

ЭКРАНИРОВКА И КРАЕВЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДВУМЕРНЫХ МЕТАЛЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. Б. Шикин, С. С. Назин*

*Институт физики твердого тела Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 31 декабря 2010 г.

Определена длина λ_0 , на которой у покрытого двумерными ($2D$) электронами края $2D$ -образца сохраняются латеральная, нормальная граница, компонента электрического поля E_{\perp} . Ее наличие и конечность являются следствиями согласованного процесса экранирования электронами металла внешних полей, формирующих границы реальных $2D$ -систем. В рамках приближения среднего поля учтено влияние E_{\perp} на структуру электронных краевых состояний магнитного происхождения (МКС) в широком интервале внешних полей: от квазиклассического предела ($\epsilon_F \gg \hbar\omega_c$) до ситуации с квантовым эффектом Холла (КЭХ), когда $\epsilon_F \ll \hbar\omega_c$ (здесь ϵ_F — энергия Ферми $2D$ -системы, $\hbar\omega_c$ — циклотронная энергия). В квазиклассическом пределе посчитано положение пиков МКС на фоне их идеального распределения вдоль периметра $2D$ -круга в известной задаче о поперечной магнитной фокусировке. В режиме КЭХ предложено систематическое описание структуры скин-слоя с $\lambda_H \geq \lambda_0$, состоящего из набора так называемых целочисленных полосок (перекрывающихся или независимых), являющихся носителями универсальной квантовой проводимости. Обращается внимание на относительно большую вероятность перекрытия полей соседних полосок и возможности описания возникающих при этом связанных целочисленных каскадов. Комментируются существующие данные о туннельном токе через целочисленные полоски в λ_H -слое, дающие полезную информацию о фактическом состоянии границы $2D$ -системы. Отмечена естественная аналогия между свойствами МКС и хорошо известной задачей о деталях баллистической проводимости σ_{\parallel} узких электронных каналов в магнитном поле H . Формализм обеих задач идентичен в условиях $\lambda_H \geq w$, где $2w$ — эффективная ширина квазиодномерного канала. Систематизирована имеющаяся информация о поведении зависимости $\sigma_{\parallel}(H)$ в широком интервале магнитных полей. Наблюдаемые признаки КЭХ в поведении $\sigma_{\parallel}(H)$ наиболее убедительно свидетельствуют о реальности образования разных модификаций целочисленных полосок в неоднородных $2D$ -системах при наличии квантующего магнитного поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Краевые электронные состояния магнитного происхождения (магнитные краевые состояния, МКС) в ограниченных двумерных ($2D$) заряженных системах являются привычным понятием современной физики ограниченных проводящих систем, широко используемым в различных экспериментально реализуемых ситуациях, начиная с резонансов Хайкина [1–3], данных о так называемой поперечной магнитной фокусировке в $3D$ -металлах и $2D$ -аналогах этой задачи [4], о влиянии краевых состояний на магнетосопротивление $2D$ -систем [5, 6], формализме Халперна–Бютикера [7–10], трактующем кван-

товый эффект Холла (КЭХ) как проявление квантовых свойств в проводимости краевых каналов, попытках обнаружения признаков латинжеровости в краевых каналах на сколах $2D$ -системы и в гладкой зоне [11–15], всплеске электронной проводимости на заряженной пленке гелия [16–18] и т. п. При этом в большинстве случаев для качественной трактовки экспериментов достаточен либо сам факт существования МКС, либо интересное общее свойство квантовой универсальности их проводимости.

Что касается деталей структуры самих каналов, то здесь молчаливо сохраняется неопределенность. Если отвлечься от изолированных целочисленных полосок [19, 20], присутствующих в холловских $2D$ -образцах и возникающих в общем случае вдали от $2D$ -границ, то существование даже самых

*E-mail: shikin@issp.ac.ru

популярных МКС со «скачущими» орбитами [1–4] нуждается в естественной, но все же гипотезе о зеркальном отражении замагниченных электронов от идеальной границы металла (введение шероховатости [21, 22] не меняет сути дела). Обсуждение оснований для такой гипотезы и возможные обобщения в задачах с МКС на примере $2D$ -металла в магнитном поле являются предметом дискуссии в данной работе. Актуальности проблемы в целом добавляет имеющая место дискуссия о физическом содержании понятия топологических инвариантов, важную «пробную» роль в выводах которой играет наличие краевых состояний (заряженных или спиновых), возникающих здесь из совершенно общих соображений [23, 24] на границах двух сред с разными значениями топологических индексов.

Суть предлагаемых действий состоит в следующем. Частью задачи о свойствах МКС является механизм отражения электронов от границы образца. Простейшим из них, совместным с общим требованием непротекания тока через границу, является зеркальное отражение электронов [1–3]. Однако «зеркальный» сценарий взаимодействия квазичастиц с границей не самосогласован. Для реальных, достаточно плавных, границ проводящих $2D$ -систем, положение и структуру которых удается рассчитать с хорошей точностью, запрет вылета различных возбуждений за пределы равновесной границы является фактически тестом на ее устойчивость. Это необходимое свойство границы должно согласовано определяться (проверяться) в тех же терминах, что и задача о профиле границы без привлечения внешних ограничений (типа зеркального отражения), влияющих на поведение квазичастиц. Отражение происходит более сложным (но зато более согласованным) способом за счет действия на электроны локальных сил в скрещенных магнитном и электрическом полях, имеющих место (это предстоит доказать) в пограничном слое. В такой постановке вопрос о существовании МКС сводится к аккуратному решению задачи об экранировании внешних полей, принимающих участие в формировании границы металла и демонстрации наличия слоя ширины λ_0 , в котором сосуществуют электроны и конечное электрическое поле, направленное в глубь $2D$ -системы. Это поле и отвечает за «возврат» летящих к границе возбуждений в глубь $2D$ -металла.

Задача о деталях экранировки полей, формирующей границу, имеет смысл и для $3D$ -геометрии, особенно в образцах с относительно небольшой плотностью электронов (невырожденные полупроводники). Но реально значимым вопрос становится в

$2D$ -образцах, где процессы экранирования менее интенсивны (на фоне $3D$ -аналогов), и частичная экранировка — не случайность, а систематическое явление среди характеристик $2D$ -границ. Разобравшись с деталями экранирования (для начала в отсутствие магнитного поля), нетрудно ввести понятие МКС, формируемых внешним магнитным H и скрещенным E_{\perp} полями скин-слоя. При этом в теории возникают две длины: λ_0 и сохраняющий смысл для краевых задач в широком интервале магнитных полей характерный радиус R_c циклотронной орбиты, находящиеся между собой в произвольных соотношениях. Главным достоинством предлагаемого рассмотрения является возможность анализа происходящего в широком интервале внешних параметров, позволяющих проследить за трансформацией свойств МКС от предела $R_c \gg \lambda_0$, где верна существующая теория [1–3] (для состояний такого типа ниже использована специальная аббревиатура КЭС — краевые электронные состояния), к вполне актуальной альтернативе $R_c \ll \lambda_0$.

2. МОДЕЛИ ГРАНИЦ

1. Одним из структурных вариантов границы проводящей $2D$ -системы для сохранения возможностей сравнения КЭС и МКС должен быть идеальный $2D$ -металл, например, с $2D$ -плотностью доноров n_d и расположенными в той же плоскости электронами с плотностью $n_0 = n_d$. Причины θ -образного поведения электронной плотности (т.е. бесконечность потенциальной стенки, удерживающей электроны на фиксированной границе) в этом сценарии не обсуждаются.

2. Более практичная модель изображена на рис. 1. Однородное распределение доноров в интер-

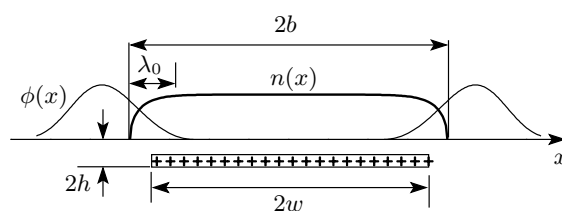


Рис. 1. Схема типичной гетероструктуры с «мягким» профилем электронной плотности $n(x)$. Распределение доноров n_d (показаны знаками «+») описывается θ -функцией. Распределение $n(x)$ и положение границ $\pm b$ даются формулами (1)–(5);
 $\phi(x) = \varphi_1(x, h) + \varphi_2(x, h)$

вале $-w < x < w$ играет для электронов роль прямоугольной ямы конечной высоты. Электроны располагаются вдоль своей плоскости, пространственно-разнесенной с плоскостью доноров, и удерживаются в ее окрестности чисто кулоновским взаимодействием либо с участием энергии нулевых колебаний. В первом из вариантов распределение электронов $n_0(x)$ следует из системы уравнений

$$n_d = \text{const}, \quad z = -h, \quad -w \leq x \leq w, \quad (1)$$

$$e\varphi_1(x, z) + e\varphi_2(x, z) = \text{const}, \quad z = h, \quad -b \leq x \leq b, \quad (2)$$

$$\varphi_1'(x, z) = \frac{2e}{\kappa} \int_{-b}^b \frac{(x-s)n_0(s)}{(x-s)^2 + (z-h)^2} ds, \quad (3a)$$

$$\varphi_2'(x, z) = -\frac{2e}{\kappa} \int_{-w}^w \frac{(x-s)n_d}{(x-s)^2 + (z+h)^2} ds, \quad (3b)$$

$$N = \int_{-b}^b n_0(x) dx = 2wn_d, \quad (4)$$

решение которой имеет вид

$$\frac{e^2}{\kappa} n_0(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{b^2 - x^2} \int_{-b}^b \frac{\Phi'(s) ds}{\sqrt{b^2 - s^2}(s-x)}, \quad (5)$$

$$\Phi(x) = \ln \frac{w+x}{w-x} - \ln \sqrt{\frac{(w+x)^2 + 4h^2}{(w-x)^2 + 4h^2}},$$

где κ — диэлектрическая постоянная среды, $2h$ — эффективное расстояние между донорами и электронным слоем, $w \gg h$ — один из латеральных размеров сэндвича, N — число электронов на единицу длины канала, штрих означает производную по x ; структура в целом нейтральна. Располагая выражениями (5) и условием (4), нетрудно посчитать величину $2b \neq 2w$ в терминах $2wn_d$ и деталей поведения $\Phi(x)$. Как и ожидалось (в силу общей нейтральности задачи), плотность $n_0(x)$ (5) вместе с подложкой из доноров образовали в окрестности точек $\pm w$ дипольные окончания с плечом диполей порядка $h \ll w$. Свойство $(dn_0/dx)|_{x \rightarrow \pm b} \neq 0$ — частное проявление обычного устройства границы $2D$ -металла: в окрестности точек $\pm w$, фиксирующих границы распределения доноров, электронная плотность $n_0(x)$ теряет свою однородность. В аналогичных задачах $3D$ -размерности по изучению КЭС эффекты, обусловленные граничными изменениями плотности, как правило, опускаются [25].

Одним из вариантов электронных $2D$ -образований, упоминаемых ниже, является структура $n_0(x)$ электронного канала в параболическом удерживающем потенциале $V(x)$ (одна из моделей квазиодномерного канала):

$$\frac{e^2}{\kappa} n_0(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{b^2 - x^2} \int_{-b}^b \frac{V'(s) ds}{\sqrt{b^2 - s^2}(s-x)} \equiv \frac{2N}{\pi b} \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right), \quad (6)$$

$$V(x) = V_0 + kx^2/2, \quad b = 4e^2N/\kappa k. \quad (6a)$$

Для определений (6), (6a) величина b вычисляется в явном виде.

Еще один полезный пример — неэкранированный $2D$ -диск Корбино радиуса R с металлическими контактами:

$$n_0(x) = \frac{n_0}{\sqrt{1 - x^2/w^2}}, \quad n_0 = \frac{\kappa W}{\pi^2 e^2 w}, \quad (7)$$

где $2w$ — ширина квазиодномерной (в смысле пренебрежения кривизной диска, $2w \ll R$) $2D$ -полосы между металлическими берегами, W — контактная разность потенциалов.

Возвращаясь к формулам (1)–(5), естественно полагать (так принято в литературе), что область $-b \leq x \leq b$, занятая электронами, полностью экранирована от внешнего воздействия (внутри нее сумма всех полей, способных возмущать свободное движение электронов, равна нулю, хотя плотность весьма неоднородна). Интересуясь далее относительно слабыми на фоне полей, формирующих плотность $n_0(x)$, эффектами, сглаживающими скачкообразное поведение полей и плотности в переходных областях, надо использовать известные средства, учитывая в условии постоянства электрохимического потенциала μ подходящую добавку ζ химического происхождения. Вблизи бортов $\pm b$ такая корректировка в общем случае нелинейна. В глубине металла для ζ имеет смысл приближение Томаса–Ферми. При этом условие равновесия в целом остается линейным по плотности. Однако при очень малых плотностях структура добавки ζ должна становиться бальцмановской.

Начнем с приближения Томаса–Ферми [26]:

$$e\varphi_1(x, h) + e\varphi_2(x, h) + \frac{\hbar^2}{2m} n(x) = \text{const}, \quad (8)$$

$$\int_{-c}^c n(x) dx = N, \quad -c \leq x \leq c.$$

Наличие в равновесном условии (8) энергии Ферми $\epsilon_F \propto n(x)$ свободных $2D$ -квазичастиц разумно в глубине металла вдали от границ $\pm c$, несколько сдвинутых по отношению к $\pm b$. На самих этих границах положение дел хуже, но качественно приемлемо.

Некоторые важные для дальнейшего заключения следуют уже из самого вида уравнения (8). Главное из них — появление в системе электронов на ее краях зон неполной экранировки, или статического скин-слоя. Такими областями, заполненными электронами, мы называем промежутки с

$$U(x) = e\varphi_1(x, h) + e\varphi_2(x, h) \neq \text{const}. \quad (9)$$

Согласно (8),

$$\begin{aligned} U(x) &\neq 0, & |x| &\geq c, \\ U(x) &= \text{const} - \hbar^2 n(x)/2m, & |x| &\leq c, \end{aligned} \quad (9a)$$

или, используя решение (5) для электронной плотности $n_0(x)$, имеем приближенно

$$\begin{aligned} U_0(x) &\neq 0, & |x| &\geq c, \\ U_0(x) &= \text{const} - \hbar^2 n_0(x)/2m, & |x| &\leq c. \end{aligned} \quad (9b)$$

Таким образом, $U'(x) \neq 0$ за пределами границ $2D$ -металла (что неудивительно) и на определенном расстоянии λ_0 , называемом условно глубиной скин-слоя при погружении в его массив.

Различные явления, связанные с неполной экранировкой $2D$ -электронами внешнего поля, хорошо известны в литературе. К их числу относится, например, задача о дискретной составляющей электронного спектра в узких каналах [27–30] (наши ограничения по ссылкам в этом серьезно продвинутом направлении неизбежно субъективны), прямые наблюдения неполной экранировки внешнего поля тонкой пленкой $2D$ -металла [31], детали развития неустойчивости на заряженной поверхности гелия [32], упоминавшиеся выше процессы с образованием целочисленных полосок [19, 20] и т. п. На работах [27–30], эффектно иллюстрирующих взаимосвязь происходящего на границах проводящих $2D$ -систем, остановимся несколько подробнее.

Узкими принято называть $2D$ -каналы, для которых энергия $\epsilon_l(p)$ одночастичных возбуждений представима в виде

$$\epsilon_l(p) = \epsilon_l + \epsilon(p), \quad \Delta\epsilon_l = \epsilon_{l+1} - \epsilon_l \gg T. \quad (10)$$

Удивительные свойства таких каналов проявляются особенно ярко при обсуждении деталей их баллистической проводимости $\sigma_{||}$,

$$\sigma_{||}(\zeta) = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_l \frac{1}{1 + \exp[(\epsilon_l - \zeta)/T]}, \quad (10a)$$

где ζ — химический потенциал задачи. При его «движении» за счет изменения, к примеру, полной плотности частиц на единицу длины канала проводимость $\sigma_{||}(\zeta)$ (10a) растет квантовыми скачками, не зависящими от его материальных свойств, и это предсказание четко наблюдается [27–29] (количество ссылок можно неограниченно увеличивать).

Пока обсуждение свойств $\sigma_{||}$ ведется в терминах ζ , картина скачков проводимости проста и убедительна. Однако реально приходится иметь дело с зависимостями $\sigma_{||}(V_g)$ либо $\sigma_{||}(H, V_g)$, где V_g — управляющее напряжение, H — магнитное поле, и здесь возникает тот же, что и в интересующей нас задаче об отражении, завязанный через экранировку вопрос о сосуществовании коллективных и одночастичных свойств электронов. Пусть, например, речь идет о форме потенциала, квантующего в духе (10) одноэлектронное движение. При работе с узкими каналами имеются наблюдаемые возможности контролировать степень прямоугольности удерживающего потенциала. Для начала предположим, что дискретная часть спектра в задаче (6) контролируется лишь кулоновскими границами канала $\pm b$. В этом случае дискретная часть спектра ϵ_l (10) пропорциональна b^{-2} . Имеется, однако, и силовой сценарий квантования величины ϵ_l . Используя вслед за авторами работ [29, 30] приближение среднего поля, посчитаем эффективный одноэлектронный потенциал $\tilde{V}(x)$, квантующий поперечное движение электронов в глубине канала. При этом выясняется, что потенциал $\tilde{V}(x)$ остается параболическим, хотя кривизна k исходного удерживающего потенциала $V(x)$ в (6a) серьезно перенормируется за счет экранирующего влияния конечной плотности электронов в канале на эффективный одноэлектронный потенциал:

$$k \rightarrow \tilde{k} \approx ka_B/b \quad (10b)$$

(a_B — боровский радиус). Очевидно, что в области $a_B/b \ll 1$ силовое воздействие на одноэлектронное движение в глубине канала пропадает. Другими словами, из двух возможных причин квантования спектра $\epsilon_l(p)$ — силовой и геометрической — одна пропадает в области $a_B/b \ll 1$, вторая формально вообще не зависит от этого параметра, ориентируясь лишь на величину $|b|$. Такое положение дел содержит перспективы для поисков наблюдаемой разницы в поведении каналов.

Продолжая обсуждать результат (10b), замечаем, что величину \tilde{k} можно извлечь из данных об осцилляциях Шубникова–де Гааза (ШдГ) для магнитопроводимости узкого канала. Кривизна k определяет положение поперечной дипольной плазменной

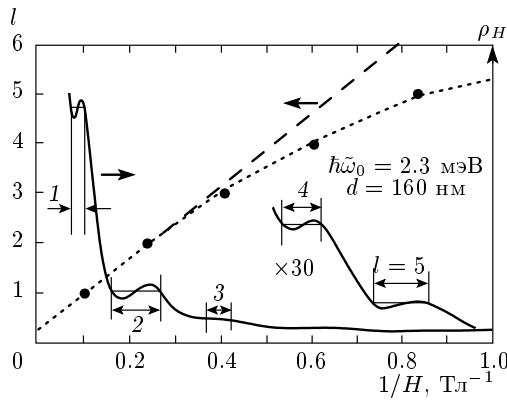


Рис. 2. Индекс l осцилляций Шубникова–де Газа для сопротивления узкого электронного канала, иллюстрирующий *a*) отклонение поведения этих осцилляций от закона $\rho_{max}(H) \propto H^{-1}$ (левая ордината, данные работы [28]) в связи с участием в задаче эффективной частоты $\tilde{\omega}^2$ (16) и *b*) осцилляции полного холловского сопротивления $\rho_H(H)$ для этого же канала в режиме КЭХ (правая ордината, данные работы [28]). Обращает на себя внимание сам факт наличия холловских плато $l = 1-5$ в отсутствие настоящих (резких) границ (система каналов приготовлена [28] химическим травлением, т. е. края канала, имеющего эффективную ширину d , не могут быть атомно-резкими). Профили плато искажены (как и положено для полного холловского сопротивления) влиянием диагональной компоненты сопротивления

частоты ω_d для электронов в канале (6а), поскольку $\omega_d^2 = k/m$ (m — масса электрона). Сравнение величин k и \tilde{k} , выполненное в работах [28, 30], свидетельствует об их различии в несколько раз. Это наглядно иллюстрирует многоэлектронный характер задачи в целом, возможность выделения на этом фоне одноэлектронных фрагментов задачи силового происхождения, важных для понимания свойств величин $\epsilon_l(p)$ и $\sigma_{||}(\zeta)$, и предпочтение параболической модели канала (некоторые детали этого сравнения, существенно использующие обсуждаемую ниже зависимость $\epsilon_l(p)$ для узкого канала в магнитном поле, приведены на рис. 2).

Результаты работ [29, 30], предшествующие введению изложенного выше одноэлектронного языка (10), дают возможность определиться с понятием и ролью скин-слоев на границах проводящих 2D-систем. Интересуясь лишь деталями профиля, можно назвать и более тщательные его расчеты без обсуждения одноэлектронных следствий [12]. Качественно новыми на этом пути оказываются дета-

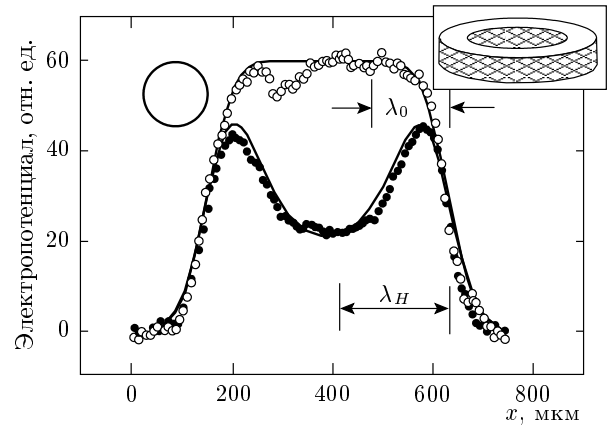


Рис. 3. Экспериментальное распределение потенциала вдоль сечения экранированного 2D-диска Корбино в нормальных и КЭХ-условиях по магнитному полю. Длины λ_0 , λ_H иллюстрируют положение и масштаб скин-слоев в отсутствие (светлые точки) и при наличии целочисленных полосок (темные точки). Кругок в левой верхней части рисунка — примерная площадь сканирующего лазерного пучка. Вверху справа — геометрия диска

ли неполной экранировки, возможно, существенные для дробного КЭХ [11]. Разумность упрощений, используемых в работах [29, 30], на уровне КЭХ подкрепляется рядом предсказаний, нашедших в дальнейшем экспериментальную поддержку. Наиболее интересным из них следует признать серьезную перенормировку кривизны k исходного удерживающего потенциала (6а) за счет экранирующего влияния конечной плотности электронов в канале на эффективный одноэлектронный потенциал и трактовку данных о поведении зависимости $\sigma_{||}(H, V_g)$ при небольших значениях индекса заполнения l .

Дополняя имеющий отношение к предмету дискуссии набор сведений о поведении неоднородных электронных систем уже известными результатами, уместно привести данные из работ [33, 34] для распределения экранирующих полей $U(x) \neq 0$ на краях 2D-диска Корбино с металлическими контактами (рис. 3). Причиной неоднородности $n_0(x)$ в данном случае являются практически всегда существующий скачок контактной разности потенциалов на границах 2D-системы с металлическими контактами и, как следствие, деформация 2D-плотности вида (7). Положение и ширина эффективного статического скин-слоя на рис. 3 отмечены интервалом λ_0 в его правой верхней части. В условиях $H = 0$ наличие скин-слоя не очень выражено в связи с примерно одинаковыми масштабами длины λ_0 и периметра

лазерного пучка (его сечение для наглядности приведено в левой верхней части рисунка). Значительное расширение области $U(x) \neq 0$ в условиях КЭХ, фигурирующее через интервал $\lambda_H > \lambda_0$ в нижней части рисунка, комментируется ниже.

3. СИТУАЦИЯ В СЛАБОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: ОБЛАСТЬ $\epsilon_F \geq \hbar\omega_c$

1. Для выяснения деталей происходящего с образованием КЭС в магнитном поле начнем с идеальной модели, не имеющей скин-слоев. Согласно квазиклассической версии этого явления, исходным здесь является определение периода T_{es} (edge states) одного скачка при движении электрона вдоль зеркально отражающей границы:

$$T_{es} = \frac{2}{\omega_c} \arctg \frac{v_x}{v_y}, \tag{11}$$

где ω_c — циклотронная частота, v_x и v_y — компоненты скорости электрона в момент его отражения от границы. Фрагмент траектории (11) представлен на рис. 4а. Общие правила квазиклассического квантования позволяют найти соответствующий спектр КЭС, известный со времен работ [1–3] и возникающий, согласно (11), при любых, сколь угодно малых магнитных полях, если $T_{es}\omega_c < 1$ и достаточно велика длина пробега свободных электронов, желательная превышающая радиус циклотронной орбиты.

2. В металле со скин-слоем (например, в 2D-системе (8)), как и на резкой границе, при включении магнитного поля возникают МКС, являющиеся основным предметом нашего внимания. Для наглядности и без претензий на числа обсудим квазиклассическую картину поведения электронов, влетающих из глубины металла в его скин-слой, который

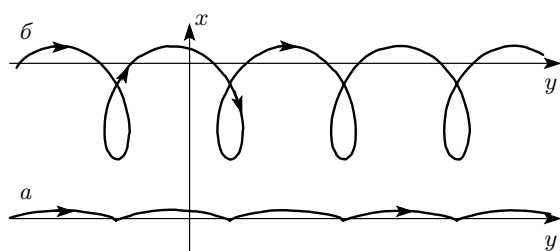


Рис. 4. а) Классическая электронная орбита для КЭС при наличии зеркального отражения от плоскости $x = 0$. б) Схематический вид орбиты для электронных МКС при конечном наклоне отражающей стенки

с учетом выражений (8), (9а) и из соображений аналитической доступности, моделируется простым изломом с заданным наклоном потенциальной стенки:

$$U'(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ eE_x^l \neq 0, & x < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Начало координат задачи (6)–(8) перенесено здесь в точку $x = x_l$, происхождение которой (а также и масштаб поля E_x^l) нуждаются в комментарии. Краевые состояния, как правило [1, 3], вводятся некоей непрерывной добавкой к данному уровню Ландау. В интересующей нас квазиклассике при большом числе заполненных уровней Ландау химический потенциал ζ из (8) продолжает оставаться по форме фермиевским¹⁾. Но связь между понятиями « l -й уровень» Ландау и «профиль $n(x)$ » уже можно «нащупывать» требованием

$$\pi l_H^2 n(x_l) = \nu_l, \quad \nu_l = 1, 2, 3, \dots \tag{12a}$$

(l_H — магнитная длина), определяющим положение координаты $x = x_l$ на профиле $n(x)$. В этих терминах с учетом (8) возникает электрическое поле для (12):

$$eE_x^l \approx \frac{\hbar^2}{2m} \frac{dn}{dx} \Big|_{x=x_l}. \tag{12b}$$

Определение поля eE_x^l (12b) согласованно коррелирует с происходящим и в сильных магнитных полях, когда $\epsilon_F \ll \hbar\omega_c$, а характерные значения коэффициента заполнения ν_l становятся близкими к единице (подробнее см. ниже комментарии к выражению (33)).

Аппроксимация (12) имеет смысл и в рамках процедуры по выяснению степени устойчивости задачи об отражении замагниченного электрона от вертикальной стенки со слегка варьируемыми параметрами (высотой и наклоном). В этой связи отметим работу [27], в которой вертикальные стенки заменялись параболическими, плавно продолжающими дно канала, без каких-либо указаний на физику происходящего (т.е. без выяснения причин существования E_x в конечном слое λ_0). Сам спектр рассчитывался

¹⁾ В условиях $H \neq 0$ известное определение химической части ζ из (8) трансформируется из интеграла в сумму по дискретным числам l . Тем не менее, используя формулу (правило Пуассона)

$$\sum_{l=0}^{\infty} f\left(l + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} f(x) dx + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \int_0^{\infty} f(s) \cos(2\pi xs) dx,$$

имеем (как и в (8)) основной член $\zeta = (\hbar^2/2m)n$. Это слагаемое остается определяющим в ζ , пока $\epsilon_F \gg \hbar\omega_c$.

численно в квазиклассическом приближении. Никаких других попыток решения задачи об отражении от квазивертикальной стенки авторы не знают.

В задаче (12) естественно (как и в (11)) ввести характерные времена при движении электрона по сложной орбите вдоль границы $x = 0$:

$$T_{ses} = T_{in} + T_{out}, \quad \omega_c T_{ses} \leq 1. \quad (13)$$

Здесь T_{ses} (soft edge states) — полное время цикла, T_{in} — часть цикла, проводимая электроном внутри полосы (т.е. в области $x > 0$) на орбите с $R \gg l_H$, а T_{out} — соответствующее время, проводимое электроном за его пределами в зоне $x < 0$. Движение является краевым, если полное время цикла меньше обратного циклотронного времени, что и зафиксировано неравенством (13).

Задача (12) дает представление о деталях классической динамики электрона в замагниченном режиме, когда ширина слоя λ_0 меньше или сравнима с размерами циклотронной орбиты. Фрагмент одной из траекторий МКС изображен на рис. 4б. Начиная движение с какой-либо фиксированной скоростью вдоль оси y в области без электрического поля, электрон движется по сегменту циклотронной орбиты аналогично идеальному случаю (см. рис. 4а). Однако на границе раздела ему нет смысла отражаться (нет причин для резких изломов траектории, или, более формально, резкого повышения энергии электрона). Взамен траектория непрерывно пересекает границу, продолжая движение уже в скрещенных полях (рис. 4б). Решение соответствующих классических уравнений [35] подтверждает интуитивную картину и дает явные значения характерных времен

$$T_{in} = \frac{2}{\omega_c} \arctg \frac{v_x}{v_y}, \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_c T_{out}) + \tg \alpha \sin(\omega_c T_{out}) &= 1, \\ \ctg \alpha &= \frac{v_y}{v_x} - \frac{cE_x^l}{Hv_y}. \end{aligned} \quad (14b)$$

Здесь $eE_x^l = U'(x)$ — эффективное электрическое поле за пределами $2D$ -системы, которое полагается постоянным в окрестности каждой из точек x_l . В процессе движения по трохоиде компоненты v_y, v_x связаны между собой условием

$$\epsilon_l(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \frac{p_{\parallel}^2}{2m} + \frac{p_{\perp}^2}{2m} \quad (15)$$

с сохранением импульса электрона p_{\parallel} .

В целом, наглядная картина (12)–(15) полезна для связи деталей спектра $\epsilon_l(p_{\parallel}, p_{\perp})$ (15) и геометрических характеристик электронных орбит, с использованием которых трактуется, кстати, вся разнообразная деятельность по изучению явления поперечной фокусировки [4].

Существующая теория КЭС, квантовая [3] либо ее квазиклассические аналоги [1, 21, 22], манипулирует лишь траекториями класса T_{in} . Вторая поворотная точка здесь лежит на вертикальной границе, обеспечивая зеркальность отражения от (в нашем случае) линии $x = 0$. Право на такое отражение может обеспечиваться неравенством $\epsilon_F \gg \hbar\omega_c$. Микроскопическое обоснование сводится к решению волнового уравнения в некоем потенциале, препятствующем прохождению электрона за границы удерживающего потенциала. Общий способ получения отражения связан с имеющим место упрощением волнового уравнения до его эйри-формы без участия магнитного поля. Известное квантовое решение [3] задачи о спектре КЭС в магнитном поле, так же как и в квазиклассике [21, 22], не касается проблемы поворота электронов на отражающей стенке, постулируя сохранение ее зеркальности. В этом смысле фигурирующие в расчетах [3] функции Эйри, к сожалению, не «следят» за трансформацией механизма отражения.

Проблема введения магнитного поля в электронный спектр, естественно, фигурирует и в задаче для электронов в узких каналах. Эта задача без труда решается (вслед за работой [36]) в параболическом приближении (6а). Как правило, речь идет о цилиндрически-симметричном осцилляторе с дважды (по часовой стрелке и против) вырожденными уровнями. Магнитное поле снимает это вырождение (эффект Зеемана), приводя в цилиндрической задаче к расщеплению каждого из уровней осциллятора. В одномерной параболической задаче без спина причин для вырождения нет. Поэтому в спектре с магнитным полем расщепление уровней отсутствует,

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_l(p) &\approx V_0 + \hbar\tilde{\omega} \left(l + \frac{1}{2} \right) + \frac{p^2}{2M}, \\ \tilde{\omega}^2 &= \frac{\tilde{k} + k_c}{m}, \quad k_c = m\omega_c^2, \quad M = m \frac{\tilde{k} + k_c}{\tilde{k}}, \end{aligned} \quad (16)$$

величина \tilde{k} определена в (10б). Очевидно, что спектр $\tilde{\epsilon}_l(p_y)$ становится более жестким, причем характерная частота $\tilde{\omega}$ содержит элементы удержания (вклад \tilde{k}) и влияния магнитного поля через k_c . В результате, например, осцилляции ШдГ для проводимости σ_{\parallel} вдоль канала перестают быть эквиди-

стантными в обратном магнитном поле — факт, отмеченный и объясненный в ряде работ с баллистическими каналами (см. [28, 30, 37–39] и рис. 2 из работы [28], иллюстрирующий поведение индекса осцилляций ШдГ для σ_{\parallel} кулоновского канала в области, где $\tilde{\omega}^2$ конкурирует с ω_c^2).

В отличие от параболического варианта границ, по определению содержащего элементы «мягкости», задача с прямоугольными стенками имеет в своем активе (по крайней мере, на сегодня) введение магнитного поля лишь в пределе их бесконечной жесткости (работы, начиная с [1]). Из известных нам попыток совместить плоское дно канала с относительно мягкими стенками можно, как уже сказано выше, отметить работу [27]. Здесь вертикальные стенки заменялись параболическими, плавно продолжающими дно канала. Естественно, поворотные точки электронных траекторий становились, как и в наших формулах (12)–(14), чисто силовыми. Какие-либо другие результаты со смешанным участием геометрии и силового воздействия в задаче об отражении электронов от рыхлой стенки в магнитном поле нам не известны, хотя они вполне актуальны.

Так или иначе, в области $\epsilon_F \geq \hbar\omega_c$ одноэлектронный спектр $\tilde{\epsilon}_l(p_y)$, контролирующий ступенчатую проводимость (10), приобретает смешанный вид типа (16), положение полок $\sigma_{\parallel}(\zeta)$ (10а) начинает чувствовать магнитное поле, и это обстоятельство накладывает видимый отпечаток на осцилляции ШдГ. Определяя индекс осцилляций $l(H)$ формулой [30]

$$l(H) = l_0 \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{\tilde{k}}{m}, \quad (16a)$$

где l_0 — число заполненных зон канала в отсутствие магнитного поля, нетрудно видеть, что с ростом магнитного поля индексы $l(H)$, меняясь в сторону уменьшения, выходят на асимптотику $l(H) \propto 1/H$. Это обстоятельство хорошо просматривается на рис. 2, где левая часть зависимости $l(H)$ действительно имеет вид $l(H) \propto 1/H$, а правая асимптотика следует рекомендациям (16а).

Для дальнейшего полезно отметить, что энергетическая трактовка формулы (16а) связывает положение осцилляций ШдГ и всплесков холловского сопротивления (правая шкала на рис. 2) с поведением $\omega_c^2(H)$, что в общем случае неоднозначно (подробнее см. ниже формулы (38), (39) и дискуссию вокруг них).

3. Определения (12)–(14) и приведенные комментарии к ним дают основания для рассмотрения на классическом уровне альтернативы КЭС или МКС

для одного из самых показательных краевых эффектов — геометрического квантования ВАХ, возникающего из требования совместимости длины L периметра $2D$ -системы с пространственной длиной l одного прыжка замагниченного электрона вдоль этого периметра:

$$L/l = 2n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Эффект дискретности спектра (17) в разных вариантах — от большего числа измерений магнитоосцилляций ВАХ между точечными электродами на поверхностях $3D$ -металлов и идейно аналогичных явлений в $2D$ -системах — наблюдался разными авторами (см., например, работы [4, 40, 41]). Эксперимент [42] отметим специально, так как он используется нами для выяснения разницы между следствиями дискретности (17) для КЭС и МКС. Рисунок 5 содержит значения магнитных полей для различных n , отвечающих условию (17) при идеальном отражении от периметра диска (сплошные линии) и аналогичные поля при использовании в условии (17) длины прыжка при конечном значении eE_x^l (штрихи). Очевидно, разница между сплошными и штрихованными пиками увеличивается как с ростом номера n , так и при вариациях поля eE_x^l (рис. 5а). Резонансы вида (17) хорошо видны на ВАХ из работы [42]. Поэтому проследить за альтернативой КЭС или МКС, а значит, и составить представление о степени зеркальности каждого из отражений в квазиклассической области параметров, не составляет труда.

4. СИЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ: ОБЛАСТЬ $\epsilon_F \leq \hbar\omega_c$

В обратном предельном случае, $\epsilon_f \ll \hbar\omega_c$, пропадает понятие кинетической энергии, квазиимпульса и других атрибутов свободного движения квазичастиц внутри металла, но не на его границе.

Пока $\lambda_0 < R_c$ (а для резкой границы это требование выполнено всегда), инфинитное движение вида (11) для электронов, скачущих вдоль бесконечно вертикального барьера, сохраняется, гарантируя универсальность описания [1, 3] динамики электронов с θ -образным распределением плотности при переходе от слабых к сильным (в смысле $\epsilon_F \leq \hbar\omega_c$) магнитным полям. Но проблема обоснования θ -модели в приложениях к задачам на реальных границах (например, вопрос о баллистической проводимости $\sigma_{\parallel}(H)$ узкого канала, как это сделано в известной работе [39] со ссылкой на [1]), не имеет шансов на успех.

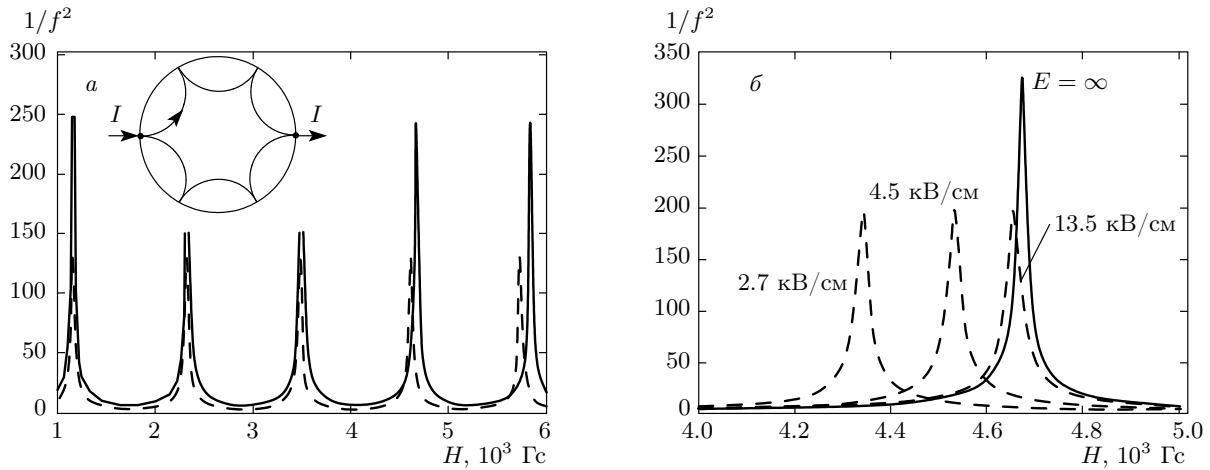


Рис. 5. а) Сравнительное положение геометрических всплесков (17) проводимости для КЭС (сплошные кривые, $E = \infty$) и МКС в рамках модели (12)–(15) (штриховые кривые, $E = 7.2$ кВ/см). По оси ординат отложена величина, обратно пропорциональная квадрату отклонения отношения L/l от ближайшего целого числа, т.е. $f = |L/l - [L/l + 0.5]|$ (здесь $[a]$ — целая часть числа a). Положение пиков крайне чувствительно к наклону вертикальной стенки. Для наглядности использованы не очень большие отклонения от вертикали, чтобы сохранить принадлежность пиков к одному и тому же значению n ; расстояние между пиками быстро увеличивается с ростом n . б) Развертка положения МКС по эффективному электрическому полю в окрестности одного из идеальных пиков

В отличие от θ -модели, детали сценария со скин-слоями, где нет вопросов с учетом реального профиля $n(x)$ исходного канала, качественно меняются при варьировании соотношения между λ_0 и R_c . Как правило, переход от одного предела к другому имеет место в области $\epsilon_F \leq \hbar\omega_c$. Сам скин-слой приобретает причудливый полосатый вид: его структура заметно меняется, оказываясь в некоторых случаях представленной конечным числом так называемых несжимаемых полосок с целочисленными факторами заполнения. А детали поведения холловского сопротивления ρ_H начинают перестраиваться на мотивы, связанные с КЭХ.

1. Анализ общей картины экранирования для $2D$ -системы с мягким профилем $n(x)$ в условиях $\epsilon_F \leq \hbar\omega_c$ удобно начать с определения свойств целочисленных полосок, введенных в обиход авторами работ [19, 20] и органически связанных с общей структурой длины экранирования λ_H . Кроме того, речь идет о законности регулярно используемого в литературе разбиения задачи на две: процедуру экранирования, способствующего образованию МКС, а затем с ее помощью определение спектра $\epsilon_l(p)$. Вариант рассмотрения, согласованно решающий проблему «МКС + экранировка» и приемлемый именно для условий $\epsilon_F \leq \hbar\omega_c$, предлагается ниже.

Исходной, как и в (2), (8), является общая связь

между $n(x)$ и микрохарактеристиками электронной системы в приближении среднего поля (в задачах, подобных обсуждаемой, связь интересующего нас типа использовалась например, в работе [29]):

$$n(x) = \frac{g}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \sum_l |\psi_l(x-x_0)|^2 f[\epsilon_l(p_y) - \mu], \quad (18)$$

где

$$x_0 = -l^2 q_y, \quad p_y = \hbar q_y,$$

$$\int |\psi_l(x)|^2 dx = 1, \quad T \ll \hbar\omega_c.$$

Здесь g — спиновое вырождение, $|\psi_l(x-x_0)|^2$ — квадрат l -й волновой функции, $\epsilon_l(p_y)$ — электронный спектр для волнового уравнения в скрещенных магнитном поле и поле $U(x) = e\varphi_1(x, \hbar) + e\varphi_2(x, \hbar)$, $f(x)$ — функция Ферми, μ — положение электрохимического потенциала.

Одно из дополнительных (наряду с использованием среднего поля) упрощений, систематически используемых для описания свойств замагниченных электронов в неоднородных средах, — приближение дрейфовой скорости. Полагается, что в сильных полях можно в поисках общей, достаточно гладкой картины неоднородных полей пренебрегать быстрыми, хорошо видимыми на рис. 4б, осцилляциями электронного движения вокруг дрейфовой орбиты (см., на-

пример, [35, 43, 44]). Кроме того, лишь в этом приближении можно «добраться» до картины целочисленных полосок из работ [19, 20]. Итак,

$$\begin{aligned} \epsilon_l(p_y) &\approx \hbar\omega_c \left(l + \frac{1}{2} \right) + U(x_0), \\ U(x) &= e\varphi_1(x, h) + e\varphi_2(x, h). \end{aligned} \quad (19)$$

Спектр (19) имеет интуитивно ожидаемый вид: в глубине $2D$ -металла, где $U(x) = \text{const}$, дисперсия энергии $\epsilon_l(p_y)$ пропадает. Если же выходить за пределы $\pm b$ на большие расстояния, то энергия $\epsilon_l(p_y)$ приобретает дисперсию, пропорциональную U' . Просматривается соответствие между определениями спектров (19) и (15), (16).

Считая далее, что для низлежащих уровней ($l \geq 1$) функция $|\psi_l(x - x_0)|^2$ обладает δ -функционными свойствами, выполним в выражении (18) с учетом (19) интегрирование по dp_y :

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \sum_{l=1}^N f \left[\hbar\omega_c \left(l + \frac{1}{2} \right) + U(x) - \mu \right], \\ \int_{-\infty}^{\infty} \nu(x) dx &= \pi l_H^2 N. \end{aligned} \quad (20)$$

Ограничившись в (18)–(20) двумя нижними уровнями Ландау, инвертируем полученное выражение относительно μ :

$$\mu(H, \nu, x) = \hbar\omega_c + U(x) - T \ln S(H, \nu(x)), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} S(H, \nu) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right)^2 + \epsilon \left(\frac{2}{\nu} - 1 \right)}, \\ -T \ln S &= \begin{cases} 0, & \nu \rightarrow 1 - 0, \\ \hbar\omega_c/2, & \nu \rightarrow 1 + 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\epsilon = \exp(-\hbar\omega_c/T) \ll 1, \quad (21b)$$

$\nu(x) = \pi l_H^2 n(x)$ — соответствующий фактор заполнения. Процедура (21), как и предшествующая (20), лишает наше рассмотрение общности по индексу l , но сохраняет главный мотив: желание иметь согласованное решение задачи о целочисленной полоске в духе работ [19, 20]. В этой задаче согласование оказывается качественно важным, особенно в специальных точках x_l на профиле $n(x)$, имеющих целочисленное значение фактора заполнения ν_l ,

$$\pi l_H^2 n(x_l) = \nu_l, \quad \nu_l = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

В их окрестности разыгрывается энергетически выгодная автоперестройка локальной плотности

вплоть до создания полок конечной ширины $2a$ с целочисленным фактором заполнения. Излагая (на фоне [19, 20]) свою точку зрения на это явление, мы преследуем две цели. Во-первых, основное предположение работ [19, 20] о возникновении плато с $\partial n(x_l)/\partial x = 0$ само нуждается в обосновании. Во-вторых, хотелось бы видеть, как задача возникновения целочисленных полосок встраивается в общую картину экранирования $2D$ -металлом внешних полей и что сохраняется (теряется) при отсутствии в экранирующем скин-слое условий для формирования индивидуальных полосок.

Требование

$$\mu(H, \nu(x)) = \text{const} \quad (23)$$

определяет равновесные свойства замагниченной $2D$ -системы с неоднородным распределением $U(x)$ и конечной эффективной массой электронов. Это требование заменяет собою условие (2) либо (8).

Полагая, как и в [19, 20], что поля соседних полосок не влияют друг на друга, вычитая из (23) условие (2) и записывая эту разность в окрестности одной из точек со свойствами (22), можно получить следующее уравнение:

$$\frac{2e^2}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{n(s) - n_0(s)}{x - s} = - \frac{\partial \zeta_l}{\partial n} \frac{\partial n(x)}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow x_l}, \quad (24)$$

где

$$\zeta(H, \nu) \approx -T \ln S(H, \nu),$$

$$\pi l_H^2 n(x_l) = \nu_l, \quad \nu_l = 1, 2, 3, \dots,$$

$\zeta_l(H, \nu)$ — химическая часть электрохимического потенциала в окрестности точки x_l .

Уравнение (24), технически пригодное для работы в условиях, близких к целочисленному заполнению основного уровня, позволяет следить за деталями происходящего. В областях с $x \neq x_l$ производная $\partial \zeta_l / \partial n$ (а с нею и вся правая часть выражения (24)) мала. В этих зонах имеет место полная экранировка, т. е. $n(x) - n_0(x) \rightarrow 0$. Если же речь идет о точках со свойствами $\pi l_H^2 n_0(x_l) = \nu_l$, то величина $\partial \zeta_l / \partial n$ резко возрастает, ибо функция $\zeta_l = -T \ln S(\nu)$ (21a) здесь имеет скачки. Возникает в общем-то ожидаемая [45] потеря экранировки в областях, близких к целочисленным, что ведет к возникновению разности $n(x) - n_0(x) \neq 0$. Специальный интерес к полоскам из работ [19, 20] обусловлен, в частности, их регулярным расположением вдоль $1D$ -канала, что позволяет приписывать им свойства отдельных баллистических носителей тока в неоднородной среде.

Формула (24), экзаменуемая на предмет существования эффектов уплощения по сечению полосок, подтверждает его наличие для точек со свойствами $\pi l_H^2 n_0(x_l) = \nu_l$ на склонах профиля $n_0(x)$ (3), (4). В самом деле, если $\partial\zeta_l/\partial n$ в (24) расходится, то производная $\partial n(x_l)/\partial x$ при конечном значении интеграла в левой части равенства (24) должна стремиться к нулю. Это, в свою очередь, означает, что локальная область распределения $n(x)$ с целочисленным фактором в центре должна растягиваться, превращаясь, согласно [19, 20], из точки в некую полоску конечной ширины $2a$. Определим сперва свойства уравнения (24) в центральной области предполагаемого уплощения. Правая его часть равна

$$n'(0) \left. \frac{\partial\zeta_l}{\partial n} \right|_{x=x_l} \approx n'(0) \pi l_H^2 \frac{\partial\zeta_l}{\partial\nu_{max}}. \quad (25)$$

Кулоновский интеграл в левой части уравнения (24) с учетом соотношений

$$n(x) \approx n_l + n'(x_l)\delta x, \quad n_0(x) \approx n_l + n'_0(x_l)\delta x$$

преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{2e^2}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{n(s) - n_0(s)}{x - s} &\rightarrow \\ &\rightarrow \frac{2e^2}{\kappa} \int_{-a_l}^{a_l} ds \frac{n(s) - n_0(s)}{x - s} \Big|_{x \rightarrow 0} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{2e^2}{\kappa} 2a_l [n'(0) - n'_0(0)]. \end{aligned}$$

С учетом упрощений выражение (24) в центре полоски шириной $2a_l$ принимает вид

$$n'(x_l) \approx \frac{n'_0(x_l)}{1 + (\pi l_H^2 \kappa / 4e^2 a_l) \partial\zeta_l / \partial\nu_{max}}. \quad (26)$$

В меру $\partial\zeta_l / \partial\nu_{max} \gg 1$ производная $n'(x_l) \ll n'_0(x_l)$, символизируя возникновение полки, что и требовалось показать.

Для завершения анализа свойств обычной полки на склоне профиля $n(x)$ необходим алгоритм оценки ее ширины $2a_l$. В этом вопросе существенны детали поведения производной $\partial\zeta_l / \partial\nu$ в окрестности экстремума. Сам по себе этот пик имеет малую ширину порядка $T/\hbar\omega_c$. Однако в уравнение (24) входит производная $\partial\zeta_l / \partial x$, которую надо понимать в смысле

$$\begin{aligned} \frac{\partial\zeta_l(x)}{\partial x} &\equiv \frac{\partial\zeta_l(\nu_l(x))}{\partial x}, \\ \nu_l(x) &= \pi l_H^2 n_l(x), \quad x = x_l + n'(x_l)x, \end{aligned} \quad (27)$$

где производная $n'(x_l)$ определена в (25), (26) и по смыслу очень мала. Таким образом, реальная дисперсия производной $\partial\zeta_l(x)/\partial x$ заметно больше $T/\hbar\omega_c$. Она «тянется» в x -пространстве до расстояний порядка a , гладко убывая за пределами зоны уплощения. В этом и заключается согласованность правой и левой частей уравнения (24). Учитывая сказанное и не претендуя на числа шириной полки $2a$, можно, к примеру, назвать координату точки перегиба в зависимости $\partial\zeta_l(\nu(x))/\partial x$, где под $\nu(x)$ подразумевается заполнение с плотностью $n_l + x\partial n(x_l)/\partial x$ в духе (25),

$$\left. \frac{\partial^2\zeta(\nu_l(x))}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0. \quad (28)$$

Отметим, что формализм работ [19, 20] использует для количественного определения ширины полосок дополнительное условие: отсутствие неких механических сил на границах между полкой и экранирующими «кусками» задачи (более предметно, нефизичность расходимостей в распределении электростатических полей при его сшивках на границах полки). В действительности все о равновесии на полке уже сказано требованием (23), и фактическая информация относительно ширины $2a$ должна содержаться в недрах нелинейного сингулярного уравнения (24), что и демонстрируется определением (28). Что касается сути происходящего, то из оценки конкурирующих кулоновского и диамагнитного вкладов в общую энергию $2D$ -системы для a_l^2 находим [19]

$$e^2 a_l^2 \frac{\partial n(x_l)}{\partial x} \approx \kappa \hbar \omega_c, \quad a_l \propto \sqrt{\frac{H}{n'_l}}. \quad (29)$$

2. Возвращаясь к общей картине экранировки, нетрудно видеть, что в условиях $\hbar\omega_c > T$ согласно (21), (23), вся λ_H -область вдоль периметра $2D$ -образца разбивается на систему целочисленных полосок с расстоянием Δ_l между ними,

$$\begin{aligned} \Delta_l = x_{l+1} - x_l &\approx \frac{n_{l+1} - n_l}{n'_l} = \frac{1}{l_H^2 n'_l}, \\ n'_l &\equiv \frac{\partial n(x_l)}{\partial x}, \quad \Delta_l \propto \frac{H}{n'_l}. \end{aligned} \quad (30)$$

Картина невзаимодействующих полосок [19] имеет смысл, если

$$a_l \ll \Delta_l, \quad \text{или} \quad (a_l/\Delta_l)^2 = a_B^* l_H^2 n'_l \ll 1. \quad (31)$$

Здесь a_B^* — эффективный радиус Бора, n'_l — производная в какой-либо из точек (22), a_l — из (29). Требование (31) является одним из достаточных (но не

необходимых) для существования индивидуальных целочисленных полос. В условиях вполне возможного нарушения неравенства (31) для отдельных составляющих ансамбля a_l вдоль профиля $n(x)$ задачу об отдельной полоске приходится менять на аналог с конечным числом полос, причем выгодность переброса электронов с полок с большим индексом l на полки с самым малым из них $l = 1$ приобретает характер каскада, в котором электроны лишь частично задерживаются на промежуточных полках, стремясь к максимальному диамагнитному выигрышу, который сулит уровень $l = 1$ при достижении электронами границ распределения $n(x)$. Такая эволюция профиля $n(x)$ аналогична переходу от электростатического равновесия (5) к решению этой же задачи в приближении Томаса – Ферми (8).

Основной схемы каскадного расчета остается уравнение (24), «охватывающее» на каждом из интервалов особенности ζ (21), расположенные в точках x_l (22). Изменению подлежат пределы интеграла в левой части уравнения (24). Вместо симметричных пределов $\pm a_l$ с неопределенной величиной a_l следует использовать несимметричные относительно x_l , но зато известные отрезки

$$-\Delta_l/2 \leq \delta x \leq +\Delta_{l+1}/2, \quad \delta x = x - x_l, \quad (32)$$

где Δ_l из (30). Процедура интегрирования пуассоновского интеграла аналогична использованной в (26) и в приближении ближайших соседей связывает между собой все отрезки профиля $n(x)$, разбитого на счетное количество интервалов точками x_l . В результате возникает система l соотношений между n'_l и $n'_0(x_l)$, позволяющая найти все искомые производные n'_l в зависимости от $n'_0(x_l)$. С качественной точки зрения важно, что каскад целочисленных полосок не имеет диэлектрических прослоек в промежутках между плато (фактор, обязательно присутствующий в решениях, приведенных в [19, 20] для индивидуальных полосок). Эта разница может играть заметную роль в задаче о проводимости (подробнее см. ниже в разделе о КЭХ для узких каналов).

Полагая (на некоторых участках зависимости $n(x)$ это действительно так) разницу между $\Delta_l/2$ и $\Delta_{l+1}/2$ несущественной, можно получить оценку наклона n'_l , заменяющую (26), в явном виде:

$$n'(x_l) \approx \frac{n'_0(x_l)}{1 + (\pi l_H^2 \kappa / 4e^2 \Delta_l) \partial \zeta_l / \partial \nu_{max}}. \quad (33)$$

Согласно (33), перекрытие соседних полосок не разрушает процесса уплощения, во всяком случае в

окрестности каждой из точек x_l . Что касается профиля барьера, формирующего МКС и заменяющего собою бесконечно высокую стенку θ -модели, то речь идет о ломаной линии в пределах ширины λ_H , каждое из звеньев которой является гипотенузой треугольника с высотой $\hbar\omega_c$ и пространственной шириной Δ_l (30). Возникающая картина коррелирует с квазиклассической структурой барьеров (12b).

3. Одним из следствий требования (31) на практике является выделенность центральных целочисленных полосок (имеются в виду транспортные измерения). Согласно [20], такие полоски шириной $2a_0$ возникают беспороговым образом в окрестности экстремальных точек зависимости $n(x)$ с $n'(x) = 0$,

$$a_0 = \sqrt{\frac{\kappa \hbar \omega_c}{e^2 n''(0)}}. \quad (34)$$

Начиная с некой разности

$$\nu(H) - 1 = \pi |n''(0)| a_0^2 l_H^2, \quad (35)$$

на вершине распределения $n(x)$ симметричная целочисленная полоска расщепляется на дублет с уходящими друг от друга по склонам зависимости $n(x)$ компонентами.

Дополняя картину (34), (35), приведем еще данные о поведении дублета в условиях экранировки $2D$ -системы управляющим электродом. Для модельного профиля вида

$$n(x) = n_0 [1 - (x/L)^n], \quad (36)$$

где L задает масштаб длины, а n — целое число, характеризующее пологость профиля в окрестности точки $x = 0$, полуширина центральной полоски оказывается равной

$$a_0 = x_0 (n + 1)^{1/n}, \quad (37)$$

где x_0 — точка, в которой достигается целочисленный фактор заполнения. Демонстрация такого процесса (появление $\lambda_H > \lambda_0$), захватывающего с изменением H практически все «тело» корбино-диска, содержится среди данных, представленных выше на рис. 3.

Несколько слов о ситуации с плотностью электронов $n(x, y)$ в окрестности седловой точки. Чистая электростатика из работы [46] (т. е. формулировка задачи о равновесии в виде требования, аналогичного (2)) свидетельствует о затруднениях в заполнении электронами седловой точки (электронная жидкость, ограничиваемая вдали от седла парой сепаратрисс, пересекающих его вершину, не «смачива-

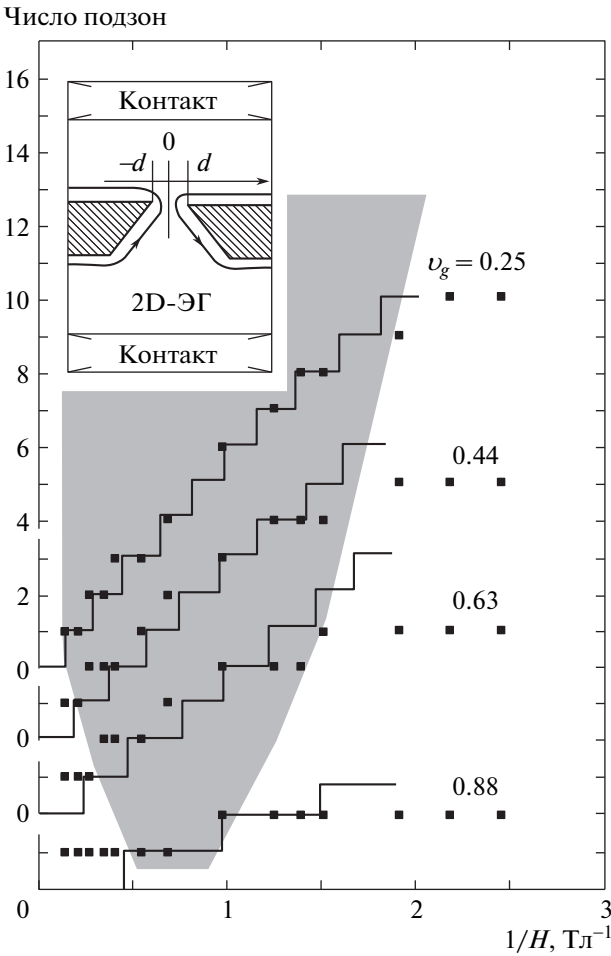


Рис. 6. Зависимость $\sigma_{||}(1/H)$ из [39] (черные квадраты). Относительные напряжения v_g на затворе вычислены по формуле (42). На вставке — схема эксперимента (2D-ЭГ — двумерный электронный газ). Сплошные «лестницы» с квантовыми скачками проводимости — результаты расчетов числа и положения скачков $\sigma_{||}(1/H)$ с помощью формул (40), (41). Процедура определения положения скачков $\sigma_{||}(1/H)$ иллюстрируется на рис. 7б,в. Участки правее и левее затемненной зоны отвечают областям, в которых проводимость не следует закону $1/H$ (возможные причины отклонений комментируются в тексте)

ет» седловой точки). Что касается экспериментальных данных о проводимости в этой области, их можно трактовать альтернативным образом: электроны «смачивают» вершину седла (см. комментарии по этому поводу к данным, расположенным в левой нижней части рис. 6).

5. КЭХ В УЗКИХ КАНАЛАХ

Каскадные состояния (31)–(33) занимают промежуточное место между КЭС (краевые состояния в θ -модели [1]) и МКС (целочисленные полоски [19]). Они почти такие же «рыхлые», как МКС, но с транспортной точки зрения близки КЭС. Поясним эту мысль подробнее. В условиях $R_c < w$ меняется на фоне (10а) определение баллистического тока (хотя неизменной остается способность одномерных состояний формировать квант проводимости). Идеальный, без участия диагональной компоненты, транспортный ток I для прямоугольной (Hall bar) ячейки в режиме целочисленного КЭХ определен выражением [7]

$$I = \frac{e}{2\pi\hbar}(\mu_1 - \mu_2), \quad \sigma_{xy} = \frac{le^2}{2\pi\hbar}, \quad (38)$$

где транспортная разность $\mu_1 - \mu_2$ возникает между значениями электрохимического потенциала на плечах каждой из пар КЭС, замыкающих в отсутствие транспорта локальные круговые диамагнитные токи. А общее число l этих колец фигурирует в (38) простым множителем не просто так. Для подобного упрощения необходимо, чтобы все l кусочно-гладких фрагментов целочисленных пар, расположенных по краям прямоугольного образца, находились в зоне одного и того же значения μ_1 либо μ_2 . Гипотеза (38) приемлема для КЭС в θ -модели, а также каскадных состояний (32), (33), не имеющих диэлектрических прослоек.

Рассмотрим теперь в качестве образца прямоугольный узкий канал, заполненный системой независимых (в смысле работ [19, 20]) l целочисленных полосок. Их число в идентичных с θ -моделью условиях по ширине канала, максимальной плотности и магнитному полю то же самое, что и в (38). Но пространственное распределение другое. Вместо характерной для КЭС локализации на магнитной длине вблизи краев канала полоски разбросаны по всему его сечению и, согласно работам [19, 20], хорошо изолированы друг от друга. В таких условиях при нагрузке прямоугольной системы полосок транспортной разностью $\mu_1 - \mu_2$ участвовать в формировании полного тока I могут лишь внешние целочисленные состояния вдоль периметра образца (либо надо подводить транспортное напряжение к каждой из полосок). Эта гипотеза со ссылкой на известные транспортные задачи с привлечением геометрии прямоугольного образца дает для I результат, заметно отличный от (38):

$$\sigma_{xy} \approx \frac{e^2}{2\pi\hbar}. \quad (39)$$

Иначе говоря, образец в виде сетки из l МКС-нитей должен проводить как сплошной образец с единичной краевой проводимостью, присущей внешней целочисленной полоске.

Дискуссия вокруг определений (38), (39), по большому счету, затрагивает общую, зависящую от деталей структуры границ проблему введения транспортного тока в ограниченную $2D$ -систему с признаками КЭХ. Отметим, что нелинейная часть ВАХ содержит информацию о структурных деталях $2D$ -границы [15, 47].

Выбор между сценариями (38), (39) предполагает создание баллистического канала с известным профилем $n(x)$, расчет на этой основе всех составляющих, входящих в неравенства (31), и проверку их выполнимости. С учетом перечисленного возникают аргументы в пользу ВАХ (38) либо (39), допускающие проверку. Реализация такой программы осуществлена нами на базе известных данных [39] о проводимости в режиме КЭХ квазиодномерного канала с управляемыми параметрами: шириной $2b$ и профилем $n(x)$ — при наличии достаточно сильного магнитного поля $\hbar\omega_c \gg T$.

Упрощенная схема эксперимента [39] представлена на вставке к рис. 6. Экранированная $2D$ -система с номинальной целью ширины $2d$ обеднена под электродами до нуля, а с ростом управляющего напряжения V_g продолжает обедняться уже в промежутке $-d \leq x \leq d$. Роль геометрии управляющих электродов в работе [39] не обсуждается, хотя их реальный дизайн скорее отвечает протеканию тока через седло, а не вдоль канала. Проводимость канала $\sigma_{\parallel}(V_g^i, 1/H)$ на этом рисунке отложена в единицах $e^2/2\pi\hbar$ и представлена черными квадратами.

Для расчета деталей зависимости $\sigma_{\parallel}(V_g^i, 1/H)$, приведенной на рис. 6, использована одномерная модель канала [48], по возможности учитывающая схему эксперимента из работы [39]. Более реальная задача о канале, имеющем вид сильновытянутого седла с разными кривизнами, пока не освоена. Используя приближение (40), (41), мы рассчитываем на его качественное соответствие анизотропной седловой задаче из [39] с характерной для эффективного метода перевала точностью.

Согласно работе [48],

$$n(x) = n_s \sqrt{(b^2 - x^2)/(d^2 - x^2)}, \quad -b \leq x \leq b, \quad (40)$$

$$\kappa V_g = 2\pi\epsilon n_s d \left[E \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2}} \right) - \frac{b^2}{d^2} K \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2}} \right) \right]. \quad (41)$$

Величина n_s равна плотности электронов в щели между электродами при $V_g \rightarrow 0$ (проверяется с учетом асимптотик эллиптических интегралов $K(s)$, $E(s)$ первого и второго рода и с учетом того, что $b/d \rightarrow 1$). В области $V_g \neq 0$ профиль $n(x)$ отделяется от границ $\pm d$, сжимаясь по сечению к центру канала и теряя высоту.

Для привязки уравнений (40), (41) к данным работы [39] мы использовали следующие параметры: $d = 250$ нм, $n_s \approx 3.56 \cdot 10^{11}$ см $^{-2}$, $\kappa \approx 12.5$ для GaAs, в условиях $d \gg h$ расстоянием h между управляющими электродами и $2D$ -системой можно пренебречь, что и сделано в формулах (40), (41). Соответствие между значениями V_g [39] и модельными амплитудами этого параметра в формулах (40), (41) возникает, если считать автомодельными отношения

$$v_g^i = \frac{V_g^i}{V_g^{min} - V_g^{max}}. \quad (42)$$

Среди данных [39] есть нужные значения V_g^i и $V_g^{min} - V_g^{max}$. Расчет также содержит известную разность $V_g^{min} - V_g^{max}$. В результате определяются модельные значения V_g^i и относительные величины v_g^i , в терминах которых и предполагается работать.

Наиболее громоздка, но важна для альтернативы «каскад или нет» проверка неравенств (31). Профили $n_i(x)$ со значениями v_g^i , отвечающими, согласно (42), данным работы [39], и целочисленными точками x_l (22) для характерных полей $H = 0.6, 1.02, 1.05$ Тл представлены на рис. 7а,б,в. Минимальное из этих полей условно ограничивает на рис. 6 область $(\sigma_{\parallel} V_g^i, 1/H)$ с линейной зависимостью проводимости от $1/H$. Два других значения магнитного поля выбраны для демонстрации процедуры определения скачков проводимости, положение которых на оси $1/H$ составляет основу измерений в работе [39]. Численные значения ширин полок a_l (29) в точках x_l и длины Δ_l (30) между ними собраны для анализа неравенств (31) и представлены в виде графиков для каждого из наборов $n_i(x)$, рис. 7а',б',в'. Из их анализа следует, что неравенства (31) в основном не выполняются по всему спектру x_l . Возникают основания говорить о присутствии в задаче [39] каскадного варианта МКС и, в связи с этим, возможности использовать в качестве ВАХ определение (38).

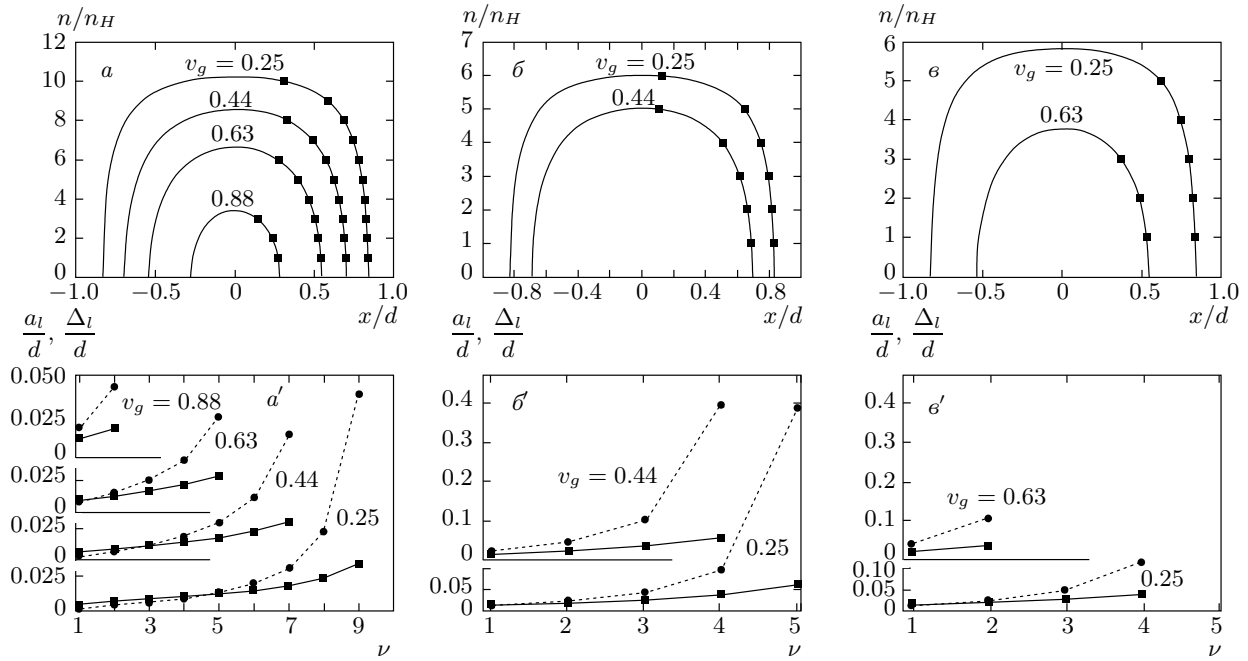


Рис. 7. Разные профили $n_i(x)$ из (40), (41) с целочисленными точками x_l (22) и значениями v_g , отвечающими, согласно (42), данным работы [39] для характерных полей $H = 0.6$ Тл (а), 1.02 Тл (б), 1.05 Тл (в). Поле $H = 0.6$ Тл условно ограничивает на рис. б область $(\sigma_{\parallel} V_g^i, 1/H)$ с линейной зависимостью проводимости от $1/H$. Поля $H = 1.02, 1.05$ Тл выбраны для демонстрации процедуры определения скачков проводимости, положение которых на оси $1/H$ составляет основу измерений в работе [39]. Численные значения ширины полок a_l/d (29) (сплошные ломаные) в точках x_l и расстояния Δ_l/d (30) (пунктирные ломаные) между ними для проверки необходимых условий (31) реализации теории [19] представлены на рис. 7а', б', в'

Общая картина данных о проводимости канала на плоскости $(\sigma_{\parallel} V_g^i, 1/H)$ (см. рис. 6), покрывает широкие интервалы изменения внешних полей V_g и $1/H$. Для каждого из представленных четырех наборов точек фиксировано значение $v_g^i, i = 1, 2, 3, 4$ (т. е. конкретный профиль $n_i(x)$) при монотонном изменении $1/H$. Учитывая реально интересующий нас выбор между ВАХ (38) либо (39) в режиме КЭХ, основное внимание мы отводим центральной, затемненной части плоскости $(\sigma_{\parallel} V_g^i, 1/H)$. Проводимость $\sigma_{\parallel}(V_g^i, 1/H)$ здесь ассоциируется с формулой (38) и имеет простую структуру — квант проводимости, умноженный на текущее число полосок, расположенных, согласно рис. 7, на каждом из профилей $n_i(x)$. Положение скачков фиксируется обработкой формул (41), (40), (22) в духе рис. 7б, в. Возникающие графики хорошо согласуются с наблюдениями [39] в зонах с линейно по $1/H$ расположенными лестницами ступенек (эта часть данных затемнена), что свидетельствует о корректном в целом понимании происходящего [39] без использования подгоночных па-

раметров в достаточно широком (центральная часть рис. 6) интервале магнитных полей. Совпадают с посчитанными число наблюдаемых ступеней, средний наклон лестниц, зависящий от максимальной плотности $n_i(0)$ и ширины каналов i , в основном, положение каждой из ступенек на оси $1/H$. Таким образом, сформулированный в начале раздела вопрос об альтернативе «каскад или нет» решается через анализ деталей ВАХ (38), (39) в пользу (38), т. е. «каскада».

Несколько слов об участках на рис. 6 левее и правее затемненной зоны. Причины низкочастотных нелинейностей в правой части зависимости $\sigma_{\parallel}(V_g^i, 1/H)$ с уменьшением магнитного поля неоднозначны. Одна из них была осознана еще в пионерских работах по изучению проводимости узких каналов. Речь идет о конкуренции (см. выражения (16) и (16а)) между характерными частотами ω_c и $\tilde{\omega}$ с постепенным уменьшением роли ω_c . Этот эффект обсуждался выше в комментариях к рис. 2 и неоднократно фиксировался [28, 37, 39]. Имеется, однако, и другая, органически связанная с первой, пространствен-

ная перестройка структуры электронных состояний, в которой МКС-сценарий поведения электронов с целочисленными полосками и $R_c < w$ трансформируется для $R_c > w$ в силовое квантование электронного спектра с участием обеих границ узкого канала. В частности, согласно данным рис. 7а' с ростом числа заполнения зон в центральной области канала возникает обстановка, благоприятная для существования отдельных, хорошо изолированных полосок (расстояния Δ_l здесь заметно превышают величины a_l). С учетом обсуждаемых формул (38), (39) можно сделать вывод о том, что такие полоски могут выпадать из ансамбля, несущего транспортный ток. Визуально это отвечает нелинейному уменьшению числа ступеней на рис. 6.

Высокочастотная аномалия в левом нижнем углу рис. 6 проявляется в том, что проводимость канала при всех (особенно при малых) его заполнениях продолжает оставаться конечной в области $1/H \rightarrow 0$, где формулы (40), (41) уже не содержат целочисленных точек. Согласно принятой для ВАХ (38) процедуре определения положений ступеней, они должны следовать закону (22), сдвигающему с ростом v_g^i начальные скачки проводимости в сторону меньших полей, что и подтверждается расчетными кривыми на рис. 7а', б', в'. Эксперимент дает для этих окончаний одну, практически универсальную величину $1/H_{max} = 0.1$. Несоответствие расчета наблюдениям растет с увеличением v_g^i . Возможным источником расхождений может служить неоднородность седловой точки. При этом данные работы [39] свидетельствуют в пользу «смачивания» электронами седловой точки (в то время как рассмотрение в работе [46] говорит об обратном). В имеющих отношение к этой особенности экспериментах [28] (см. рис. 2) речь идет о вытянутых узких каналах. Здесь проблема двумерности седловой точки практически отсутствует, а все пики холловского сопротивления расположены в нужных местах (следуют закону $1/H$ вплоть до последнего из них с $l = 1$). Количественный анализ высокочастотной аномалии на рис. 6 пока отсутствует.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагается обобщение понятия краевых электронных состояний (КЭС) в магнитном поле, учитывающее не только зеркальную, но и силовую составляющие, формирующие движение замагниченных

электронов вблизи границ $2D$ -металла. Наличие силовой составляющей и ее конечность, связанная с появлением дополнительного параметра λ_0 , являются следствиями согласованного процесса экранирования электронами металла внешнего поля, формирующего границы реальных $2D$ -систем и сохраняющего на конечной глубине λ_0 скин-слоя латеральную, нормальную границе, компоненту электрического поля E_{\perp} . Представлены имеющиеся свидетельства конечности величины $\lambda_0 > 2w$ в экспериментах с квантованной проводимостью квазиодномерных баллистических каналов ($2w$ — ширина канала), см. рис. 2 и комментарии к нему. Такие же конечные значения λ_0 наблюдаются в электрооптических измерениях топографии полей над $2D$ -диском Корбино (см. рис. 3).

С использованием приближения среднего поля учтено влияние E_{\perp} на структуру магнитных краевых состояний (МКС) в широком интервале магнитных полей: от квазиклассического предела ($\epsilon_F \gg \hbar\omega_c$) до ситуации с квантовым эффектом Холла (КЭХ), когда $\epsilon_F \ll \hbar\omega_c$ (ϵ_F — энергия Ферми $2D$ -системы, $\hbar\omega_c$ — циклотронная энергия). В первом из этих пределов подробно изучена классическая задача о движении краевого электрона в скин-слое (см. рис. 4). С использованием такого формализма найдено положение пиков МКС на фоне их идеального КЭС-распределения вдоль периметра $2D$ -круга в известной задаче о поперечной магнитной фокусировке (рис. 5).

В пределе, соответствующем КЭХ, работа содержит систематическое описание структуры скин-слоя с $\lambda_H \geq \lambda_0$, состоящего из набора так называемых целочисленных полосок (перекрывающихся или независимых), являющихся носителями универсальной квантовой проводимости. Обращается внимание на возможности оценки степени перекрытия соседних полосок и экспериментальные следствия альтернативы: свободные полоски или каскады. Комментируются существующие данные [15] о туннельном токе через целочисленные полоски в λ_H -слое, дающие полезную информацию о фактическом состоянии границы $2D$ -системы. Отмечена естественная аналогия между свойствами МКС и хорошо известной задачей о деталях баллистической проводимости $\sigma_{\parallel}(H)$ узких электронных каналов в магнитном поле. Формализм обеих задач идентичен в условиях $\lambda_H \geq w$, где $2w$ — эффективная ширина квазиодномерного канала. С использованием этой аналогии систематизирована имеющаяся информация [28, 37, 39] о поведении зависимости $\sigma_{\parallel}(H)$ для узких электронных каналов

в сильном магнитном поле. Реализована диагностика канала [39] на предмет общего понимания происходящего (см. рис. 6) и, в частности, степени изолированности его целочисленных полосок. С нашей точки зрения, наблюдаемые признаки КЭХ в поведении $\sigma_{\parallel}(H)$ наиболее убедительно свидетельствуют о реальности образования целочисленных полосок в неоднородных $2D$ -системах при наличии нормального магнитного поля и возможности изучения деталей их структуры.

Авторы благодарны В. Т. Долгополову за подробное обсуждение результатов работы и полезные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00894-а), Программы Президиума РАН «Квантовая физика конденсированного состояния» и Программы FP7-PEOPLE-2009-IRSES (грант 246937 SIMTECH).

ЛИТЕРАТУРА

- И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, ЖЭТФ **29**, 743 (1955).
- М. С. Хайкин, ЖЭТФ **39**, 212 (1960).
- R. Prange and T. Nee, Phys. Rev. **168**, 779 (1968).
- V. Tsoi, J. Bass, and P. Wyder, Rev. Mod. Phys. **71**, 1641 (1999).
- M. Kaplit and J. Zemel, Phys. Rev. Lett. **21**, 212 (1968).
- S. Takaoka, K. Oto, H. Kurimoto, and K. Murase, Phys. Rev. Lett. **72**, 3080 (1994).
- B. Halperin, Phys. Rev. B **25**, 2185 (1982).
- M. Butiker, Phys. Rev. B **38**, 9375 (1988); J. Res. and Develop. **32**, 317 (1988).
- K. von Klitzing, Physica B **184**, 1 (1993).
- R. Haug, Semicond. Sci. Technol. **8**, 131 (1993).
- X. Wen, Phys. Rev. Lett. **64**, 2206 (1990); Phys. Rev. B **43**, 11025 (1991); **44**, 5708 (1991).
- C. Chamon and X. Wen, Phys. Rev. B **44**, 5708 (1991).
- M. Grayson, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 1062 (1998).
- M. Hike, D. C. Tsui, M. Grayson et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 186806 (2001).
- E. Deviatov, A. A. Kapustin, V. T. Dolgoplov et al., Phys. Rev. B **74**, 073303 (2006).
- E. Andrei, Phys. Rev. Lett. **52**, 1449 (1984).
- Yu. Monarkha, U. Albrecht, K. Kono, and P. Leiderer, Phys. Rev. B **47**, 13812 (1993).
- П. Лейдерер, С. Назин, В. Шикин, ФНТ **34**, 489 (2008).
- D. Chklovskii, B. Shklovskii, and L. Glazman, Phys. Rev. B **46**, 4026 (1992).
- D. Chklovskii, K. Matveev, and B. Shklovskii, Phys. Rev. B **47**, 12605 (1993).
- Э. А. Канер, Н. М. Макаров, И. М. Фукс, ЖЭТФ **55**, 931 (1968).
- Л. А. Фальковский, ЖЭТФ **58**, 1830 (1970).
- Г. Е. Воловик, Письма в ЖЭТФ **55**, 363 (1992).
- M. Hasan and C. Kane, arXiv:1002.3895.
- И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971); М. Я. Азбель, Письма в ЖЭТФ **5**, 282 (1967).
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1995).
- K. Berggren and D. Newson, Semicond. Sci. Technol. **1**, 327 (1986).
- T. Demel, D. Heitman, P. Grambow, and K. Ploog, Phys. Rev. B **38**, 12732 (1998).
- S. Laux, D. Frank, and F. Stern, Surf. Sci. **196**, 101 (1988).
- В. Б. Шикин, ЖЭТФ **101**, 1599 (1991).
- J. Eisenstein, L. Pfeiffer, and K. West, Phys. Rev. B **50**, 1761 (1994).
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
- W. Dietsche, K. von Klitzing, K. Ploog, and K. Eberl, Semicond. Sci. Technol. **10**, 117 (1995); W. Dietsche, K. von Klitzing, and K. Ploog, Surf. Sci. **361**, 117 (1996).

34. V. Shikin, Phys. Rev. B **64**, 245335 (2001).
35. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).
36. V. Fock, Z. Phys. **47**, 446 (1928).
37. K. Berggren, T. Thornton, D. Newson, and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **57**, 1769 (1986).
38. T. Thornton, M. Pepper, H. Ahmed et al., Phys. Rev. Lett. **56**, 1198 (1986).
39. B. van Wees, L. Konwenhoven, H. van Houton et al., Phys. Rev. B **38**, 3625 (1998).
40. H. Linke, L. Christensson, P. Omling, and P. E. Lindelof, Phys. Rev. B **56**, 1440 (1997).
41. P. Boggild, A. Kristensen, H. Bruus et al., Phys. Rev. B **57**, 15408 (1998).
42. М. Ю. Мельников, В. Т. Долгополов, В. С. Храпай, Д. Шух, Письма в ЖЭТФ **88**, 40 (2008).
43. S. Iordansky, Sol. St. Comm. **43**, 1 (1982).
44. A. MacDonald, T. Rice, and W. Brinkman, Phys. Rev. B **28**, 3648 (1983).
45. И. В. Кукушкин, С. В. Мешков, В. Б. Тимофеев, УФН **155**, 219 (1988).
46. M. Fogler, Phys. Rev. B **69**, 245321 (2004).
47. В. Б. Шикин, Письма в ЖЭТФ **84**, 29 (2006).
48. I. Larkin and V. Shikin, Phys. Lett. A **151**, 1406 (1990).