ЖЭТФ, 2011, том 140, вып. 2 (8), стр. 263–267

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОПРАВКИ К ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ ВЫРОЖДЕННОГО НЕЙТРОННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. В. Скобелев *

Московский государственный индустриальный университет
115280, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 декабря 2010 г.

Найдены температурные поправки к основным термодинамическим функциям, вычисленным в нашей работе [1], для вырожденного нейтронного газа в магнитном поле с учетом аномального магнитного момента нейтрона. Вычислены также теплоемкость и энтропия вырожденного нейтронного газа, и температурная поправка к магнитной восприимчивости. Приводится дополнительная аргументация существования эффекта увеличения частоты импульсов пульсаров, на что было указано в работе [1], результаты которой мы здесь уточняем.

1. ВВЕДЕНИЕ

В нашей предыдущей работе [1], имея в виду простейшую модель нейтронной звезды Оппенгеймера – Волкова [2], мы обобщили эту модель в приближении однородной и постоянной плотности на случай полностью вырожденного нейтронного газа, находящегося в магнитном поле, и вычислили основные термодинамические функции в нулевом приближении по температуре: химический потенциал μ_{ch} (т. е. энергию Ферми $E_F = \mu_{ch}|_{T=0}$), парциальные спиновые концентрации $n_{(\pm)}$, давление P, объемную плотность энергии U в зависимости от величины внешнего магнитного поля B и концентрации нейтронов $n = n_{(+)} + n_{(-)}$. В действительности же в «старых» магнитных нейтронных звездах (магнитарах) нейтронный газ вырожден лишь частично [3], и поэтому представляет интерес найти температурные поправки к перечисленным функциям.

Как и в работе [1], исходим из общих интегральных соотношений статистики Ферми – Дирака:

$$n = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty (f_+ + f_-) p^2 dp, \tag{1a}$$

$$P = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{3} \int\limits_0^\infty (f_+ + f_-) \frac{p^2}{m} p^2 dp, \tag{1b}$$

$$U = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty (f_+\varepsilon_+ + f_-\varepsilon_-) p^2 dp. \tag{1c}$$

Здесь введены обозначения:

$$f_\pm = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_\pm - \mu_{ch}}{T}\right) + 1\right]^{-1} \tag{2a}$$

— функция распределения, соответствующая различным значениям энергии при ориентации спина и аномального магнитного момента нейтрона,

$$\begin{gathered} \varepsilon_\pm = \frac{p^2}{2m} \pm |\lambda|, \\ \lambda = \mu B, \quad \mu = \sigma\mu_n, \\ \sigma = -1.9, \quad \mu_n = \frac{e}{2m_p}. \end{gathered} \tag{2b}$$

Используемое в работе [1] и в данной работе нерелятивистское приближение при принятом значении концентрации для оценок вполне оправдано, поскольку импульс Ферми примерно в три раза меньше массы нейтрона. Основным следствием уравнения (1a) является полученное в работе [1] соотношение, которое мы перепишем в более компактных обозначениях, применяемых далее в данной работе:

$$\frac{1}{2}(y_+^{3/2} + y_-^{3/2}) = 1,$$

$$y_\pm = y \pm x,$$

*E-mail: v.skobelev@inbox.ru

$$x = \frac{|\lambda|}{E_F^{(0)}}, \quad y = \frac{E_F}{E_F^{(0)}},$$

где $E_F^{(0)} = (3\pi^2 n)^{2/3}/2m$ — энергия Ферми в отсутствие магнитного поля. Отметим, что при плотности порядка ядерной в ядре нейтронной звезды $E_F^{(0)} \sim 40$ МэВ (в работе [1] приведена неточная оценка $E_F^{(0)} \sim 10$ МэВ), а уравнение в неявном виде определяет зависимость $y(x)$, т. е. фактически зависимость энергии Ферми от величины поля и концентрации. График этой функции приведен в работе [1]. Аналогично численно могут быть рассчитаны зависимости $P(x)$, $U(x)$ [1].

В разд. 2 мы находим температурные поправки к этим термодинамическим функциям, а также к магнитной восприимчивости χ вырожденного нейтронного газа. Кроме того, температурные поправки к давлению и плотности энергии позволяют определить теплоемкость C и энтропию S вырожденного нейтронного газа в магнитном поле (разд. 3). В разд. 4 мы обсуждаем полученные результаты.

2. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОПРАВКИ К ОСНОВНЫМ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Для определения поправок воспользуемся асимптотическим рядом по температуре [4]:

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\varepsilon\, f(\varepsilon)}{\exp\dfrac{\varepsilon-\mu}{T}+1} = \int\limits_0^\mu f(\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}T^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360}T^4 f'''(\mu) + \ldots, \quad (3)$$

$$\mu/T \gg 1, \quad (3a)$$

причем нам понадобятся только два первых члена ряда, как и в большинстве других случаев [4]. Как следует из формул (1), (2), в нашем случае условие (3a) имеет вид

$$(\mu_{ch} \pm |\lambda|)/T \gg 1, \quad (4a)$$

или в безразмерных переменных

$$\tilde{T}/y_\pm \ll 1, \quad \tilde{T} = T/E_F^{(0)}. \quad (4b)$$

При реалистических значениях поля $B \lesssim 10^{17}$ Гс [5] имеем $y_\pm \approx 1$ [1], поэтому условием применимости нашего асимптотического разложения является неравенство

$$\tilde{T} \ll 1, \quad (5)$$

которое действительно имеет место в «старых» нейтронных звездах, если учесть, что $E_F^{(0)} \sim 40$ МэВ, а $T \sim 1$ МэВ.

Вычисление температурных поправок по формулам (1)–(3) не вызывает особых трудностей. Отметим лишь, что вклад в поправочный член, пропорциональный T^2 дает и первое слагаемое в правой части формулы (3) с учетом разложения химического потенциала

$$\mu_T \approx \mu_0 + \mu_2 + \ldots, \quad \mu_0 \equiv E_F, \quad \mu_2 \propto T^2. \quad (6)$$

Индекс «ch» у символа химического потенциала здесь и далее опускаем, поскольку его отсутствие уже не может привести к недоразумениям, связанным с таким же обозначением аномального магнитного момента нейтрона (последний в дальнейших выкладках явно не фигурирует). Опуская подробности вычислений, приведем окончательные результаты для температурных поправок к основным термодинамическим функциям:

$$\mu_T = E_F\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\tilde{T}^2\varphi_\mu\right), \quad (7a)$$

$$\varphi_\mu = \left(y\sqrt{y_+y_-}\right)^{-1}, \quad (7b)$$

$$n_{(\pm)T} = \frac{n_{(\pm)}}{2}\left(1 \pm \frac{\pi^2}{8}\tilde{T}^2\varphi_n\right), \quad (8a)$$

$$\varphi_n = \left(y_-^{-1/2} - y_+^{-1/2}\right) y_\mp^{-3/2}, \quad (8b)$$

$$P_T = P\left(1 + \frac{5\pi^2}{8}\tilde{T}^2\varphi_P\right), \quad (9a)$$

$$\varphi_P = \left[\sqrt{y_+} + \sqrt{y_-} - \frac{y_+^{3/2} + y_-^{3/2}}{3\sqrt{y_+y_-}}\right] \times \left(y_+^{5/2} + y_-^{5/2}\right)^{-1}, \quad (9b)$$

$$U_T = U\left(1 + \frac{\pi^2}{12}\tilde{T}^2\varphi_U\right), \quad (10a)$$

$$\varphi_U = \left(\sqrt{y_+} + \sqrt{y_-}\right) \times \left\{\frac{1}{5}\left(y_+^{5/2} + y_-^{5/2}\right) + \frac{x}{3}\left(y_-^{3/2} - y_+^{3/2}\right)\right\}^{-1}. \quad (10b)$$

Для дальнейшего рассмотрения (разд. 3) существенно также, что второе слагаемое в квадратных скобках формулы (9b) соответствует вкладу μ_2 в квадратичную поправку по температуре при разложении первого слагаемого в (3) в ряд по температуре. Величины E_F, $n_{(\pm)}$, P, U являются характеристиками полностью вырожденного ($T = 0$) нейтронного газа в магнитном поле [1], а функции φ с учетом численных расчетов [1] фактически зависят от одного безразмерного полевого параметра x. В интервале возможных значений $0 \le B \lesssim 10^{17}$ Гс, что соответствует значениям $0 \le x \lesssim 6 \cdot 10^{-2}$, имеем

$$\varphi_\mu \approx 1.0, \quad \varphi_n \approx 0.0, \quad \varphi_P \approx 0.66, \quad \varphi_U \approx 5. \qquad (11)$$

Стоит отметить, что в отсутствие магнитного поля ($x = 0$) $\varphi_n = 0$ и квадратичная температурная поправка в формуле (8a) исчезает.

С использованием формул (8a), (8b) легко найти температурную поправку к магнитной восприимчивости χ в вырожденном нейтронном газе. Именно, из формул (8a), (8b) получаем (см. также [1]) разложением в ряд по $x \ll 1$:

$$n_{(-)T} - n_{(+)T} = \frac{3n}{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\tilde{T}^2\right)x. \qquad (12a)$$

Согласно формуле (12) работы [1] это означает, что

$$\chi = \chi_{weak}\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\tilde{T}^2\right), \qquad (12b)$$

где χ_{weak} — это классический результат Паули в достаточно слабом магнитном поле (применительно к нейтронам в условиях нейтронных звезд $B \ll B_{max} \approx 5.6 \cdot 10^{18}$ Гс, в работе [1] дана неточная оценка $B_{max} \sim 10^{18}$ Гс), приведенный в книге [4] (другим способом он попутно получен в нашей работе [1]). Результат (12b) согласуется со здравым смыслом — с ростом температуры намагниченность должна убывать.

Отметим также, что в отсутствие магнитного поля ($x = 0$, $y = 1$) значения μ_T, P_T, U_T совпадают с классическими, приведенными в книге [4].

3. ТЕПЛОЕМКОСТЬ И ЭНТРОПИЯ ВЫРОЖДЕННОГО НЕЙТРОННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Теплоемкость C и энтропия S, отнесенные к единице объема, как термодинамические функции, в принципе отличаются от предыдущих, так как равны нулю при $T = 0$ (см. ниже). По этой причине [4] теплоемкости C_P и C_V совпадают и равны

$$C = \frac{dU_T}{dT}.$$

С использованием формулы (10a) получаем

$$C = \frac{\pi^2}{12}\tilde{T}\frac{U}{E_F^{(0)}}\varphi_U. \qquad (13)$$

В отсутствие поля ($x = 0$) $\varphi_U = 5$ и с учетом значения U [1] результат совпадает с приведенным в книге [4].

Значение энтропии проще вычислить через Ω — потенциал нейтронного газа:

$$S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{\mu,V}. \qquad (14a)$$

Поскольку

$$\Omega = -P_T V, \qquad (14b)$$

в пересчете на единицу объема имеем

$$S = \left(\frac{\partial P_T}{\partial T}\right)_{\mu,V}. \qquad (15a)$$

Заметим также, что другое дифференциальное соотношение для Ω-потенциала [4]

$$N = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{V,T}$$

для случая нулевой температуры и в пересчете на единицу объема записывается с учетом (14b) в виде

$$n = \left(\frac{\partial P}{\partial E_F}\right)_V.$$

Найденные в работе [1] выражения для n и P в магнитном поле удовлетворяют этому равенству.

При подстановке P_T в (15a) из формул (9a), (9b) следует учесть, что второе слагаемое в квадратных скобках в (9b) вклада в (15a) не дает, поскольку оно соответствует учету μ_2 в квадратичной поправке по температуре в P_T, а производная в (15a) берется при постоянном μ. Получаем с учетом значения P [1] выражение

$$S = \frac{5\pi^2}{8}\frac{P_0 T}{E_F^{(0)2}}\left(\sqrt{y_+} + \sqrt{y_-}\right), \qquad (15b)$$

где

$$P_0 = \frac{2(2m)^{3/2}E_F^{(0)5/2}}{15\pi^2}$$

— давление при $T = 0$ в отсутствие поля. При $B = 0$ ($x = 0$) выражение (15b) переходит в известную формулу для величины S_0 [4], используя которую удобно записать это выражение в виде

$$S = S_0\frac{1}{2}\left(\sqrt{y_+} + \sqrt{y_-}\right). \qquad (15c)$$

Отметим, что с учетом вида U [1] выражение для теплоемкости (13) формально совпадает с энтропией (15b), как это имеет место и в отсутствие магнитного поля [4].

Уравнения (10a), (15b) определяют также значение свободной энергии единицы объема:

$$F_T = U_T - TS.$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Физические следствия, обусловленные изменением энтропии, играют важную роль в эволюции звезд [6]. При обсуждении результатов мы исходим из этого обстоятельства.

Для удобства запишем выражение (15c) в пересчете на единицу массы (соответствующая энтропия получается делением выражения (15b) на плотность $\rho = nm$):

$$S = S_0 \left(\frac{n_0}{n}\right)^{2/3} \frac{1}{2} \left(\sqrt{y_+} + \sqrt{y_-}\right). \tag{15d}$$

Здесь S и n — энтропия и концентрация в магнитном поле, а S_0 и n_0 — в его отсутствие и при той же температуре, причем в обозначениях работы [1] (см. также далее в этом разделе)

$$\frac{n_0}{n} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \approx (\varepsilon_P + \varepsilon_B)^{3/2},$$

так что

$$S = S_0 f(B), \tag{15e}$$

$$f(B) = (\varepsilon_P + \varepsilon_B) \frac{1}{2} \left(\sqrt{y_+} + \sqrt{y_-}\right).$$

Из анализа зависимости $y(x)$ [1], задаваемой в неявном виде, а также из вида величин ε_P, ε_B следует, что зависящий от поля фактор $f(B)$ меняется от значения, приблизительно равного 1.1, при $B \sim 10^{17}$ Гс до 1 при $B = 0$. Таким образом, энтропия (15d), (15e) и энтропия нейтронной компоненты звезды при исчезновении сверхсильного ($\sim 10^{17}$ Гс) магнитного поля уменьшается на десятые доли. При меньшей величине «начального» поля уменьшение также меньше. При анализе следует учесть и вклад в энтропию самого магнитного поля. Из общих соображений ясно, что его вклад ΔS_B в изменение энтропии звезды положителен, поскольку, очевидно, энергия магнитного поля U_B частично превращается в теплоту. Оценки показывают, что $\Delta S_B > S - S_0$ (15e), так что суммарная энтропия звезды увеличивается. Возрастание энтропии при исчезновении магнитного поля имеет принципиальные последствия. Это означает, что токи, создающие магнитное поле, должны со временем неизбежно затухать, даже если они циркулируют в сверхпроводящей среде. Уменьшение магнитного поля, в свою очередь, приведет к уменьшению равновесного радиуса [1] и момента инерции нейтронной звезды, т. е. к увеличению частоты следования импульсов в «старой» нейтронной звезде-пульсаре [1], а это можно зафиксировать в процессе наблюдения излучения пульсаров в течение достаточно длительного промежутка времени. Конкурирующим эффектом уменьшения давления (9a) и радиуса вследствие охлаждения «старых» нейтронных звезд можно пренебречь, так как $\tilde{T} \ll 1$. Эта аргументация увеличивает перспективы наблюдения обсуждавшегося в работе [1] эффекта увеличения частоты импульсов пульсаров. Из результатов работы [1] следует, например, что момент инерции магнитной нейтронной звезды равен

$$\begin{gathered} I \approx (\varepsilon_P + \varepsilon_B) I_0, \\ \varepsilon_P = P/P_0, \quad \varepsilon_B = P_B/P_0, \end{gathered} \tag{16}$$

где I_0 — момент инерции нейтронной звезды в отсутствие магнитного поля, P — давление нейтронной компоненты в магнитном поле, P_B — давление самого магнитного поля, P_0 — давление вырожденного нейтронного газа в отсутствие магнитного поля (температурные поправки в данном случае не играют роли, так как $P_T \sim P$). Значения давлений в формуле (16) относятся к центральной области звезды (в работе [1] это важное обстоятельство не было отмечено). Как можно оценить, $P_B \sim P_0$ лишь при $B \sim 10^{19}$ Гс[1)], что на два порядка превосходит считающееся допустимым верхнее значение поля. По-видимому, это нереализуемо, и при $B \sim 10^{17}$ Гс основной вклад в (16) дает ε_P, т. е. давление нейтронного газа в магнитном поле. Из соответствующих выражений и графиков [1] можно оценить, что I будет превосходить I_0 на десятые доли и настолько же увеличится частота следования импульсов при исчезновении магнитного поля. Разумеется, этот процесс может длиться тысячи и миллионы лет, однако и за реальное время наблюдений эффект может быть заметен.

Стоит также отметить, что при наличии эффекта увеличения частоты импульсов измерение «скорости изменения» частоты или величины отношения ω_0/ω, где ω — начальная частота, ω_0 — ее асимптотическое по времени значение при исчезновении магнитного поля, позволяет из равенства $\omega_0/\omega \approx \varepsilon_P + \varepsilon_B$ определить и величину магнитного поля в «начальный» момент времени. Таким образом, регистрация «нашего» эффекта может дать исчерпывающую информацию о величине сверхсильного магнитного поля пульсаров.

В заключение укажем на одно существенное обстоятельство, фактически ограничивающее область применимости формулы (16) и соответствующей формулы для равновесного радиуса R в магнитном поле [1]:

$$R = (\varepsilon_P + \varepsilon_B)^{1/2} R_0,$$

[1)] В работе [1] ошибочно было указано значение поля $B \sim 10^{17}$ Гс, так что соответствующий вывод этой работы некорректен.

где R_0 — радиус в отсутствие магнитного поля. Именно, выражения физических величин в работе [1] и в данной работе (кроме формулы (15d)) при разных значениях магнитного поля содержат одинаковую концентрацию n (и, следовательно, плотность ρ). Однако, если иметь в виду процесс сжатия одной и той же звезды при уменьшении магнитного поля, то концентрация возрастает: $n \to n + \Delta n$. Положение можно спасти, если учесть то обстоятельство, что основные формулы зависят от n через выражение энергии Ферми $E_F^{(0)}$ в отсутствие магнитного поля, с помощью которого приводятся к безразмерному виду энергия Ферми E_F в магнитном поле и полевой параметр $|\lambda|$. Даже при $\Delta n \approx n$ имеем P, $P_B \sim P_0$, $E_F^{(0)} \to 1.6 E_F^{(0)}$ и численные расчеты, аналогичные проведенным в работе [1], показывают весьма слабую зависимость результатов от концентрации n, следовательно, наши оценки существенно не меняются. Строго говоря, они являются точными, если

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1.$$

Учитывая, что

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 3\frac{\Delta R}{R},$$

а также выражение для радиуса R и вид $\Delta R = R - R_0$ получаем, что должно выполняться условие, ограничивающее поле:

$$3\frac{(\varepsilon_P + \varepsilon_B)^{1/2} - 1}{(\varepsilon_P + \varepsilon_B)^{1/2}} \ll 1. \tag{17}$$

Оно заведомо имеет место для значений поля, меньших по порядку 10^{17} Гс, но все же, по-видимому, является излишне жестким, поскольку даже при $B \sim 10^{17}$ Гс ($\Delta n \approx n$), когда левая часть соотношения (17) имеет порядок единицы, наши оценки, как уже отмечалось, все же вполне корректны.

Другое приближение состоит в том, что выражение (18) работы [1] для равновесного радиуса получено интегрированием уравнений (17a) и (17b) этой же работы в «нулевом приближении» однородной плотности порядка ядерной, которая, вообще говоря, уменьшается от центра к поверхности. По сравнению с оригинальной работой [2], в которой это изменение плотности учитывается, наши результаты в этом смысле являются менее общими. Все же вывод работы [1] и данной работы об увеличении частоты следования импульсов пульсаров остается в силе, хотя количественные оценки нуждаются в уточнении при дальнейшем развитии нашего метода вычислений.

Период радиопульсаров в целом медленно возрастает, что отчасти объясняется превращением вращательной энергии в излучение. Существуют, однако, кратковременные сбои с уменьшением периода («glitches»). Их длительность колеблется от нескольких часов [7] («short glitches», Vela pulsar), до нескольких месяцев [8] («slow glitches», pulsar B1 822-09). Традиционно это объясняют «звездотрясениями», т. е. перестройкой внутренней структуры звезды. По-видимому, это действительно так, поскольку процесс уменьшения периода за счет исчезновения магнитного поля был бы значительно более медленным, как уже отмечалось в тексте, и имеющим порядок характерного времени эволюции звезд. По крайней мере, это тысячи и миллионы лет. Тот факт, что «наш» эффект пока не обнаружен, можно отчасти объяснить именно его длительностью. Другое возможное объяснение состоит в том, что наличие сверхсильного магнитного поля порядка 10^{17} Гс в момент «первого измерения» периода и вообще — явление достаточно редкое. Можно лишь надеяться, что по мере увеличения базы наблюдательных данных эффект все же будет открыт. Скорее всего, это может произойти при наблюдении «старых» холодных нейтронных звезд-пульсаров, поскольку в «молодых» и горячих уменьшение радиуса и момента инерции, приводящее к уменьшению периода, может происходить в основном из-за их охлаждения.

Автор признателен И. Ф. Малову, который обратил его внимание на экспериментальные данные по изменению периода пульсаров.

Автор благодарит Н. А. Болячину и А. И. Быкова за техническую помощь при оформлении статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Скобелев, ЖЭТФ **138**, 1088 (2010); **139**, 1039 (2011).
2. J. Oppenheimer and G. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).
3. Debades Bandyopadhyay et al., Phys. Rev. D **58**, 121301 (1998).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Физматлит, Москва (2001).
5. R. C. Duncan and C. Tompson, Astrophys. J. **392**, L9 (1992).
6. K. Farouqi et al., arXiv:1002.2346v1 [astro-ph.SR]; K. Farouqi et al., Astrophys. J. **712**, 1359 (2010).
7. G. S. Flanagan, Nature **345**, 416 (1990).
8. T. V. Shabanova, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **346**, 1435 (2005).