omega_k). \quad (25)$$

На рис. 2 представлены рассчитанные теоретические матрицы плотности при разных спектральных ширинах излучения. Соответствующие матрицы плотности получались интегрированием выражения (25) с распределением весов  $|a_k|^2$  в виде функции  $\text{sinc}^2 x$ . С увеличением ширины спектра недиагональные компоненты, отвечающие за корреляцию, затухают и состояние становится максимально смешанным.

### 7. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯ, БЛИЗКОГО К ЧИСТОМУ СОСТОЯНИЮ

Как уже отмечалось выше, наиболее трудными для восстановления являются смешанные состояния, близкие к чистым. Со статистической точки зрения проблема заключается в следующем. Малость весов состояний, добавляющихся к исходному чистому состоянию, приводит только к малому изменению статистических данных, в результате количество новой информации, возникающей в квантовых

измерениях, оказывается недостаточным для оценки возросшего числа параметров распределения. Заметим, что для рассматриваемого здесь простейшего случая однокубитовых состояний при переходе от модели чистого состояния к модели смеси число степеней свободы увеличивается с двух до трех.

В предельном случае бесконечно малой «засоренности» состояния имеет место ситуация, когда чистое состояние восстанавливается на основе модели смеси. В этом случае мы имеем явно неадекватную модель квантовой томографии. Однако именно такого рода модели широко используются как в реальных [4], так и в численных экспериментах [17]. В настоящем разделе мы увидим, что использование подобного рода неадекватных моделей приводит к резкому уменьшению точности статистического восстановления квантовых состояний. Фактически оказывается, что асимптотически с увеличением объема выборки  $n$  потери точности ведут себя как  $1/\sqrt{n}$  для неадекватной модели (в то же время для адекватной модели соответствующая зависимость имеет вид  $1/n$ ).

Будем исходить из следующей модели однокубитового состояния, близкого к чистому состоянию:

$$\rho = (1 - p)\rho^{(0)} + p\rho^{(1)}. \quad (26)$$

Здесь  $p$  — малый вес, описывающий засоренность



чистого состояния ( $p \ll 1$ ),  $\rho^{(0)}$  — исходное чистое однокубитовое состояние (некоторая точка на сфере Блоха),  $\rho^{(1)}$  — состояние, ортогональное исходному (противоположная относительно центра точка на сфере Блоха).

Для каждой строки протокола измерений  $j = 1, 2, \dots, m$  состояниям  $\rho^{(0)}$  и  $\rho^{(1)}$  отвечают интенсивности генерации событий соответственно  $\lambda_j^{(0)}$  и  $\lambda_j^{(1)}$ . Тогда суммарная интенсивность генерации событий есть

$$\lambda_j = (1 - p)\lambda_j^{(0)} + p\lambda_j^{(1)}. \quad (27)$$

В соответствии с теорией статистических оценок [20] введем информацию Фишера, связанную с параметром засоренности  $p$ :

$$I_F = \sum_{j=1}^m \frac{t_j (\lambda_j^{(1)} - \lambda_j^{(0)})^2}{(1 - p)\lambda_j^{(0)} + p\lambda_j^{(1)}}. \quad (28)$$

В предельном случае  $p \rightarrow 0$  получим

$$I_F = \sum_{j=1}^m \frac{t_j (\lambda_j^{(1)} - \lambda_j^{(0)})^2}{\lambda_j^{(0)}}. \quad (29)$$

В силу асимптотической эффективности оценок максимального правдоподобия получаем для оценки засоренности  $\hat{p}$  асимптотическое нормальное распределение со средним, равным истинной засоренности  $p$ , и дисперсией  $\sigma^2 = 1/I_F$ :

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sigma^2 = \frac{1}{I_F}\right). \quad (30)$$

В силу положительной определенности матрицы плотности физический смысл имеют только неотрицательные значения засоренности  $\hat{p}$ . Заметим, что оценки максимального правдоподобия удовлетворяют условию положительной определенности автоматически.

Информация Фишера (28), (29) пропорциональна суммарному объему выборки,  $I_F \propto n$ , поэтому в предельном случае  $p \rightarrow 0$  из (30) получаем, что в 50% случаев возникает нефизическая (кажущаяся) засоренность  $\hat{p}$ , уровень которой пропорционален  $1/\sqrt{n}$ . Вектор  $d_j$  ( $j = 1, 2, \dots, v$ ), определяющий распределение потерь точности (19), представим в виде

$$d_j = \frac{d_j^{(0)}}{n}, \quad (31)$$

где  $d_j^{(0)}$  — вектор, не зависящий от объема выборки.

В модели чистого состояния вектор  $d_j^{(0)}$  имеет две компоненты  $(d_1^{(0)}, d_2^{(0)})$ , а в модели смешанного

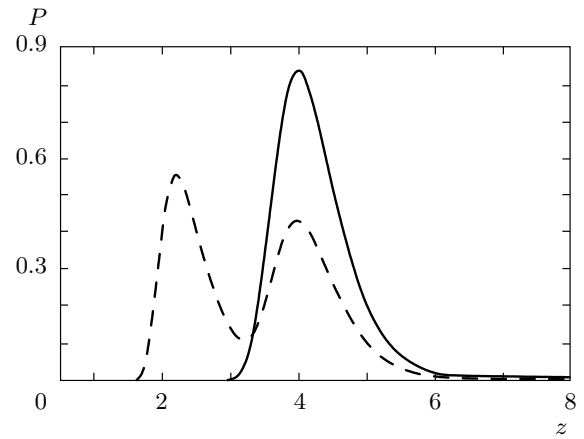


Рис. 3. Распределение  $P(z)$  числа девяток в записи вероятности совпадения  $F$ . Сплошная линия — адекватная модель чистого состояния, штриховая — неадекватная модель смешанного состояния

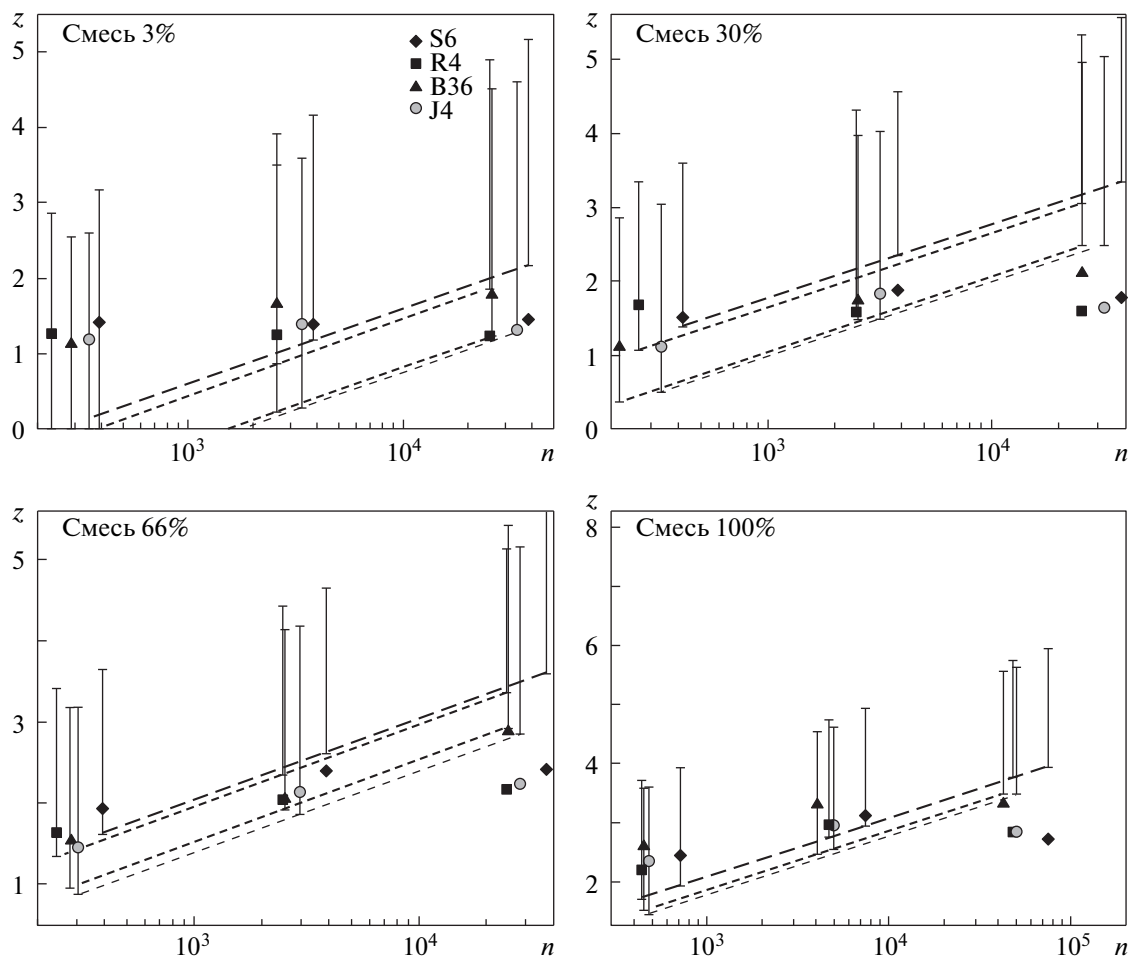
состояния — три  $(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, d_3^{(0)})$ . В условиях, когда засоренность  $p$  мала, первые две компоненты не меняются при переходе от чистого состояния к смешанному (и имеют значения порядка единицы), но возникает третья (большая по величине) компонента  $d_3^{(0)} \gg 1$ . Фактически  $d_3^{(0)} \rightarrow \infty$  при  $p \rightarrow 0$ . Физически это означает, что соответствующие потери точности неограниченно растут.

Пусть теперь засоренность  $p$  имеет конечное значение (хотя и малое). Степень согласия между засоренным и исходным чистым состоянием есть  $F = 1 - p$ , поэтому засоренность  $p$  определяет соответствующие потери точности. При достаточно больших объемах выборки  $n$  средние статистические потери точности  $d_3^{(0)}/n$  станут ниже потерь, связанных с засоренностью  $p$ . Это, очевидно, соответствует условию

$$n > \frac{d_3^{(0)}}{p}. \quad (32)$$

Неравенство (32) определяет объем выборки, при котором выгодно (в среднем) исходить из модели смешанного состояния. В противном случае выгоднее просто игнорировать засоренность и исходить из модели чистого состояния.

Заметим, что приведенный вывод справедлив только при условии, что инструментальные ошибки в установке параметров протокола квантовой томографии малы по сравнению со статистическими флуктуациями. Известно, что качество томографического эксперимента можно характеризовать некоторым когерентным объемом выборки  $n_0$  [21, 22],



**Рис. 4.** Восстановление поляризационных состояний фотонов с разной степенью чистоты и при разном объеме статистических данных. Степень чистоты состояния характеризуется энтропией и задана в процентах. Вертикальные отрезки показывают 1%- и 99%-квантили для теоретического распределения  $F$ . Штриховые линии указывают нижний граничный уровень статистического распределения. Обозначения точек даны на рис. *a*

выше которого преобладают инструментальные погрешности, а ниже — статистические флуктуации. Таким образом, одновременно с (32) следует потребовать выполнение еще одного неравенства:

$$n_0 > \frac{d_3^{(0)}}{p}. \tag{33}$$

Если неравенство (33) не выполняется, то адекватная оценка засоренности квантового состояния становится невозможной при любом сколь угодно большом объеме выборки. В этом случае реальная засоренность квантового состояния не может быть измерена на фоне инструментальных ошибок.

Полученные результаты иллюстрируются на рис. 3, на котором приводится сравнение адекват-

ной чистой и неадекватной смешанной моделей. Рисунок показывает распределение  $P(z)$  числа девяток в  $F$ , где  $z = -\lg(1 - F)$ . Например, если  $F = 0.99$ , то  $z = 2$ . Рисунок отвечает состоянию с координатами  $\theta = 0.71796\pi$  и  $\varphi = 0.12594\pi$  на сфере Блоха, приготавливаемому в настоящем эксперименте. Моделирование выполнено для протокола S6 и ожидаемого объема выборки  $n = 10^4$ . Мы видим, что точность неадекватной модели только порядка двух девяток ( $F \approx 0.99$ ), а точность адекватной модели — порядка четырех девяток ( $F \approx 0.9999$ ).

Заметим, что результаты моделирования для всех исследованных протоколов полностью согласуются с результатами реальных и численных экспериментов.

## 8. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ВЫВОДЫ

В эксперименте приготавливались и восстанавливались четыре поляризационных состояния фотонов с разной степенью чистоты. Заданный набор состояний восстанавливался протоколами J4, S6, R4 и B36. Для каждого из протоколов измерения проводились при различных объемах выборки. Степень чистоты состояния характеризуется энтропией

$$S = - \sum_{n=1}^2 \lambda_n \log_2 \lambda_n,$$

где  $\lambda_n$  — собственные значения матрицы плотности. Результаты измерений представлены на рис. 4.

Для каждого из рассмотренных протоколов были построены теоретические распределения  $F$  на уровнях 1 %- и 99 %-квантилях. Экспериментальные значения нанесены точками. Штриховые линии, соединяющие 1 %-квантили, показывают нижнюю границу теоретического распределения  $F$ . Высота линии зависит от типа протокола: линия находится тем ниже, чем больше число обусловленности и функция потерь.

Видно, что при небольшом объеме выборки статистические ошибки преобладают над инструментальными. При объеме выборки 2000–3000 экспериментальные точки перестают попадать в область теоретического распределения. Это означает, что для данного протокола достигнут когерентный объем выборки, при котором уровень статистических ошибок становится достаточно малым и основную роль начинают играть инструментальные ошибки (точность выставления углов, толщины фазовых пластин и т. д.). Дальнейшее увеличение статистики при этом не приводит к улучшению качества восстановления квантового состояния. Однако сравнение экспериментального результата с теоретическим распределением при этом может служить точным средством для юстировки установки, контроля стабильности работы, обнаружения постороннего вмешательства в квантовую систему и т. д.

Из всех четырех протоколов следует отметить протокол B36. В среднем точность восстановления произвольных состояний этого протокола выше. В первую очередь это связано с большим числом измерений, что позволяет не только проверить адекватность, но и отследить грубые ошибки в установках параметров и данных. Также этот протокол более прост в реализации, так как используется только одна пластинка, и нет необходимости в расчетах конкретных проекционных состояний.

На рис. 4 видно, что точность восстановления возрастает с увеличением степени смешанности состояния: для состояния, близкого к чистому (смесь 3 %), точность восстановления составляет примерно  $F = 0.93$ – $0.94$ ; наилучшая точность достигается для максимально смешанных состояний, отвечающих центру сферы Блоха,  $F > 0.99$ . В центре сферы Блоха соответствующие значения функции потерь (21) для протоколов, сводящихся к разложению единицы, оказываются равными  $L_{R4} = L_{S6} \approx 2.25$ , а для двух остальных —  $L_{J4} \approx 3.5$ ,  $L_{B36} \approx 3.2$ . Приведенные теоретические оценки вполне согласуются с результатами численных и реальных экспериментов.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе методологии оценки полноты, адекватности и точности протоколов квантовой томографии в работе проведено исследование смешанных состояний поляризационных кубитов. Для квантовых состояний с различной степенью чистоты продемонстрировано хорошее соответствие между результатами физических экспериментов и результатами математического моделирования.

Отдельно рассмотрен случай восстановления смешанных состояний, близких к чистым состояниям. Показано, что при недостаточном наборе статистических данных модель может становиться неадекватной, что приводит к резкому уменьшению точности статистического восстановления квантовых состояний.

Развитый в работе подход может быть легко обобщен на произвольные протоколы статистического восстановления квантовых состояний любой конечной размерности гильбертова пространства.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (Роснаука), Госконтракт 02.740.11.0223, РФФИ (гранты №№ 10-02-00414-а, 08-02-00741-а, 08-07-00481-а), а также Программы Президиума РАН по фундаментальным исследованиям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000), pp. 105–159.
2. J. B. Altepeter, E. R. Jeffrey, and P. G. Kwiat, *Adv. Atom. Mol. Opt. Phys.* **52**, 107, ed. by P. Berman and C. Lin (2005).

3. A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 050402 (2001); A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini, Phys. Rev. A **70**, 053821 (2004); A. Allevi, A. Andreoni, M. Bondani et al., Phys. Rev. A **80**, 022114 (2009); G. Zambra, A. Andreoni, M. Bondani et al., Phys. Rev. Lett. **95**, 063602 (2005).
4. D. F. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro et al., Phys. Rev. A **64**, 052312 (2001).
5. D. A. Kalashnikov, V. P. Karassiov, K. G. Katamadze et al., Adv. Sci. Lett. **2**, 430 (2009).
6. Д. А. Калашников, К. Г. Катамадзе, С. П. Кулик, Письма в ЖЭТФ **89**, 264 (2009).
7. Ю. И. Богданов, С. П. Кулик, Е. В. Морева и др., Письма в ЖЭТФ **91**, 755 (2010).
8. Yu. I. Bogdanov, G. Brida, M. Genovese et al., Phys. Rev. Lett. **105**, 010404 (2010).
9. А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, Ин-т комп. исслед., Москва–Ижевск (2003).
10. R. Kress, *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York (1998).
11. В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин, *Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ*, БХВ-Петербург, Санкт-Петербург (2006).
12. Yu. I. Bogdanov, A. Yu. Bogdanov, S. A. Nuianzin et al., Quantum Computers and Computing **8**, 5 (2008); arXiv:quant-ph/0812.4808.
13. Ю. И. Богданов, ЖЭТФ **135**, 1068 (2009).
14. A. Uhlmann, Phys. Rev. A **62**, 032307 (2000); arXiv:quant-ph/9909060.
15. J. Rehacek, B.-G. Englert, and D. Kaszlikowski, Phys. Rev. A **64**, 052312 (2001).
16. J. Rehacek, B.-G. Englert, and D. Kaszlikowski, Phys. Rev. A **70**, 052321 (2004).
17. N. D. de Burgh, N. K. Langford, A. C. Doherty et al., Phys. Rev. A **78**, 052122 (2008).
18. Ю. И. Богданов, И. Д. Букеев, А. К. Гавриченко, Опт. и спектр. **111**, № 4 (2011).
19. С. Н. Молотков, С. П. Кулик, А. И. Климов, *Устройство для регистрации слабых оптических импульсов*, Патент РФ № 2339919 от 15.06.2007.
20. А. В. Крянев, Г. В. Лукин, *Математические методы обработки неопределенных данных*, Физматлит, Москва (2003).
21. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, L. A. Krivitsky et al., Phys. Rev. A **70**, 042303 (2004).
22. Ю. И. Богданов, Р. Ф. Галеев, С. П. Кулик и др., Опт. и спектр. **103**, 112 (2007).