

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВОЛН В СВЕРХРЕШЕТКАХ С ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*В. А. Игнатченко\*, Д. С. Цикалов*

*Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 11 мая 2010 г.

Исследована динамическая восприимчивость и одномерная плотность состояний в изначально синусоидальной сверхрешетке с одновременным присутствием двумерных фазовых неоднородностей, моделирующих коррелированные шероховатости интерфейсов сверхрешетки, и трехмерных амплитудных неоднородностей материала слоев сверхрешетки. В приближении Бурре найдено аналитическое выражение для усредненной функции Грина синусоидальной сверхрешетки с двумерными фазовыми неоднородностями. Показано, что эффект возрастания асимметрии величин пиков динамической восприимчивости на границе зоны Бриллюэна сверхрешетки, обнаруженный ранее [15] при увеличении среднеквадратичных флуктуаций двумерных неоднородностей, имеет место также при увеличении корреляционного волнового числа неоднородностей. Однако в этом случае происходит также сближение этих пиков и, соответственно, уменьшение ширины и глубины щели в плотности состояний. Показано, что рост среднеквадратичных флуктуаций трехмерных амплитудных неоднородностей в сверхрешетке, содержащей двумерные фазовые неоднородности, приводит к подавлению эффекта асимметрии динамической восприимчивости и к некоторому росту ширины щели в плотности состояний при уменьшении ее глубины. Постановка целенаправленных экспериментов по обнаружению исследованных в работе эффектов способствовала бы развитию радиоспектроскопических и оптических методов идентификации присутствия неоднородностей различных размерностей в мультислойных магнитных и оптических структурах.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последнего двадцатилетия интенсивно развивались теоретические исследования влияния неоднородностей геометрической структуры первоначально периодических сверхрешеток на спектральные свойства волн различной природы или электронных возбуждений, распространяющихся в таких средах. Для развития теории использовались в основном методы компьютерного моделирования. В этих работах, как правило, рассматривался одномерный ( $1D$ ) геометрический беспорядок, который моделировался либо нарушением периодичности в расположении слоев различных материалов, образующих сверхрешетки, либо случайными отклонениями толщин этих слоев. Развивались также и различные аналитические подходы. Метод функций Грина для исследования таких структур был использован в работах [1–3]. В работе [4] была предложена модель, которая позволила методом

усредненных функций Грина приближенно рассматривать геометрический  $1D$ -,  $2D$ - и  $3D$ -беспорядок в сверхрешетках с синусоидальным профилем зависимости материального параметра от координаты  $z$  в первоначальном состоянии (ось  $z$  предполагается направленной перпендикулярно плоскости слоев сверхрешетки). Неоднородности в такой сверхрешетке моделировались введением в гармоническую функцию случайной фазы  $u(\mathbf{x})$ , которая может быть функцией одной ( $\mathbf{x} = \{z\}$ ), двух ( $\mathbf{x} = \{x, y\}$ ) или трех ( $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ ) координат. В этой модели положение нулей гармонической функции моделирует положение границ (интерфейсов) между слоями сверхрешетки.  $1D$ -фаза  $u_1 = u_1(z)$  описывает случайные смещения этих интерфейсов от их первоначального периодического расположения (или, что то же самое, случайную толщину слоев сверхрешетки). Как  $2D$ -фаза  $u_2 = u_2(x, y)$ , так и  $3D$ -фаза  $u_3 = u_3(x, y, z)$  описывают случайную деформацию (шероховатость) интерфейсов в плоскости  $xy$ . При этом фазовые  $2D$ -неоднородности

\*E-mail: vignatc@iph.krasn.ru

моделируют деформации, идентичные для всех интерфейсов, так как такие неоднородности имеют бесконечный радиус корреляций вдоль оси  $z$ . Корреляционный радиус фазовых  $3D$ -неоднородностей конечен как в плоскости  $xy$ , так и вдоль оси  $z$ . В общем случае  $3D$ -неоднородности обладают анизотропными корреляционными свойствами и имеют различные корреляционные радиусы в плоскости  $xy$  и вдоль оси  $z$ . Поэтому такие неоднородности могут моделировать различные реальные ситуации. В частности, если корреляционный радиус фазовых  $3D$ -неоднородностей вдоль оси  $z$  много меньше толщины слоев сверхрешетки, шероховатости интерфейсов стохастически независимы уже на соседних слоях. В противоположном случае, если корреляционный радиус вдоль оси  $z$  больше толщины не только слоев, но и всей сверхрешетки, коррелированные шероховатости моделируются в нашей модели фазовыми  $2D$ -неоднородностями.

Единственной характеристикой, описывающей случайную среду, которая входит в выражение для усредненной функции Грина, является корреляционная функция  $K(\mathbf{r})$ , зависящая от расстояния  $\mathbf{r}$  между двумя точками среды:  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . Поэтому первая часть задачи сводится к нахождению функции  $K(\mathbf{r})$  для сверхрешетки, содержащей те или иные неоднородности, а вторая часть задачи заключается в извлечении стандартными приближенными методами спектральных характеристик из выражения для функции Грина, содержащей эту корреляционную функцию. Для нахождения корреляционной функции  $K(\mathbf{r})$  сверхрешетки в работе [4] был развит метод случайной пространственной модуляции (random spatial modulation, RSM), который является обобщением хорошо известного метода вычисления временной корреляционной функции для случайной частотной (фазовой) модуляции радиосигнала [5, 6] на случай пространственной (в общем случае трехмерной) модуляции периода сверхрешетки. Достоинством этого метода является то, что форма корреляционной функции  $K(\mathbf{r})$  в нем не постулируется, а выводится из наиболее общих допущений о характере случайной пространственной модуляции  $u = u(\mathbf{x})$  периода сверхрешетки. Было показано, что в общем случае вид функции  $K(\mathbf{r})$  существенно зависит от размерности неоднородностей и структуры интерфейсов между слоями.

В дальнейшем метод RSM был обобщен на сверхрешетки с прямоугольным профилем [7] и с произвольной толщиной интерфейсов [8]. В этом методе для вывода корреляционной функции  $K(\mathbf{r})$  необходимо постулировать форму корреляционной функ-

ции  $K_u(\mathbf{r})$  градиента функции  $u(\mathbf{x})$ . Полученные аналитические выражения для  $K(\mathbf{r})$  имеют сложный вид, существенно различный при разных  $K_u(\mathbf{r})$ . Однако оказалось, что асимптотика функции  $K(\mathbf{r})$  как для малых, так и для больших  $|\mathbf{r}|$  не зависит от формы функции  $K_u(\mathbf{r})$ , если последняя обладает достаточно быстрым спадом корреляций, например экспоненциальным или гауссовым. Было показано, что спектральные свойства волн определяются главным образом асимптотическими свойствами корреляционной функции  $K(\mathbf{r})$  сверхрешетки. Таким образом, развитый метод позволяет описывать геометрические неоднородности различной размерности в рамках единого подхода. Знание функции  $K(\mathbf{r})$  для различных типов сверхрешеток и различных размерностей неоднородностей позволило использовать метод усредненных функций Грина для изучения влияния фазовых  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей как изотропных, так и обладающих анизотропией корреляций, а также совместного влияния  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей как стохастически независимых, так и связанных кросскорреляциями между собой, на спектр, затухание и динамическую восприимчивость волн в сверхрешетках (см. [9] и цитированные там работы [21–27]).

Спектральные свойства сверхрешеток с фазовыми  $2D$ -неоднородностями изучены пока не столь детально. Модификация закона дисперсии и затухание волн в синусоидальной сверхрешетке, обусловленные  $2D$ -неоднородностями, были кратко рассмотрены в работе [4] в двухзонной модели. Было показано, что в этом случае, в отличие от  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей, затухание, обусловленное  $2D$ -неоднородностями, возникает только на ветви в спектре, соответствующей второй зоне Бриллюэна, в то время как частота первой зоны остается действительной. Следует отметить, что ситуация, описываемая фазовыми  $2D$ -неоднородностями не столь уж экзотична. На практике такая ситуация может реализоваться, например, когда шероховатости интерфейсов являются следствием шероховатостей поверхности подложки, на которую напыляются слои сверхрешетки. При этом случайные в плоскости  $xy$  шероховатости могут практически синфазно повторяться на поверхности каждого нового напыленного слоя, и сверхрешетка будет приближенно описываться корреляционной функцией  $2D$ -неоднородностей, имеющей конечный радиус корреляции в плоскости слоев  $xy$  и бесконечный вдоль оси  $z$ .

Наиболее информативным методом исследования неоднородностей структуры сверхрешеток и их

интерфейсов является метод малоуглового рассеяния рентгеновских лучей [10]. С самого начала исследований полупроводниковых сверхрешеток этим методом в некоторых спектрах рассеяния проявлялись особенности, которые авторы связывали с корреляциями между шероховатостями различных интерфейсов сверхрешетки [11]. В работе [12] была развита последовательная теория малоуглового рассеяния рентгеновских лучей в сверхрешетке, учитывающая коррелированность шероховатостей интерфейсов. В этой работе описаны эффекты в спектре, к которым приводят такие корреляции: особенности формирования резонансных пиков в диффузной области рассеяния и образование полос распределения интенсивности излучения в плоскости волновых векторов  $k_x k_z$ . Впоследствии эти эффекты детально исследовались теоретически и экспериментально (см., например, работы [13, 14] и цитированную там литературу).

Для рассматриваемой нами модели увеличение корреляционного радиуса в направлении  $z$ -оси сверхрешетки означает постепенное приближение к  $2D$ -неоднородностям. Поэтому представляло интерес выяснить, к каким эффектам в спектре спиновых и оптических волн кроме установленного в работе [4] эффекта обращения в нуль затухания волн в первой зоне Бриллюэна сверхрешетки приведут взаимные корреляции между неоднородностями интерфейсов в этом предельном случае. В работе [15] была исследована динамическая восприимчивость (функция Грина) сверхрешетки с фазовыми  $2D$ -неоднородностями. Было показано, что в поведении пиков восприимчивости на границе первой зоны Бриллюэна сверхрешетки при возрастании интенсивности таких неоднородностей проявляется асимметрия — пик, соответствующий низкочастотному краю запрещенной зоны, смещается к центру зоны без изменения своей ширины, в то время как пик, отвечающий высокочастотному краю запрещенной зоны, расширяется и резко уменьшается по высоте до полного его исчезновения. Такая асимметрия не возникает под действием  $1D$ - или  $3D$ -неоднородностей и является следствием особенностей закона сохранения энергии падающей и рассеянных на  $2D$ -неоднородностях волн. В работе [16] было показано, что этот эффект должен иметь место на границах всех нечетных зон Бриллюэна сверхрешетки, содержащей  $2D$ -неоднородности. В этих работах функция Грина  $G(\nu, \mathbf{k})$  находилась методом численного интегрирования при фиксированных значениях волнового числа  $k$ : на границе первой зоны Бриллюэна при  $k = k_r \equiv q/2$ ,

где  $q = 2\pi/L$ ,  $L$  — период сверхрешетки, в работе [15], или на границах последующих нечетных зон Бриллюэна при  $k = (2n - 1)q/2$  в работе [16] ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Целью настоящей работы является вывод в приближении Бурре [17] аналитического выражения для усредненной функции Грина сверхрешетки и исследование на его основе динамической восприимчивости и  $1D$ -плотности состояний сверхрешеток как с фазовыми  $2D$ -неоднородностями, так и с одновременным присутствием фазовых  $2D$ -неоднородностей и амплитудных  $3D$ -неоднородностей, моделирующих неоднородности слоев материала сверхрешетки.

## 2. МОДЕЛЬ И МЕТОД

Зависимость какого-либо материального параметра сверхрешетки от координат,  $A(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ , в рассматриваемом случае может быть представлена в виде

$$A(\mathbf{x}) = A + (\Delta A)_a \rho_a(\mathbf{x}) + (\Delta A)_p \rho_p(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где  $A$  — средняя величина параметра,  $(\Delta A)_a$  и  $(\Delta A)_p$  — соответственно амплитудные и фазовые среднеквадратичные отклонения,  $\rho_a(\mathbf{x})$  и  $\rho_p(\mathbf{x})$  — центрированные ( $\langle \rho_i(\mathbf{x}) \rangle = 0$ ) и нормированные ( $\langle \rho_i^2(\mathbf{x}) \rangle = 1$ ) функции,  $i = a, p$ . Функция  $\rho_a(\mathbf{x})$  является случайной однородной функцией, моделирующей неоднородности материала слоев сверхрешетки. Функция  $\rho_p(\mathbf{x})$  описывает как периодическую зависимость параметра вдоль оси  $z$  сверхрешетки, так и случайную пространственную модуляцию этого параметра, которая в рассматриваемом случае является функцией двух координат,  $x$  и  $y$ . Случайная составляющая этой функции моделирует деформацию поверхностей интерфейсов, идентичную для всех интерфейсов. Случайные функции  $\rho_a(\mathbf{x})$  и  $\rho_p(\mathbf{x})$  считаются в данной работе стохастически независимыми.

Мы рассматриваем сверхрешетку, имеющую синусоидальную зависимость материального параметра от координаты  $z$  в исходном состоянии, когда случайные неоднородности отсутствуют. Как и в работе [15], представим функцию  $\rho_p(\mathbf{x})$  в форме

$$\rho_p(\mathbf{x}) = \sqrt{2} \cos\{q[z - u(x, y)] + \psi\}, \quad (2)$$

где случайная функция  $u(x, y)$  моделирует  $2D$ -деформации интерфейсов сверхрешетки. Не зависящая от координат фаза  $\psi$  характеризуется однородным распределением в интервале  $(-\pi, \pi)$ .

Волновое уравнение для временной трансформанты Фурье в сверхрешетке может быть представлено в виде

$$\nabla^2 m + \left[ \nu - \frac{\Lambda_a}{\sqrt{2}} \rho_a(\mathbf{x}) - \frac{\Lambda_p}{\sqrt{2}} \rho_p(\mathbf{x}) \right] m = 0, \quad (3)$$

где функция  $m = m(\mathbf{x}, \omega)$  и параметры  $\nu$  и  $\Lambda_i$  различны для волн разной природы. Для спиновых волн уравнение (3) соответствует ферромагнитной сверхрешетке с неоднородным параметром магнитной анизотропии  $\beta(\mathbf{x})$  ( $A = \beta$ ,  $(\Delta A)_i = (\Delta \beta)_i$  в формуле (1)) в ситуации, когда направления внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$ , постоянной составляющей  $\mathbf{M}_0$  намагниченности  $\mathbf{M}$  и оси магнитной анизотропии совпадают с направлением оси  $z$  сверхрешетки. В этом случае

$$m = M_x + iM_y, \quad \nu = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha g M_0}, \quad \Lambda_i = \frac{\sqrt{2}(\Delta \beta)_i}{\alpha},$$

где  $\omega$  — частота,  $\omega_0 = g[H + (\beta - 4\pi)M_0]$  — частота однородного ферромагнитного резонанса,  $g$  — гиромагнитное отношение,  $\alpha$  — постоянная обмена. Для упругих волн в скалярном приближении в сверхрешетке с неоднородной плотностью  $p(\mathbf{x})$  среды ( $A = p$ ,  $(\Delta A)_i = (\Delta p)_i$ ) мы имеем

$$\nu = \left(\frac{\omega}{s}\right)^2, \quad \Lambda_i = \frac{\sqrt{2}\omega^2(\Delta p)_i}{ps^2},$$

где  $s$  — скорость упругих волн. Для электромагнитных волн в таком же приближении в среде с неоднородной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\mathbf{x})$  ( $A = \varepsilon$ ,  $(\Delta A)_i = (\Delta \varepsilon)_i$ ) имеем

$$\nu = \varepsilon \left(\frac{\omega}{c}\right)^2, \quad \Lambda_i = \sqrt{2}(\Delta \varepsilon)_i \left(\frac{\omega}{c}\right)^2,$$

где  $c$  — скорость света.

Образ Фурье усредненной функции Грина для уравнения (3) имеет вид

$$G(\nu, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\nu - k^2 - M_a(\nu, \mathbf{k}) - M_p(\nu, \mathbf{k})}, \quad (4)$$

где  $M_a(\nu, \mathbf{k})$  и  $M_p(\nu, \mathbf{k})$  — массовые операторы соответственно амплитудных и фазовых неоднородностей, которые в приближении Бурре могут быть представлены в виде [18]

$$M_i(\nu, \mathbf{k}) = -\frac{\Lambda_i^2}{8\pi} \int \frac{K_i(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \times \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \sqrt{\nu}|\mathbf{r}|)] d\mathbf{r}, \quad (5)$$

где  $K_i(\mathbf{r})$  — корреляционные функции амплитудных ( $i = a$ ) и фазовых ( $i = p$ ) неоднородностей — определяются выражениями

$$K_i(\mathbf{r}) = \langle \rho_i(\mathbf{x}) \rho_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle. \quad (6)$$

Корреляционная функция амплитудных изотропных 3D-неоднородностей имеет вид

$$K_a(\mathbf{r}) = \exp(-k_3|\mathbf{r}|), \quad (7)$$

где  $k_3 = r_3^{-1}$  — корреляционное волновое число 3D-неоднородностей,  $r_3$  — радиус корреляций этих неоднородностей. Точный вид корреляционной функции для фазовых 2D-неоднородностей найден в работе [15]:

$$K_p(\mathbf{r}) = \cos(qz) \exp\left[-\frac{Q(r_\perp)}{2}\right], \quad (8)$$

где

$$Q(r_\perp) = 4\gamma_2^2 \{E_1(k_2 r_\perp) + \ln(k_2 r_\perp C) + \exp(-k_2 r_\perp) - 1\}, \quad (9)$$

$r_\perp = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ ,  $C \approx 1.78$  — постоянная Эйлера,

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

— интегральная показательная функция,  $\gamma_2$  и  $k_2 = r_2^{-1}$  — соответственно среднеквадратичная флуктуация и корреляционное волновое число фазовых 2D-неоднородностей ( $r_2$  — их корреляционный радиус). В предельных случаях больших и малых значений  $r_\perp$  выражение (9) принимает вид

$$Q(\mathbf{r}) = \gamma_2^2 \begin{cases} k_2^2 r_\perp^2, & k_2 r_\perp \ll 1, \\ 4 \ln(k_2 r_\perp C/e), & k_2 r_\perp \gg 1, \end{cases} \quad (10)$$

где  $e \approx 2.72$  — основание натурального логарифма.

Выражение (8) имеет слишком сложную форму. Поэтому в работе [15] было предложено ашпроксимирующее выражение для этой функции:

$$K_p(\mathbf{r}) = \cos(qr_z) \left(1 + \frac{C^2}{e^2} k_2^2 r_\perp^2\right)^{-\gamma_2^2}. \quad (11)$$

Было показано, что модельная корреляционная функция (11) хорошо описывает точную корреляционную функцию во всем интервале изменения  $r_\perp$  и имеет асимптотику, совпадающую с асимптотикой точной функции как при  $k_2 r_\perp \ll 1$ , так и при  $k_2 r_\perp \gg 1$ . Последнее требование является основным

при подборе аппроксимирующей корреляционной функции, так как ранее было показано (как для 1D- и 3D-неоднородностей, так и для их смеси), что спектральные свойства волн определяются главным образом асимптотическим видом корреляционной функции неоднородностей при  $r \rightarrow \infty$ .

Массовый оператор  $M_a$  для случая изотропных амплитудных 3D-неоднородностей, описываемых корреляционной функцией (7), в приближении Бурре имеет вид [19]

$$M_a = \frac{\Lambda_a^2}{2} \frac{1}{(\sqrt{\nu} - ik_3)^2 - k^2}. \quad (12)$$

Массовый оператор  $M_p$  для случая фазовых 2D-неоднородностей, описываемых корреляционной функцией (11), анализировался в работе [15]. После перехода в выражении (5) к сферической системе координат с полярной осью вдоль оси  $z$  выполнялось интегрирование по азимутальному углу  $\varphi$  и по модулю радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . В результате был получен одномерный интеграл по полярному углу  $\theta$  от сложной подынтегральной функции, который находился численно. Такая схема решения задачи была приемлемой для исследования функции Грина  $G(\nu, \mathbf{k})$  при фиксированных значениях волнового числа  $k$ : на границе первой зоны Бриллюэна при  $k = k_r \equiv q/2$  в работе [15] или на границах последующих нечетных зон Бриллюэна при  $k = (2n - 1)q/2$  в работе [16]. Для целей данной работы требуется знание функции Грина  $G(\nu, k)$  при каждом значении волнового числа  $k$ , так как плотность состояний вычисляется интегрированием мнимой части этой функции по  $k$ . Метод вычисления  $M_p$ , использованный в работах [15, 16], мало пригоден для этих целей, так как приводит к слишком большому объему численного счета. Поэтому в этой работе был найден другой путь, позволивший получить аналитическое выражение для  $M_p(\nu, k)$  в случае фазовых 2D-неоднородностей.

### 3. МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР В СЛУЧАЕ ФАЗОВЫХ 2D-НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Перейдем в выражении (5) к цилиндрической системе координат, введя для простоты следующие обозначения:

$$\rho = r_\perp \equiv \sqrt{r_x^2 + r_y^2}, \quad z = r_z. \quad (13)$$

Проведя интегрирование по азимутальному углу  $\varphi$ , представив  $\cos qz$  в выражении (11) в виде суммы

двух экспонент, запишем массовый оператор для фазовых 2D-неоднородностей в виде

$$M_p(\nu, k) = M_p^-(\nu, k) + M_p^+(\nu, k), \quad (14)$$

где

$$M_p^\pm(\nu, k) = -\frac{\Lambda_p^2}{8} \int_0^\infty \mathcal{K}(\rho) \mathfrak{J}^\pm(\nu, k, \rho) \rho d\rho. \quad (15)$$

Здесь  $k = k_z$ ,  $\mathcal{K}$  — убывающая часть корреляционной функции (11),

$$\mathcal{K}(\rho) = \left(1 + \frac{C^2}{e^2} k_2^2 \rho^2\right)^{-\gamma_2^2}, \quad (16)$$

а функции  $\mathfrak{J}^\pm(\nu, k, \rho)$  представляют собой два одно-типных интеграла по  $z$ , соответствующие положительным и отрицательным значениям  $k$ :

$$\mathfrak{J}^\pm = \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \times \exp\left\{-i\left[(k \mp q)z + \sqrt{\nu(\rho^2 + z^2)}\right]\right\}. \quad (17)$$

Заменой переменной

$$\zeta = -\left[(k \mp q)z + \sqrt{\nu(\rho^2 + z^2)}\right], \quad (18)$$

приводим эти интегралы к виду

$$\mathfrak{J}^\pm = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\zeta} d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - (\nu - \nu_k^\pm)\rho^2}}, \quad (19)$$

где  $\nu_k^\pm = (k \mp q)^2$ .

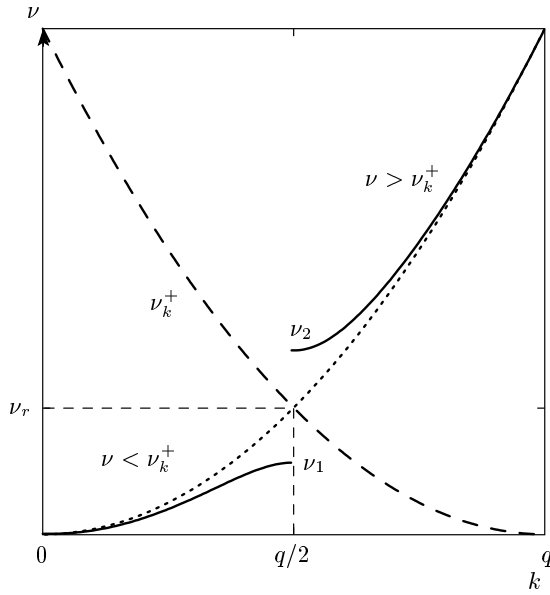
На рис. 1 для  $k > 0$  в схеме расширенных зон в двухзонном приближении схематически показан закон дисперсии спиновых волн идеальной сверхрешетки (сплошные кривые). При  $k = k_r = q/2$  в спектре образуется щель (запрещенная зона) между максимальной частотой  $\nu_1$  первой зоны Бриллюэна и минимальной частотой  $\nu_2$  второй зоны:

$$\nu_{1,2} = \nu_r \pm \Lambda_p/2, \quad (20)$$

где  $\nu_r = k_r^2 \equiv (q/2)^2$  — частота, соответствующая центру щели.

Пунктирная кривая на этом рисунке соответствует закону дисперсии  $\nu = k^2$  в отсутствие сверхрешетки ( $\Lambda_p = 0$ ), штриховая кривая — вспомогательной ветви  $\nu = \nu_k^+ \equiv (k - q)^2$ .

Частоты первой и второй зон Бриллюэна удовлетворяют соответственно неравенствам  $\nu < \nu_r$  и



**Рис. 1.** Схематический вид закона дисперсии спиновых волн для идеальной сверхрешетки (сплошные кривые  $\nu < \nu_k^+$  и  $\nu > \nu_k^+$  соответственно для первой и второй зон Бриллюэна сверхрешетки) и для однородного ферромагнетика (пунктирная кривая,  $\nu = k^2$ ). Штриховой кривой показана вспомогательная ветвь  $\nu_k^+ = (k - q)^2$

$\nu > \nu_r$ . Однако они также (при данном  $k$ ) удовлетворяют соответственно неравенствам  $\nu < \nu_k^\pm$  и  $\nu > \nu_k^\pm$ . Поэтому из формулы (19) видно, что знаменатели подынтегральных выражений интегралов  $\mathfrak{J}^\pm$  имеют разный вид для частот, соответствующих первой зоне Бриллюэна ( $\nu < \nu_k^\pm$  при данном  $k$ ), и для частот, соответствующих второй зоне ( $\nu > \nu_k^\pm$ ). В первом случае в знаменателе стоит сумма действительных чисел и, в соответствии с формулой 2.3.3.7 таблиц интегралов [20], получаем значения этих интегралов в виде

$$\mathfrak{J}^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\zeta} d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + a_\pm^2}} = 2K_0(a_\pm). \quad (21)$$

Здесь  $K_0(a_\pm)$  — функции Макдональда,  $a_\pm = \rho\sqrt{\nu_k^\pm - \nu}$  и  $\text{Re } a_\pm > 0$  в соответствии с требованием к формуле 2.3.3.7 [20]<sup>1)</sup>. Для второй зоны Бриллюэна ( $\nu > \nu_k^\pm$ ) в знаменателе подынтегральных функций  $\mathfrak{J}^\pm$  стоит разность действительных чисел,

<sup>1)</sup> Обращаем внимание, что в этой формуле в [20] имеется опечатка: напечатано  $\sqrt{\pi}\Gamma(\rho)$  вместо  $\sqrt{\pi}/\Gamma(\rho)$  (ср. с формулой 2.5.6.4 этого же справочника).

$$\mathfrak{J}^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\zeta} d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - b_\pm^2}}, \quad (22)$$

где  $b_\pm = \rho\sqrt{\nu - \nu_k^\pm}$ . Разбиваем каждый из этих интегралов на четыре интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{-b} + \int_{-b}^0 + \int_0^b + \int_b^{\infty}. \quad (23)$$

Сумму первого и последнего интегралов преобразуем к одному интегралу, который вычисляем по формуле 2.5.6.2 [20]:

$$\int_{b_\pm}^{\infty} \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{\sqrt{\zeta^2 - b_\pm^2}} d\zeta = 2 \int_{b_\pm}^{\infty} \frac{d\zeta \cos \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - b_\pm^2}} = -\pi Y_0(b_\pm), \quad (24)$$

где  $Y_0(b_\pm)$  — функции Неймана,  $\text{Re } b_\pm > 0$ . Сумму второго и третьего интегралов преобразуем аналогичным образом и по формуле 2.5.6.1 вычисляем

$$2 \int_0^{b_\pm} \frac{d\zeta \cos \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - b_\pm^2}} = -i\pi J_0(b_\pm), \quad (25)$$

где  $J_0(b_\pm)$  — функции Бесселя. Таким образом,

$$\mathfrak{J}^\pm = -i\pi [J_0(b_\pm) - iY_0(b_\pm)] = -i\pi H_0^{(2)}(b_\pm), \quad (26)$$

где  $H_0^{(2)}(b_\pm)$  — функции Ганкеля второго рода. Поскольку

$$b_\pm = \rho\sqrt{\nu - \nu_k^\pm} = i\rho\sqrt{\nu_k^\pm - \nu} = ia_\pm, \quad (27)$$

мы получаем, воспользовавшись соотношением [21]

$$K_0(x) = -\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(-ix), \quad (28)$$

что выражения (21) для интегралов  $\mathfrak{J}^\pm$ , полученные для первой зоны Бриллюэна, остаются справедливыми и для второй зоны, где величина  $a_\pm = \sqrt{\nu_k^\pm - \nu}$  становятся мнимыми числами. Поэтому выражения (22)–(28) нам в дальнейшем не понадобятся.

Подставляя (21) в (15), получаем выражения для слагаемых  $M_p^\pm(\nu, k)$  в формуле (14), справедливые как в первой, так и во второй зонах Бриллюэна (за исключением окрестности  $k = q$  этой зоны) для произвольной формы убывающей части корреляционной функции  $\mathcal{K}(\rho)$  2D-неоднородностей:

$$M_p^\pm(\nu, k) = -\frac{\Lambda_p^2}{4} \int_0^{\infty} K_0(\rho c_\pm) \mathcal{K}(\rho) \rho d\rho, \quad (29)$$

где  $c_\pm = \sqrt{(k \mp q)^2 - \nu}$ .

Поскольку в первой зоне Бриллюэна величины  $c_{\pm}$  действительны, а во второй зоне — мнимые, из выражений (29) следует, что затухание, обусловленное фазовыми  $2D$ -неоднородностями, в первой зоне отсутствует и возникает только во второй зоне Бриллюэна при любой форме убывания корреляционной функции  $\mathcal{K}(\rho)$ .

Найдем явные выражения для  $M_p^{\pm}(\nu, k)$ , соответствующие различным модельным представлениям убывающей части корреляционной функции  $\mathcal{K}(\rho)$ .

1) Идеальная сверхрешетка ( $\gamma_2 = 0$ ,  $\mathcal{K}(\rho) = 1$ ). Согласно формуле 2.16.2.2 таблиц интегралов [22], из (29) следует хорошо известное выражение

$$M_p^{\pm}(\nu, k) = \frac{\Lambda_p^2}{4} \frac{1}{\nu - (k \mp q)^2}. \quad (30)$$

2) Наиболее общая аппроксимация корреляционной функции  $\mathcal{K}(\rho)$  фазовых  $2D$ -неоднородностей определяется выражением (16). Функции  $M_p^{\pm}(\nu, k)$  вычисляются точно по формуле 2.16.3.14 [22]:

$$M_p^{\pm}(\nu, k) = -\frac{\Lambda_p^2}{4} \frac{u_{\pm}^{1+\gamma_2^2}}{c_{\pm}^2} S_{-\gamma_2^2, 1-\gamma_2^2}(u_{\pm}), \quad (31)$$

где  $S_{\mu, \nu}(u_{\pm})$  — функции Ломмеля,  $u_{\pm} = (e/Ck_2)c_{\pm}$ .

3) Частный случай корреляционной функции (16), соответствующий  $\gamma_2^2 = 1/2$ . В соответствии с формулой 2.16.3.17 [22] функции  $M_p^{\pm}(\nu, k)$  принимают более простой вид, чем в общем случае (31):

$$M_p^{\pm}(\nu, k) = \frac{\Lambda_p^2}{4} \frac{u_{\pm}}{c_{\pm}^2} \times [\cos u_{\pm} \text{si}(u_{\pm}) - \sin u_{\pm} \text{ci}(u_{\pm})], \quad (32)$$

где  $\text{si}(x)$  и  $\text{ci}(x)$  — соответственно интегральные синус и косинус<sup>2)</sup>.

4) Наконец, рассмотрим случай моделирования убывания корреляционной функции  $2D$ -неоднородностей экспоненциальной функцией,

$$\mathcal{K}(\rho) = \exp(-k_c \rho), \quad (33)$$

где эффективное корреляционное волновое число  $k_c$  связано с  $\gamma_2$  и  $k_2$  приближенным соотношением  $k_c \approx \gamma_2^2 k_2 / 2$ . В этом случае функции  $M_p^{\pm}(\nu, k)$  могут быть найдены по формуле 2.16.6.3 [22] и после тождественного преобразования приведены к виду

$$M_p^{\pm}(\nu, k) = -\frac{\Lambda_p^2}{4} \frac{1}{v_{\pm}} \left( 1 - \frac{k_c}{\sqrt{v_{\pm}}} \arctg \frac{\sqrt{v_{\pm}}}{k_c} \right), \quad (34)$$

<sup>2)</sup> Обращаем внимание на тот факт, что в формуле 2.16.3.17 [22] напечатан коэффициент  $1/2$  вместо  $1/4$ .

где  $v_{\mp} = \nu_k^{\pm} - \nu - k_c^2$ . Эти выражения, в отличие от формул (31) и (32), описывают функции  $M_p^{\pm}(\nu, k)$  только качественно, так как моделирующая корреляционная функция (33) сильно отличается от реальной, имеющей степенную асимптотику при  $\rho \rightarrow \infty$ . Однако выражение (34) полезно для понимания особенностей действия фазовых  $2D$ -неоднородностей на спектр. Из него видно, что  $2D$ -неоднородности даже во второй зоне Бриллюэна ( $\nu > \nu_k^{\pm}$ ) не приводят к мнимой добавке непосредственно к частоте, как в случае  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей. Мнимая добавка возникает в выражениях, стоящих в круглых скобках в формуле (34), которые описывают модификацию ширины щели  $\Lambda_p$ ; поэтому она приводит к значительно более слабому затуханию волн, чем в  $1D$ - и  $3D$ -случаях.

#### 4. ФУНКЦИЯ ГРИНА И ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ

Спектральные свойства волн различной природы изучаются методами, специфическими для данного типа волн. Для спиновых волн методами спин-волнового резонанса в тонких магнитных пленках исследуется высокочастотная восприимчивость как функция величины постоянного магнитного поля (или частоты) при заданной частоте (или, соответственно, при заданном магнитном поле). Эта восприимчивость имеет резонансы при значениях поля или частоты, соответствующих  $k = k_p$ , где  $k_p$  определяется условиями размерных резонансов спиновых волн в тонкой пленке. При этом измеряемая восприимчивость  $\chi(\nu)$  пропорциональна непосредственно функции Грина  $G(\nu)$ . Коэффициент пропорциональности между  $\chi(\nu)$  и  $G(\nu)$  зависит от  $k = k_p$ , но не зависит ни от частоты, ни от магнитного поля [23]. Для рассматриваемых в данной работе ситуаций функцию Грина для спиновых волн мы вычисляем по формуле (4), в которую подставляем выражение (12) для  $M_a(\nu, k)$  и выражение (14) для  $M_p(\nu, k)$ , в котором слагаемые  $M_p^{\pm}(\nu, k)$  определяются формулой (31). Для электромагнитных волн, в отличие от спиновых волн, методы непосредственного измерения формы функции Грина не разработаны. Поэтому мы исследуем характеристику, которая может быть непосредственно вычислена из усредненной функции Грина и сопоставлена с результатами оптических экспериментов — одномерная плотность состояний

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^q G''(\omega, k) dk. \quad (35)$$

Входящую в это выражение функцию Грина в этом случае удобно представить в виде

$$G(\omega, k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ 1 - \nu \gamma_3^2 P_a - \frac{\nu}{2} \left( \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right)_p^2 (P_+ + P_-) \right] \nu - k^2 \right\}^{-1}, \quad (36)$$

где  $\gamma_3 = (\Delta\varepsilon)_a/\varepsilon$ , а  $P_a$ ,  $P_+$  и  $P_-$  — функции, зависящие от  $\nu$  и  $k$  и описывающие влияние амплитудных  $3D$ -неоднородностей,

$$P_a = [(\sqrt{\nu} - ik_3)^2 - k^2]^{-1}, \quad \nu = \varepsilon(\omega/c)^2, \quad (37)$$

и фазовых  $2D$ -неоднородностей,

$$P_{\pm} = -\frac{1}{c_{\pm}^2} u_{\pm}^{1+\gamma_2^2} S_{-\gamma_2^2, 1-\gamma_2^2}(u_{\pm}). \quad (38)$$

Выражение (38) в частных случаях может принимать вид, следующий из формул (30), (32) и (34). Из равенства нулю знаменателя функции Грина (36) следует, что в отсутствие как амплитудных ( $\gamma_3 = 0$ ), так и фазовых ( $\gamma_2 = 0$ ) случайных неоднородностей щель (запрещенная зона) на границе первой зоны Бриллюэна сверхрешетки для электромагнитных волн ограничена частотами

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 \mp \Delta\varepsilon/\sqrt{2}\varepsilon}}, \quad (39)$$

где  $\omega_r = cq/2\sqrt{\varepsilon}$ .

В отличие от соответствующего выражения (20) для спиновых волн, формула (39) содержит квадратный корень в знаменателе. Разлагая его для случая узких щелей ( $\Delta\varepsilon/\sqrt{2}\varepsilon \ll 1$ ), получаем

$$\omega_{1,2} \approx \omega_r \left[ 1 \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right) + \frac{3}{16} \left( \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \right]. \quad (40)$$

Видно, что для электромагнитных волн помимо появления щели  $\Delta\omega$  в спектре должно наблюдаться также смещение центра этой щели:

$$\begin{aligned} \Delta\omega &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right) \omega_r, \\ \omega'_r &\approx \left[ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \right] \omega_r. \end{aligned} \quad (41)$$

Далее мы детально исследуем влияние фазовых  $2D$ -неоднородностей и амплитудных  $3D$ -неоднородностей на  $G''(\nu)$  и плотности состояний в окрестности запрещенной зоны. Однако сначала

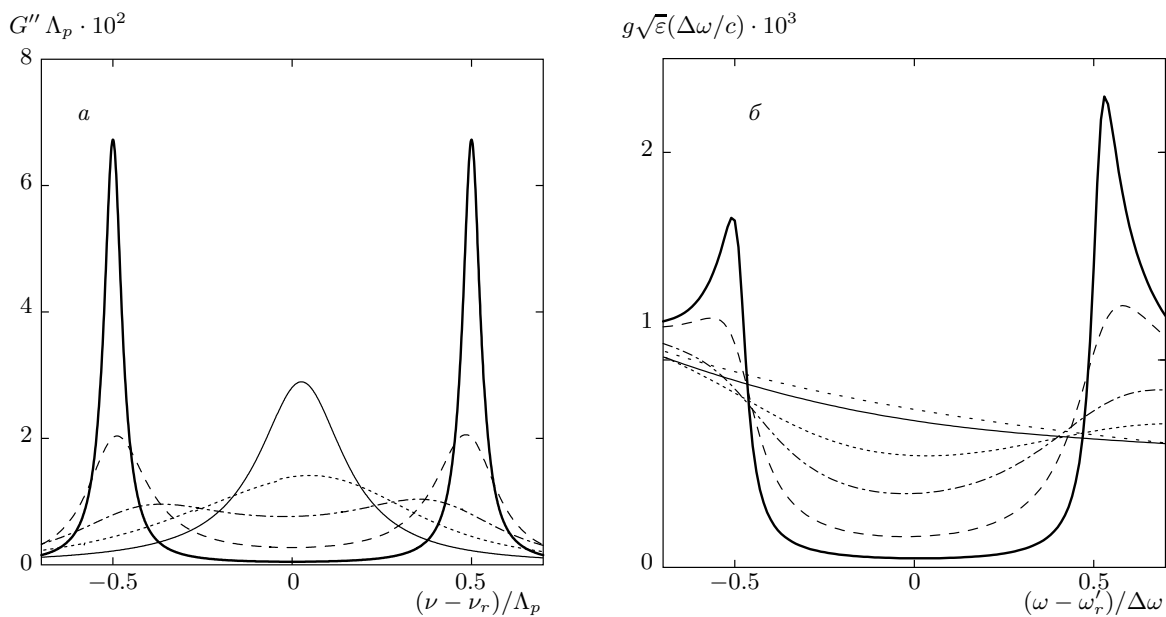
проведем исследование плотности состояний для фазовых  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей. Влияние таких неоднородностей на динамическую восприимчивость сверхрешетки хорошо изучено. Однако влияние  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей на одномерную плотность состояний в рамках используемой здесь модели RSM ранее не проводилось. Полученные результаты понадобятся нам для сравнения с ними эффектов, обусловленных  $2D$ -неоднородностями. После этого мы рассмотрим влияние на спектральные свойства синусоидальной сверхрешетки присутствия в ней только фазовых  $2D$ -неоднородностей. Использование полученных в данной работе аналитических выражений для функции Грина позволит нам дополнить и уточнить результаты работы [15]. Затем мы исследуем совместное влияние фазовых  $2D$ -неоднородностей и амплитудных  $3D$ -неоднородностей на функцию Грина и плотность состояний в синусоидальной сверхрешетке.

#### 4.1. Фазовые $1D$ - и $3D$ -неоднородности

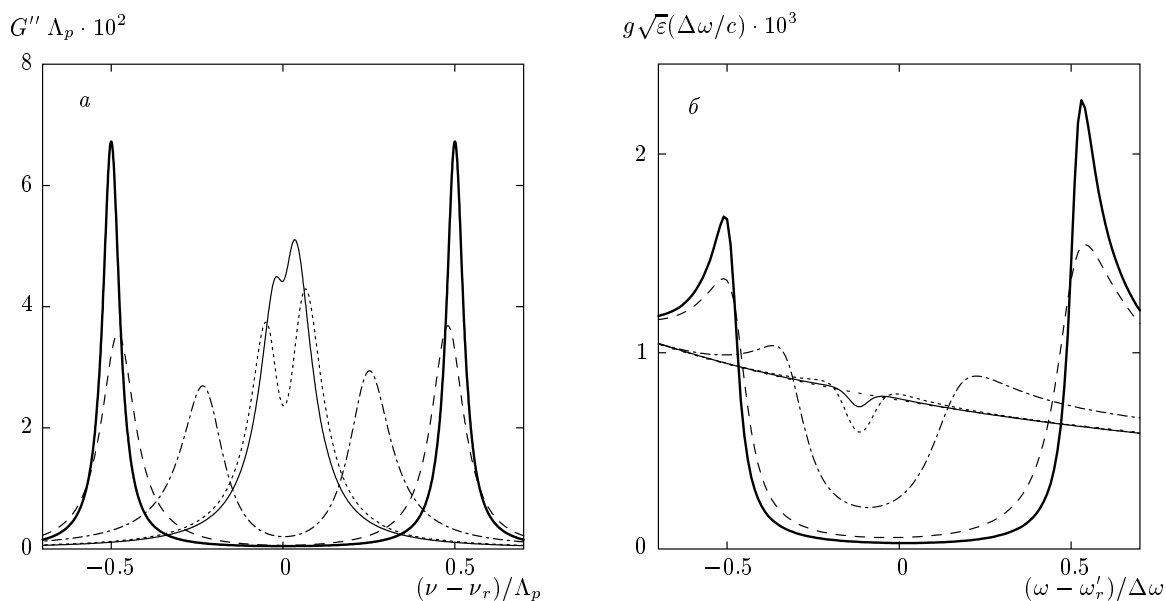
На рис. 2 показаны динамическая восприимчивость (мнимая часть  $G''(\nu, k)$ ) функции Грина и плотность состояний  $g(\omega)$  на краю первой зоны Бриллюэна при  $k = k_r = q/2$  для различных значений среднеквадратичных флуктуаций  $\gamma_1$  фазовых  $1D$ -неоднородностей при постоянном значении волнового числа этих неоднородностей ( $\kappa_1 = k_1/\sqrt{\Lambda} = 1.5$ ). Жирные кривые на рис. 2а,б соответствуют  $\gamma_1^2 = 0$ , т. е. идеальной сверхрешетке. Однако пики на рис. 2а имеют конечную ширину, а форма щели на рис. 2б отличается от прямоугольной, так как было введено затравочное затухание  $\nu''/\Lambda = 0.03$  (то же самое справедливо для всех последующих рисунков). Чтобы избежать смещения центра щели для идеальной сверхрешетки, на этом рисунке, как и на всех последующих графиках  $g(\omega)$ , по оси абсцисс отложена величина  $\omega - \omega'_r$ , где  $\omega'_r$  определяется формулой (41). Видно что с ростом  $\gamma_1^2$  амплитуды обоих пиков уменьшаются, ширины пиков возрастают. Пики незначительно смещаются к центру щели, промежуток между ними заполняется, и в центре возникает один широкий пик, который сужается при дальнейшем увеличении  $\gamma_1^2$ . Глубина щели в плотности состояний с ростом  $\gamma_1^2$  уменьшается, форма щели из прямоугольной постепенно превращается в закругленную.

На рис. 3 показаны зависимости  $G''(\nu)$  и  $g(\omega)$  на границе первой зоны Бриллюэна для различных значений среднеквадратичных флуктуаций  $\gamma_3^2$  фазовых  $3D$ -неоднородностей при постоянном значе-





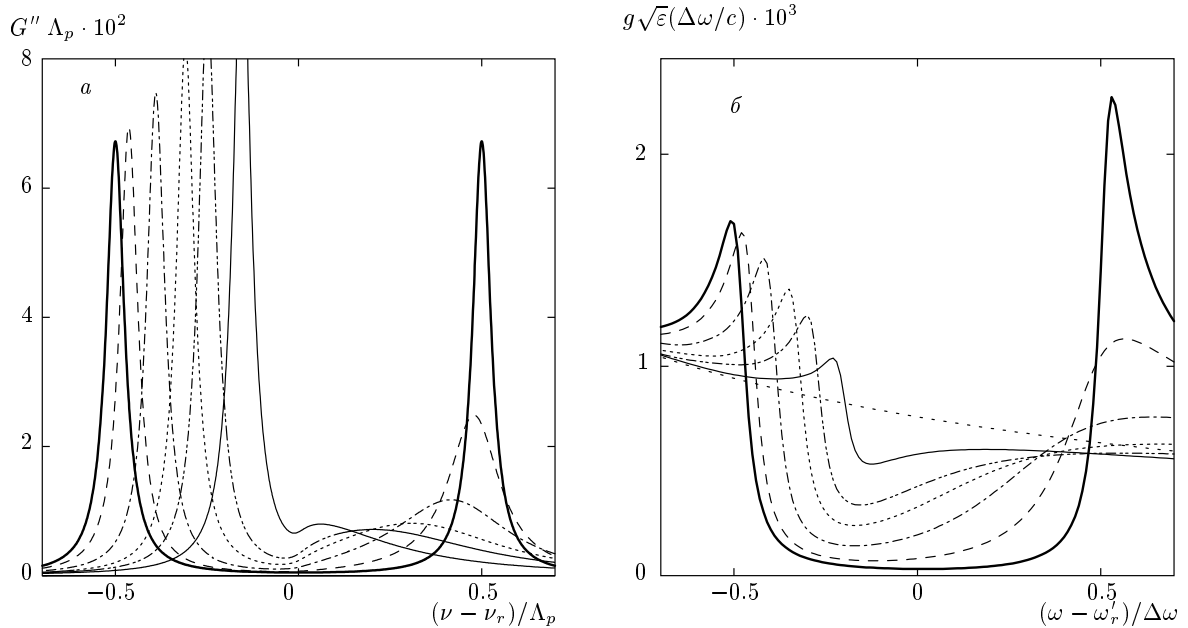
**Рис. 2.** Влияние фазовых 1D-неоднородностей на функцию Грина  $G''(\nu)$  на границе первой зоны Бриллюэна (а) и плотность состояний  $g(\omega)$  (б) для  $\kappa_1 = 1.5$  и  $\gamma_1^2 = 0$  (сплошная жирная кривая), 0.03 (штриховая кривая), 0.1 (штрихпунктир), 0.2 (пунктир), 0.5 (сплошная тонкая кривая). Разреженный пунктир здесь и на рис. 3–5 — функция  $g(\omega)$  для однородного ферромагнетика в отсутствие сверхрешетки



**Рис. 3.** Влияние фазовых 3D-неоднородностей на функцию Грина  $G''(\nu)$  на границе первой зоны Бриллюэна (а) и плотность состояний  $g(\omega)$  (б) для  $\kappa_3 = 1.5$  и  $\gamma_3^2 = 0$  (сплошная жирная кривая), 0.08 (штриховая кривая), 0.5 (штрихпунктир), 1.5 (пунктир), 2.0 (сплошная тонкая кривая)

нии  $\kappa_3 = k_3 / \sqrt{\Lambda} = 1.5$ . Видно, что пики на зависимости  $G''(\nu)$  с ростом  $\gamma_3^2$  уменьшаются по амплитуде медленнее, чем в случае 1D-неоднородностей,

и в то же время достаточно быстро сближаются друг с другом. В соответствии с этим закрытие щели в плотности состояний происходит за счет как



**Рис. 4.** Функция Грина  $G''(\nu)$  на границе первой зоны Бриллюэна сверхрешетки (а) и  $1D$ -плотность состояний  $g(\omega)$  (б) для  $\kappa_2 = 1.5$  и  $\gamma_2^2 = 0$  (0) — сплошная жирная кривая, 0.10 (0.15) — штриховая кривая, 0.33 (0.50) — штрихпунктир, 0.66 (1.00) — пунктир, 1.01 (1.50) — двойной штрихпунктир, 2.01 (3.00) — сплошная тонкая кривая. В скобках указаны значения произведения  $\gamma_2^2 \kappa_2$

уменьшения ее глубины, так и достаточно быстрого сужения щели. Центр щели при этом смещается в сторону меньших частот. Эффект смещения центра щели характерен как для  $1D$ - и  $3D$ -, так и для  $2D$ -неоднородностей (см. ниже). Наши исследования показали, что режим закрытия щели в спектре с ростом  $\gamma_2^2$ , показанный на рис. 3, соответствует только значениям  $\kappa_3 > 1$ . При малых  $\kappa_3$  рост  $\gamma_2^2$  приводит к картине (как для  $G''(\nu)$ , так и для  $g(\omega)$ ), качественно подобной рис. 2а,б, соответствующим  $1D$ -неоднородностям.

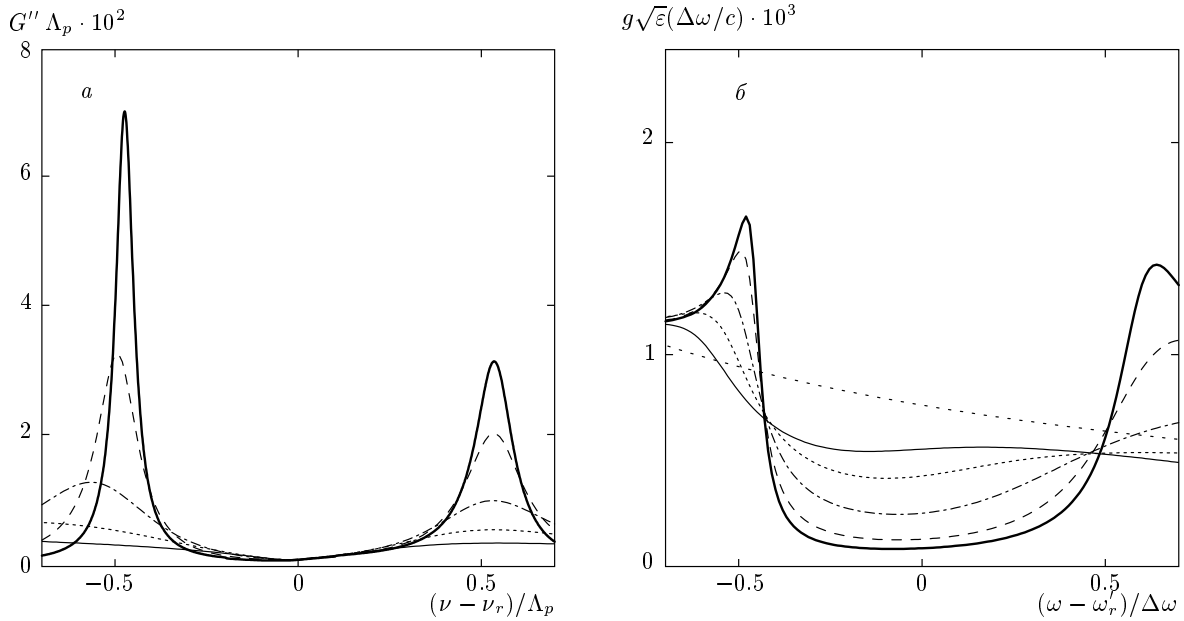
Общим свойством влияния  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей является симметрия в поведении левого и правого пиков с ростом интенсивности неоднородностей.

#### 4.2. Фазовые $2D$ -неоднородности

На рис. 4 показаны динамическая восприимчивость  $G''(\nu, k)$  и плотность состояний  $g(\omega)$  на границе первой зоны Бриллюэна при  $k = k_r = q/2$  для различных значений среднеквадратичных флуктуаций  $\gamma_2$  фазовых  $2D$ -неоднородностей при постоянном значении корреляционного волнового числа этих неоднородностей  $k_2$  ( $\kappa_2 = k_2/\sqrt{\Lambda_p} = 1.5$ ). Жирные сплошные кривые на рис. 4а,б соответ-

ствуют  $\gamma_2^2 = 0$ . Видно, что с ростом  $\gamma_2^2$  появляется и возрастает асимметрия в поведении низкочастотного и высокочастотного пиков на краях щели. Этот эффект, являющийся особенностью только  $2D$ -неоднородностей, был впервые установлен в работе [15]. Однако в отличие от работы [15], на рис. 4а видно не только резкое уменьшение правого пика, но и его смещение к центру запрещенной зоны. К центру щели смещается и левый пик. Ширина левого пика при этом не меняется, так как она определяется только величиной затравочного затухания; амплитуда этого пика возрастает.

Проведенное нами исследование показало, что имеются два режима поведения высокочастотного пика при возрастании  $\gamma_2^2$ , которые зависят от величины безразмерного корреляционного волнового числа  $\kappa_2$ . При малых значениях  $\kappa_2$ , которые использовались в работе [15] ( $\kappa_2 \approx 0.45$ ), правый пик практически не смещается с ростом  $\gamma_2^2$ , когда происходит уменьшение его амплитуды и возрастание ширины. Второму режиму соответствуют значения  $\kappa_2 > 1$ . В этом случае с ростом  $\gamma_2^2$  происходит как уменьшение величины правого пика, так и его смещение к центру щели. Левый и правый пики сближаются и сливаются в один пик. Из рис. 4б видно, как с ростом  $\gamma_2^2$  сужается и деформируется щель в плотности состояний.



**Рис. 5.** Влияние амплитудных 3D-неоднородностей на функцию Грина  $G''(\nu)$  (а) и плотность состояний  $g(\omega)$  (б) сверхрешетки, содержащей фазовые 2D-неоднородности с неизменными характеристиками:  $\gamma_2^2 = 0.51$ ,  $\varkappa_2 = 0.3$ . Кривые соответствуют  $\varkappa_3 = 1.0$  и  $\mathcal{E}_3 = \Lambda_a/\sqrt{2}\Lambda_p = 0$  (жирная сплошная кривая), 0.5 (штриховая кривая), 1.0 (штрихпунктир), 1.5 (пунктир), 2.0 (сплошная тонкая кривая)

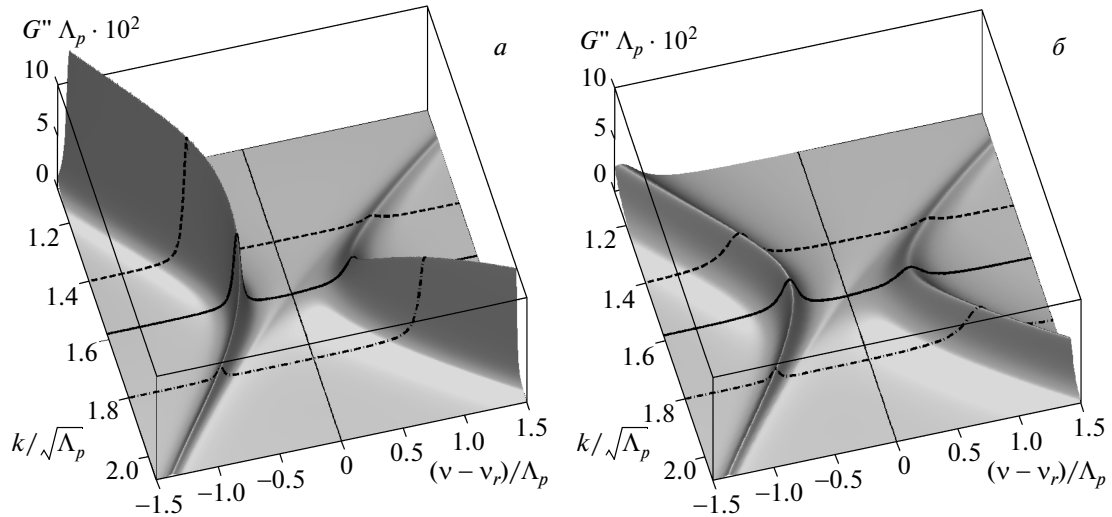
При этом на зависимости  $g(\omega)$  также проявляется эффект асимметрии: если левый край щели остается практически вертикальным при уменьшении ширины и глубины щели, то правый край приобретает наклонную форму.

Исследовались также динамическая восприимчивость и плотность состояний на границе зоны Бриллюэна для различных значений корреляционного волнового числа неоднородностей  $\varkappa_2$  при постоянном значении  $\gamma_2^2$ . Эффект возрастания асимметрии величин пиков восприимчивости на краях запрещенной зоны имеет место и в этом случае. Кривые зависимостей  $G(\nu)$  и  $g(\omega)$ , для которых значения произведения  $\varkappa_2\gamma_2^2$ , указанного в скобках в подписи к рис. 4, одинаковы, качественно соответствуют кривым на рис. 4. На первый взгляд, эта закономерность не является тривиальной, так как параметры  $\gamma_2^2$  и  $k_2$  входят в выражение для массового оператора функции Грина (31) существенно различным образом:  $\gamma_2^2$  входит в индексы функции Ломмеля, а  $k_2$  — в аргумент этой функции. Однако она проявляется явно для приближения, использующего экспоненциальную корреляционную функцию (33), для которой эффективное корреляционное волновое число принимает вид  $k_c \approx k_2\gamma_2^2/2$ . В отличие от двух возможных режимов, которые могут проявляться при

росте  $\gamma_2^2$ , при возрастании  $\varkappa_2$  при любом значении  $\gamma_2^2 = \text{const}$  происходит смещение к центру зоны как левого, так и правого пика.

### 4.3. Фазовые 2D-неоднородности и амплитудные 3D-неоднородности

На рис. 5 показано влияние роста среднеквадратичных флуктуаций амплитудных 3D-неоднородностей на динамическую восприимчивость и плотность состояний сверхрешетки, в которой присутствуют также фазовые 2D-неоднородности. Величина этих флуктуаций характеризуется параметром  $\mathcal{E}_3 = \Lambda_a/\sqrt{2}\Lambda_p$ . Жирные сплошные кривые на рис. 5а и 5б соответствуют отсутствию 3D-неоднородностей ( $\mathcal{E}_3 = 0$ ) и описывают эффект асимметрии, обусловленный фазовыми 2D-неоднородностями с неизменными характеристиками ( $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\varkappa_2 = 0.3$ ). Из рис. 5а видно, что рост флуктуаций 3D-неоднородностей приводит к уменьшению амплитуды обоих пиков динамической восприимчивости. Однако скорость уменьшения левого пика при этом превосходит скорость уменьшения правого пика. В результате амплитуды и ширины пиков выравниваются и эффект асимметрии, обусловленный 2D-неоднородностями, исчезает. Из рис. 5б видно,



**Рис. 6.** Схематический вид функции Грина  $G''(\nu, k)$  в окрестности запрещенной зоны сверхрешетки в присутствии фазовых  $2D$ -неоднородностей, соответствующих  $\alpha_c = 0.1$  (а) и изменение функции  $G''(\nu, k)$  при добавлении амплитудных  $3D$ -неоднородностей с  $\alpha_3 = 0.5$  и  $\epsilon_3 = 0.4$  (б). Показаны также сечения функции  $G''(\nu, k)$ , соответствующие  $k = k_r$  (сплошные кривые),  $k < k_r$  (штриховые) и  $k > k_r$  (штрихпунктирные)

что рост флуктуаций амплитудных  $3D$ -неоднородностей приводит к уменьшению глубины и некоторому расширению щели в плотности состояний. Щель при этом остается асимметричной.

На рис. 6 показан пространственный вид мнимой части функции Грина  $G''(\nu, k)$  в окрестности щели между первой и второй зонами Бриллюэна. Рисунок 6а соответствует присутствию только фазовых  $2D$ -неоднородностей, а рис. 6б — совместному действию как фазовых  $2D$ -, так и амплитудных  $3D$ -неоднородностей. При построении этих графиков вместо точного выражения (31) для  $M_p^\pm(\nu, k)$  использовано приближенное выражение (34), соответствующее экспоненциально убывающей корреляционной функции (33). Как показали исследования, качественное поведение функции  $G''(\nu, k)$  при этом остается таким же, как при использовании точных выражений для  $M_p^\pm(\nu, k)$ , а вычисления существенно упрощаются. Конечность амплитуды функции  $G''$  в первой зоне Бриллюэна обусловлена введением затравочного затухания  $\nu''/\Lambda_p = 0.03$ . Из рис. 6а видно, что амплитуда функции  $G''(\nu, k)$  при данных параметрах ( $\alpha_c \approx \gamma_2 k_2 / 2 = 0.1$ ) с ростом  $k$  в первой зоне Бриллюэна лишь незначительно уменьшается к границе зоны  $k = k_r$ . Во второй зоне амплитуда функции  $G''(\nu, k)$  при  $k = k_r$  значительно меньше, чем в первой зоне, и возрастает с ростом  $k$ . Добавление амплитудных  $3D$ -неоднородностей вызывает уменьшение амплитуд функции  $G''(\nu, k)$  как в пер-

вой, так и во второй зонах Бриллюэна и подавление эффекта асимметрии амплитуд этих пиков на краях запрещенной зоны. Из рис. 6а,б видно, что эффект асимметрии максимумов функции Грина под действием фазовых  $2D$ -неоднородностей проявляется четко лишь при точной настройке волнового числа  $k$  на границу  $k_r$  зоны Бриллюэна. При  $k < k_r$  амплитуды пиков зависимости  $G''(\nu)$  сначала выравниваются, а затем амплитуда высокочастотного пика начинает превосходить амплитуду низкочастотного пика. При  $k > k_r$  эффект асимметрии увеличивается, но это явление уже не свидетельствует о наличии именно  $2D$ -неоднородностей: оно будет происходить для неоднородностей любой размерности.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в приближении Бурре выведено аналитическое выражение для усредненной функции Грина  $G(\nu, k)$  изначально синусоидальной сверхрешетки с фазовыми  $2D$ -неоднородностями, моделирующими случайные синфазные деформации интерфейсов сверхрешетки. Полученное выражение справедливо в первой и второй зонах Бриллюэна сверхрешетки, за исключением окрестности границы второй зоны. Это позволило исследовать динамическую восприимчивость, и одномерную плотность состояний сверхрешетки как с фазовыми

2D-неоднородностями, так и с одновременным присутствием фазовых 2D-неоднородностей и амплитудных 3D-неоднородностей, причем последние моделируют неоднородности материала слоев сверхрешетки. Показано, что эффект отсутствия затухания в первой зоне Бриллюэна и возникновение его во второй зоне, предсказанный в работе [4], имеет место при любой форме спада корреляционной функции фазовых 2D-неоднородностей.

Показано, что характерный только для фазовых 2D-неоднородностей эффект асимметрии величин пиков динамической восприимчивости на краях запрещенной зоны в спектре сверхрешетки, предсказанный в работе [15] при возрастании среднеквадратичных флуктуаций  $\gamma_2$  2D-неоднородностей, имеет место также и при увеличении корреляционного волнового числа  $\varkappa_2$  таких неоднородностей. Проведено детальное исследование эффекта асимметрии, которое показало, что в случае возрастания  $\gamma_2$  при  $\varkappa_2 = \text{const}$  могут быть два различных режима закрытия щели в спектре в зависимости от величины  $\varkappa_2$ . В обоих режимах высота низкочастотного пика несколько возрастает, а высота высокочастотного резко уменьшается с ростом  $\gamma_2$ . Однако для малых значений  $\varkappa_2$  ( $\varkappa_2 < 0.5$ ) низкочастотный пик при этом смещается к центру зоны, а высокочастотный остается неподвижным. Именно этот режим исследовался в работах [15, 16].

В настоящей работе получен второй режим, проявляющийся для  $\varkappa_2 > 1$ . В этом режиме такая же резкая асимметрия величины пиков сопровождается практически симметричным смещением обоих пиков к центру зоны. В случае возрастания  $\varkappa_2$  при  $\gamma_2 = \text{const}$  только этот последний режим проявляется для всех исследованных значений  $\gamma_2$ . Эффект асимметрии проявляется также в форме одномерной плотности состояний: если левый край щели остается практически вертикальным, то правый край приобретает наклонную форму. Показано, что для различных, но и не очень малых значений величин  $\varkappa_2$  и  $\gamma_2^2$  графики динамической восприимчивости, как и графики плотности состояний, соответствующие одной и той же величине произведения  $\varkappa_2 \gamma_2^2$ , близки друг к другу как качественно, так и количественно.

Исследовано влияние амплитудных 3D-неоднородностей на динамическую восприимчивость и плотность состояний сверхрешетки, в которой присутствуют фазовые 2D-неоднородности. Рост среднеквадратичной флуктуации 3D-неоднородностей приводит к уменьшению амплитуды пиков динамической восприимчивости в обеих зонах Бриллюэна. Показано, что скорость уменьшения низко-

частотного пика на краю щели в спектре сверхрешетки при этом превосходит скорость уменьшения высокочастотного пика. В результате этого амплитуды и ширины обоих пиков выравниваются и эффект асимметрии, обусловленный фазовыми 2D-неоднородностями, подавляется. Рост флуктуаций амплитудных 3D-неоднородностей приводит к уменьшению глубины щели в плотности состояний в области запрещенной зоны. При этом происходит некоторое расширение щели.

Таким образом, фазовые 2D-неоднородности, описывающие синфазные деформации всех интерфейсов сверхрешетки, в отличие от фазовых и амплитудных неоднородностей других размерностей, приводят к эффекту асимметрии как динамической восприимчивости, так и плотности состояний на границе зоны Бриллюэна сверхрешетки. Эти эффекты могут наблюдаться экспериментально на магнитных и на оптических сверхрешетках. Следует иметь в виду, что при исследовании динамической восприимчивости методом спин-волнового резонанса эффекты асимметрии, обусловленные корреляциями между интерфейсами, проявляются только при совпадении одного из резонансных волновых чисел  $k_n$  с волновым числом, соответствующим границе зоны Бриллюэна сверхрешетки. При нарушении этого условия в динамической восприимчивости может проявляться асимметрия, обусловленная другими причинами.

Постановка целенаправленных экспериментов по обнаружению исследованных в работах [4, 15, 16] и в данной работе эффектов способствовала бы развитию радиоспектроскопических и оптических методов идентификации присутствия взаимных корреляций между неоднородностями различных интерфейсов в сверхрешетках. Такие эксперименты следует проводить комплексно с экспериментами по исследованию малоуглового рассеяния рентгеновского излучения на тех же образцах. При наличии длинных корреляций между шероховатостями интерфейсов («фазовых 2D-неоднородностей») радиоспектроскопическими или оптическими методами будет наблюдаться появление дополнительного затухания во второй зоне Бриллюэна сверхрешетки, асимметрия пиков восприимчивости и асимметрия плотности состояний на границе зоны Бриллюэна, а методами малоуглового рассеяния — хорошо исследованные теоретически резонансные эффекты в диффузной области спектра рассеяния рентгеновских волн и характерное распределение полос интенсивности на плоскости  $k_x k_z$  волновых векторов [11–14].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Программы № 27.1 Президиума РАН, Государственного контракта № 02.740.11.0220 по Федеральной целевой программе и грантов Целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» за 2009, 2010 и 2011 гг.

## ЛИТЕРАТУРА

1. N. Nishiguchi, S. Tamura, and F. Nori, Phys. Rev. B **48**, 2515 (1993).
2. T. Gruner and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **54**, 1661 (1996).
3. Yunxia Dong and Xiangdong Zhang, Opt. Express **16**, 16950 (2008).
4. V. A. Ignatchenko and Yu. I. Mankov, Phys. Rev. B **56**, 194 (1997).
5. А. Н. Малахов, ЖЭТФ **30**, 884 (1956).
6. С. М. Рыгов, *Введение в статистическую радиофизику*, ч. I, Наука, Москва (1976).
7. V. A. Ignatchenko, Yu. I. Mankov, and A. A. Maradudin, J. Phys.: Condens. Matter **11**, 2773 (1999).
8. V. A. Ignatchenko, Yu. I. Mankov, and A. A. Maradudin, Phys. Rev. B **68**, 024209 (2003).
9. V. A. Ignatchenko and Yu. I. Mankov, Phys. Rev. B **75**, 235422 (2007).
10. S. K. Sinha, E. B. Sirota, S. Garoff, and H. B. Stanley, Phys. Rev. B **38**, 2297 (1988).
11. R. L. Headrick and J.-M. Baribeau, Phys. Rev. B **48**, 9174 (1993).
12. V. Holý and T. Baumbach, Phys. Rev. B **49**, 10668 (1994).
13. E. A. Kondrashkina, S. A. Stepanov, R. Opitz et al., Phys. Rev. B **56**, 10469 (1997).
14. V. Holý, J. Mat. Sci.: Material in Electronics **10**, 223 (1999).
15. В. А. Игнатченко, Ю. И. Маньков, Д. С. Цикалов, ЖЭТФ **134**, 706 (2008).
16. Ю. И. Маньков, Д. С. Цикалов, ФТТ **52**, 505 (2010).
17. R. C. Bourret, Nuovo Cim. **26**, 1 (1962); Canad. J. Phys. **40**, 782 (1962).
18. V. A. Ignatchenko, A. A. Maradudin, and A. V. Pozdnyakov, Phys. Met. Metallogr. **91**, S69 (2001).
19. В. А. Игнатченко, Р. С. Исхаков, ЖЭТФ **72**, 1005 (1977).
20. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).
21. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, Москва (1964).
22. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, Москва (1983).
23. В. А. Игнатченко, Ю. И. Маньков, А. В. Поздняков, ЖЭТФ **116**, 1335 (1999).