ЖЭТФ, 2011, том 140, вып. 3 (9), стр. 431–449

НЕВИНЕРОВСКИЙ ТИП СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. М. Башаров [*]

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 декабря 2010 г.

Спонтанное излучение квантовой частицы и сверхизлучение ансамбля одинаковых квантовых частиц в вакуумном электромагнитном поле с нулевой плотностью фотонов рассмотрены в условиях, когда значительно штарковское взаимодействие частицы и поля. Установлены новые фундаментальные эффекты — подавление спонтанного излучения штарковским взаимодействием, дополнительный «распадный» сдвиг энергии распадающегося уровня вследствие штарковского взаимодействия, не связанный с лэмбовским и штарковскими сдвигами уровней, явления сохранения возбуждения в достаточно плотном ансамбле одинаковых частиц и подавления сверхизлучения в ходе распада ансамбля возбужденных квантовых частиц определенной плотности. Основные уравнения, описывающие излучательные процессы в условиях значительного штарковского взаимодействия, получены в представлении эффективного гамильтониана квантовых стохастических дифференциальных уравнений. Доказано, что штарковское взаимодействие одиночной квантовой частицы и широкополосного электромагнитного поля представляется квантовым пуассоновским процессом, а стохастические дифференциальные уравнения имеют невинеровский (обобщенный ланжевеновский) тип. На основе рассмотренного случая спонтанного излучения квантовой частицы сформулированы основные правила исследования открытых систем в представлении эффективного гамильтониана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы спонтанного излучения атома лежат в основе квантовой теории взаимодействия излучения с веществом и первые шаги в их исследовании были предприняты еще на заре становления квантовой теории в 1927 г. Дираком [1]. Эти процессы также являют собой простой пример квантовой динамики открытой системы, которой является атом, взаимодействующий с окружением — вакуумным электромагнитным полем. И эта задача имеет уже давнюю историю, отсчет которой можно начать с работы Вейскопфа и Вигнера 1930 г. [2]. Другой важнейшей областью знаний, в которой процессы спонтанного излучения играют определяющую роль, является теория непрерывных квантовых измерений и квантовых скачков. Собственно теория измерений и теория открытых систем тесно переплетаются в квантовой теории, что стало предметом активного обсуждения начиная, по-видимому, с работ Дэвиса [3], а процессы динамики атома во внешнем квантованном широкополосном (многомодовом) электромагнитном поле являют здесь важнейший фундаментальный пример.

Задача о спонтанном излучении атома естественно представляется как задача динамики квантовой частицы с двумя энергетическими уровнями во внешнем резонансном широкополосном квантованном электромагнитном поле [4]. С точки зрения теории взаимодействия резонансное широкополосное внешнее поле вызывает непосредственные однофотонные переходы между квантовыми уровнями частицы (определяющие естественную ширину спектральной линии) и сдвиг энергии квантовых уровней [4, 5]. В обычном атоме эти эффекты имеют разный порядок по константе взаимодействия (связи) с электромагнитным полем: переходы между уровнями атома описываются величиной первого порядка малости и представляются энергией взаимодействия атома с внешним полем, тогда как сдвиг уровней атома описывается величиной второго порядка по константе связи и состоит из лэмбовского сдвига [4] и сдвига за счет высокочастотного эффекта Штарка [5]. В обычных условиях величины лэмбовского и штарковского сдвигов уровней атома в вакуумном поле пренебрежимо малы по сравнению с

[*] E-mail: basharov@gmail.com

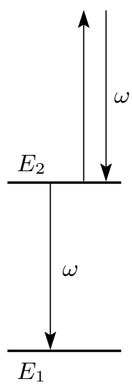

Рис. 1. Схематическое изображение реального перехода с возбужденного уровня E_2 на основной уровень E_1 с излучением кванта частоты ω и виртуальных переходов без излучения кванта с возвращением на возбужденный уровень. Переход $E_2 \to E_1$ является оптически разрешенным

характерной энергией взаимодействия атома с внешним полем и до сих пор ее влияние на динамику спонтанного излучения возбужденного атома не рассматривалось. Однако квантовая двухуровневая частица успешно моделирует не только реальный изолированный атом, но и атом или ион в твердотельной матрице, а также весьма разнообразные объекты — от спина [6, 7] и экситонов [7] до искусственных излучателей типа квантовой точки [8] или атомно-фотонного кластера [9]. Кроме того, сейчас активно изучаются и конструируются искусственные среды типа фотонного кристалла с особенностями в фотонном спектре, так что можно сформировать такие условия, что лэмбовский и/или штарковский сдвиги уровней и энергия взаимодействия искусственного излучателя с внешним широкополосным квантованным полем могут быть одного порядка. Поэтому представляет несомненный интерес рассмотреть вопрос о спонтанном излучении такой частицы, поскольку это фундаментальное явление скажется и на многих других оптических процессах.

В статье решена задача о спонтанном излучении квантовой частицы в резонансном широкополосном электромагнитном поле с учетом штарковского сдвига энергетических уровней в этом поле, когда лэмбовский и/или штарковский сдвиги уровней сравнимы с энергией взаимодействия частицы с электромагнитным полем. Установлено, что в таких условиях динамика квантовой частицы является невинеровской или неброуновской (в противоположность винеровской динамике атома при пренебрежении высокочастотным эффектом Штарка)[1]. Это приводит к подавлению релаксации возбужденного состояния и дополнительному сдвигу частоты перехода квантовой частицы при ее спонтанном излучении. По сути дела подавление релаксации обусловлено квантовой интерференцией реального перехода с возбужденного уровня на основной и виртуальных переходов с возвращением на возбужденный уровень (рис. 1). Эти же виртуальные переходы обеспечивают дополнительный сдвиг энергетического уровня, с которого происходит переход в основное состояние с излучением фотона. Этот дополнительный сдвиг возбужденного уровня отличается как от обычного лэмбовского сдвига уровня, так и от стандартно понимаемого штарковского сдвига уровня как среднего значения соответствующего оператора, поскольку в случае электромагнитного поля с нулевой плотностью фотонов это среднее значение равно нулю, а дополнительный сдвиг уровня есть. В данном случае такой сдвиг возбужденного энергетического уровня мы называем излучательным штарковским сдвигом уровня.

В статье также рассмотрено коллективное спонтанное излучение ансамбля одинаковых квантовых частиц с учетом излучательного штарковского сдвига уровней. Показано, что коллективное взаимодействие ансамбля одинаковых квантовых частиц с вакуумным полем усиливает штарковское взаимодействие. Установлено, что в отличие от обычного сверхизлучения [10], в котором с ростом числа возбужденных атомов сокращается время задержки, уменьшается длительность и возрастает интенсивность импульса сверхизлучения, существует область параметров квантовой частицы, в которой рост числа частиц в ансамбле приводит к обратному эффекту — увеличению времени задержки и длительности сигнала коллективного спонтанного излучения. Более того, обнаружено, что существует «критическое число» атомов в ансамбле, при котором (сверх)излучение из этого ансамбля подавляется, т. е. система стабилизируется в возбужденном состоянии. Этот эффект является следствием обнаруженного эффекта подавления релаксации штарковским взаимодействием и его усилением в ансамбле коллек-

[1] Используя частичку «не» в определении терминов «невинеровский», «неброуновский», «неланжевеновский», автор имеет в виду не противоположность соответствующим терминам, а учет дополнительных важных факторов другой природы, так что указанные термины можно также трактовать как «обобщенный винеровский», «обобщенный броуновский», «обобщенный ланжевеновский».

тивно распадающихся одинаковых квантовых частиц.

В статье применен аппарат представления эффективного гамильтониана стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) квантовой эволюции невинеровского типа к выводу кинетических уравнений и релаксационного оператора для анализа динамики квантовой частицы, резонансно взаимодействующей с электромагнитным полем. До сих пор применение подобных (невинеровских или обобщенных ланжевеновских) уравнений ограничивалось описанием квантовых скачков [11] и техникой счета фотонов в непрерывных измерениях [12, 13], причем обсуждаемое слагаемое в гамильтониане, описывающее штарковские сдвиги энергетических уровней, не учитывалось.

Для вывода кинетического уравнения и релаксационного оператора разработаны различные методы (см. [14–16]), однако метод квантовых СДУ [11–13, 15, 17–21] является не только более наглядным и простым, но и служит неотъемлемой частью математически корректного описания открытых систем определенного класса. Эффективность метода квантовых СДУ винеровского типа наглядно продемонстрирована в работах [10, 12, 13, 15, 18–25]. В статье обращается внимание на определяющую роль представления эффективного гамильтониана системы для непротиворечивого анализа динамики такой системы. В известных работах по выводу кинетических уравнений для двухуровневого атома в резонансном широкополосном квантованном поле методом СДУ винеровского типа в качестве исходного гамильтониана использовался гамильтониан в приближении вращающейся волны [12, 13, 18, 19]. Такой гамильтониан получался из стандартного исходного гамильтониана двухуровневой частицы при пренебрежении частью слагаемых в операторе электродипольного взаимодействия, которые имели быстро осциллирующие множители в представлении взаимодействия. Применение же техники квантовых СДУ непосредственно к исходному гамильтониану дает неожиданный и противоречащий наблюдению результат — релаксационный оператор оказывается тождественно равным нулю [22], как если бы двухуровневый атом не испытывал никакого радиационного распада! Таким образом, в технике квантовых СДУ отчетливо возникает проблема эффективного гамильтониана — основные предположения относительно характера взаимодействия открытой системы с окружением должны применяться не к любому гамильтониану (в том числе и к сколь угодно общему и «точному» исходному), а к эффективному гамильтониану. Необходимый систематический принцип получения такого эффективного гамильтониана и область его применимости сформулирован в данной работе. Такой подход приводит не только к простому обоснованию слагаемых приближения вращающейся волны, но и к выводу основного для данной работы слагаемого, описывающего штарковский сдвиг уровней в широкополосном квантованном поле и отвечающего за невинеровский тип спонтанного излучения атома. Этот же подход накладывает и определенные в статье ограничения на дальнейшее использование кинетических уравнений и релаксационного оператора в исследованиях динамики открытых систем, которые во многих работах игнорируются, что приводит к некорректным результатам.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 унитарное преобразование гамильтониана совместно с теорией возмущений применено для вывода эффективного гамильтониана рассматриваемой в статье задачи. Обсуждаются условия, при которых штарковское слагаемое в гамильтониане становится того же порядка, что и слагаемое, отвечающее за однофотонные переходы между резонансными квантовыми уровнями частицы. В разд. 3 вводится аппарат квантовых СДУ и обсуждается роль представления эффективного гамильтониана в исследовании динамики открытой системы методом квантовых СДУ. В разд. 4 выводится невинеровский оператор эволюции рассматриваемой задачи и на его основе формулируется кинетическое уравнение и релаксационный оператор для матрицы плотности системы в случае квантованного электромагнитного поля без фотонов. В разд. 5 обсуждаются особенности невинеровского спонтанного излучения одной квантовой частицы. В разд. 6 рассматривается коллективное спонтанное излучение ансамбля одинаковых квантовых частиц. В разд. 7 обсуждаются проблемы, связанные с теоретическим анализом экспериментальных ситуаций, в которых изучаемый в статье невинеровский тип спонтанного распада возбужденной квантовой частицы вполне реален, однако строгое решение задачи пока не удается найти.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА ОПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Рассмотрим один неподвижный атом, взаимодействующий в электродипольном приближении с резонансным квантованным электромагнитным полем. Исходный гамильтониан такой системы

$$H^{Ini} = H^A + H^F + H^{Int} \qquad (1)$$

состоит из гамильтониана изолированного атома H^A, гамильтониана электромагнитного поля H^F и оператора взаимодействия между ними H^{Int}, которые имеют вид

$$H^A = \sum_j E_j|E_j\rangle\langle E_j|, \quad H^F = \sum_\omega \hbar\omega b_\omega^\dagger b_\omega,$$
$$H^{Int} = \sum_\omega \Gamma_\omega(b_\omega^\dagger + b_\omega)\sum_{kj} d_{kj}|E_k\rangle\langle E_j|, \tag{2}$$
$$\sum_j |E_j\rangle\langle E_j| = 1, \quad \langle E_j|E_k\rangle = \delta_{jk},$$

где квантовые невырожденные состояния $|E_j\rangle$ энергии E_j характеризуют атом, а через $d_{kj} = \langle E_k|d|E_j\rangle$ обозначены матричные элементы оператора дипольного момента атома $d = \sum_{kj} d_{kj}|E_k\rangle\langle E_j|$. Считаем, что атомные уровни характеризуются определенной четностью, так что $\langle E_k|d|E_k\rangle = 0$. Операторы уничтожения и рождения фотонов с частотой ω даются величинами b_ω и $b_\omega^\dagger$: $[b_\omega, b_{\omega'}^\dagger] = \delta_{\omega\omega'}$. Мы пренебрегаем эффектами отдачи, вырождения и поляризационными особенностями.

Волновой вектор $|\Psi\rangle$ системы «атом + квантованное электромагнитное поле» удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H^{Ini}|\Psi\rangle. \tag{3}$$

В силу унитарной симметрии квантовой теории совершим унитарное преобразование:

$$|\tilde\Psi\rangle = U|\Psi\rangle. \tag{4}$$

Переход от вектора $|\Psi\rangle$ к новому вектору (4) сопровождается изменением гамильтониана,

$$\tilde H = UH^{Ini}U^\dagger - i\hbar U\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger, \tag{5}$$

так что теперь описание квантовой системы дается уравнением Шредингера с преобразованным гамильтонианом (5):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde\Psi\rangle = \tilde H|\tilde\Psi\rangle. \tag{6}$$

Представим унитарный оператор U через эрмитовый оператор:

$$U = e^{-iS}, \quad S^\dagger = S, \tag{7}$$

чтобы использовать формулу Бейкера–Хаусдорфа для произвольного оператора O:

$$e^{-iS}Oe^{iS} = O + \frac{(-i)}{1!}[S,O] + \frac{(-i)^2}{2!}[S,[S,O]] + \\ + \frac{(-i)^3}{3!}[S,[S,[S,O]]] + \ldots$$

Преобразованный гамильтониан (5) и S разложим в ряд по константе взаимодействия:

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + \ldots, \\ \tilde H = \tilde H^{(0)} + \tilde H^{(1)} + \tilde H^{(2)} + \ldots, \tag{8}$$

где верхний индекс указывает порядок разложения по константе связи. Подставляя (7), (8) в (5) с учетом формулы Бейкера–Хаусдорфа и приравнивая выражения одного порядка малости, получаем

$$\tilde H^{(0)} = H^A + H^F, \tag{9}$$

$$\tilde H^{(1)} = H^{Int} - i\left[S^{(1)}, \tilde H^{(0)}\right] + \hbar\frac{\partial S^{(1)}}{\partial t}, \tag{10}$$

$$\tilde H^{(2)} = -\frac{i}{2}\left[S^{(1)}, H^{Int}\right] - \frac{i}{2}\left[S^{(1)}, \tilde H^{(1)}\right] - \\ - i\left[S^{(2)}, \tilde H^{(0)}\right] + \hbar\frac{\partial S^{(2)}}{\partial t}, \tag{11}$$
$$\ldots$$

Разложение (8) и формулы (9)–(11) при требовании отсутствия в матричных элементах преобразованного гамильтониана (5) быстроменяющихся во времени слагаемых (в представлении взаимодействия[2)]) однозначно определяют унитарное преобразование (4)–(8), которое мы характеризуем как переход к представлению эффективного гамильтониана. Представление эффективного гамильтониана, как и представления Гейзенберга и Дирака, является замкнутым в том смысле, что повторное (или n-кратное) унитарное преобразование $\mathcal{T}$ с теми же самыми определяющими его свойствами оставляет эффективный гамильтониан «неподвижным», поскольку он является неподвижной точкой последовательности однотипных унитарных преобразований $\mathcal{T}$:

$$\tilde H(n+1) = \mathcal{T}\left(\tilde H(n)\right), \quad \tilde H = \mathcal{T}\left(\tilde H\right),$$
$$\tilde H = \lim_{n\to\infty}\tilde H(n).$$

В отсутствие каких-либо резонансов эффективный гамильтониан (5), (6), (8)–(11) является диагональным. Резонансные условия взаимодействия атома и электромагнитного поля приводят эффективный гамильтониан (5) и уравнение Шредингера

2) Если при унитарном преобразовании исходить из представления Шредингера, то матричные элементы эффективного гамильтониана должны содержать только «правильные» быстроменяющиеся множители, исключающиеся при переходе к представлению взаимодействия.

(6) к замкнутой системе, описывающей взаимодействие электромагнитного поля только с резонансными квантовыми уровнями атома.

Особенности унитарного преобразования (4)–(8) в случае взаимодействия квантовых частиц с классическими электромагнитными полями изложены в монографии [26]. В квантовом случае метод использовался в работах автора [9, 23–25] для иных условий, чем те, которые рассматриваются в данной статье. История применения унитарного преобразования, подобного (4)–(8), в задачах нелинейной и квантовой оптики рассмотрена в работе [27].

Сделаем основное предположение о том, что взаимодействие атома с квантованным электромагнитным полем носит резонансный характер. Согласно Лаксу [28] частотный спектр широкополосного электромагнитного поля разбивается на совокупность спектров независимых источников, каждый из которых находится в резонансе с соответствующим квантовым переходом атома. Будем далее рассматривать только один такой источник, центральная частота Ω_Γ спектра которого близка к частоте ω_{21} оптически разрешенного атомного перехода $|E_2\rangle \to |E_1\rangle$ (иначе $E_2 \to E_1$)[3]:

$$\Omega_\Gamma \approx \omega_{21}, \quad \omega_{ij} = (E_i - E_j)/\hbar. \tag{12}$$

Прежде чем вывести эффективный гамильтониан, отвечающий резонансному условию (12), обсудим ранее использованные подходы в контексте дальнейшего применения техники квантовых СДУ. Если просто ограничиться в исходном гамильтониане только двумя резонансными энергетическими уровнями $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$, $H^{Int} \to H^{Int-TL}$ (TL означает two-level):

$$H^{Int-TL} = \\ = \sum_\omega \Gamma_\omega (b_\omega^\dagger + b_\omega)\left(d_{21}|E_2\rangle\langle E_1| + d_{12}|E_2\rangle\langle E_1|\right), \tag{13}$$

то непосредственное применение техники квантовых СДУ с гамильтонианом (1) и оператором взаимодействия (13) дает очевидно неверный результат — релаксационный оператор оказывается тождественно равным нулю [22], как если бы двухуровневый атом не испытывал никакого радиационного распада. В работах по вычислению релаксационного оператора [12, 13, 18, 19] предлагалось брать оператор взаимодействия в «исходном гамильтониане» в приближении вращающейся волны $H^{Int} \to H^{Int-RF}$ (RF означает rotating frame):

$$H^{Int-RF} = \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega d_{21}|E_2\rangle\langle E_1| + \\ + \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^\dagger d_{12}|E_1\rangle\langle E_2|, \tag{14}$$

отличительной чертой которого является сохранение «возбуждения» в системе двухуровневый атом + квантованное электромагнитное поле. При этом оставшиеся нерезонансные атомные уровни никак более не учитывались.

Развиваемый автором подход [9, 23–25] на основе унитарного преобразования (4), (5) исходного гамильтониана предполагает, что в качестве слагаемых первого порядка по константе связи с электромагнитным полем в преобразованном гамильтониане надо взять только те, которые в представлении взаимодействия не содержат быстро осциллирующих во времени слагаемых, а именно

$$\tilde H^{(1)} = \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^\dagger d_{12}|E_1\rangle\langle E_2| + \\ + \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega d_{21}|E_2\rangle\langle E_1| = H^{Int-RF}. \tag{15}$$

Это позволяет найти из уравнения (10) оператор $S^{(1)}$:

$$S^{(1)} = -i\sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega {\sum_{kj}}' \frac{d_{kj}}{\hbar(\omega_{jk}+\omega)}|E_k\rangle\langle E_j| + \text{H.c}, \tag{16}$$

в который входят и нерезонансные атомные уровни и который впоследствии определит вклад нерезонансных атомных уровней в эффективный гамильтониан. Знак штрих означает отсутствие под знаком суммы в (16) резонансных знаменателей. Заметим, что если бы в гамильтониане $\tilde H^{(1)}$ были оставлены другие слагаемые, имеющие быстро осциллирующие во времени множители в представлении взаимодействия, то оператор $S^{(1)}$ состоял бы из слагаемых с резонансными знаменателями, что противоречило бы смыслу разложения преобразованного гамильтониана (5) в ряд (8) по константе связи.

Подставляя далее выражения для величин $S^{(1)}$ и $\tilde H^{(1)}$ в формулу (11) и оставляя в первых двух коммутаторах лишь слагаемые, не имеющие в представлении взаимодействия быстро осциллирующих множителей, получаем $\tilde H^{(2)}$ в виде

$$\tilde H^{(2)} = \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^\dagger \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega'} b_{\omega'} \times \\ \times \sum_k \frac{1}{2}\left(\Pi_k(\omega) + \Pi_k(\omega')\right)|E_k\rangle\langle E_k| + \\ + \sum_\omega \Gamma_\omega^2 \sum_{kj} \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj} - \omega)}|E_k\rangle\langle E_k|, \tag{17}$$

[3] Сформулированные выше требования к слагаемым эффективного гамильтониана однозначно выделяют такой шумовой источник из широкополосного квантованного электромагнитного поля.

где введены стандартные параметры теории оптических резонансных процессов [26]:

$$\Pi_k(\nu) = \sum_j \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar}\left(\frac{1}{\omega_{kj}+\nu} + \frac{1}{\omega_{kj}-\nu}\right).$$

Кроме того, из (11) и (17) следует уравнение для определения $S^{(2)}$, однако вид этого оператора здесь не понадобится. Важно, что определенный таким образом оператор $S^{(2)}$ не содержит резонансных знаменателей, так что разложение (8) корректно.

Слагаемое второго порядка по константе связи (17) представляется в виде двух слагаемых:

$$\tilde{H}^{(2)} = H^{St} + H^{Lamb},$$

$$H^{St} = \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^\dagger \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega'} b_{\omega'} \times \times \sum_k \frac{1}{2}\left(\Pi_k(\omega) + \Pi_k(\omega')\right)|E_k\rangle\langle E_k|,$$

$$H^{Lamb} = \sum_\omega \Gamma_\omega^2 \sum_{kj} \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj}-\omega)}|E_k\rangle\langle E_k|.$$

Одно из них, H^{Lamb}, принято называть лэмбовским, поскольку именно оно описывает лэмбовский сдвиг уровней. Другое слагаемое, H^{St}, назовем оператором штарковского взаимодействия. Оно аналогично штарковскому сдвигу уровня в классическом электромагнитном поле напряженности $E = \mathcal{E}e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$ [26]. Из сравнения полученных формул с выражениями для штарковского сдвига, представленными в работе [26], можно предложить простой способ получения H^{St} в случае квантованных полей из классических выражений путем замены

$$|\mathcal{E}|^2\Pi_k(\omega) \to \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^\dagger \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega'} b_{\omega'} \times \times \sum_k \frac{1}{2}\left(\Pi_k(\omega) + \Pi_k(\omega')\right).$$

В результате в качестве эффективного гамильтониана возьмем сумму первых трех слагаемых в разложении (8) и положим:

$$\tilde{H} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)}, \tag{18}$$

причем система уравнений (6) для матричных элементов, описывающих резонансные уровни и переходы между ними, оказывается замкнутой. Для нерезонансных уровней слагаемые в операторах (8) и (18) имеют диагональный вид. Введем далее образующие $su(2)$-алгебры

$$R_3 = \frac{1}{2}|E_2\rangle\langle E_2| - \frac{1}{2}|E_1\rangle\langle E_1|,$$

$$R_+ = |E_2\rangle\langle E_1|, \quad R_- = |E_1\rangle\langle E_2|$$

с коммутационными соотношениями

$$[R_3, R_\pm] = \pm R_\pm, \quad [R_+, R_-] = 2R_3$$

и оператор

$$I^{TL} = |E_2\rangle\langle E_2| + |E_1\rangle\langle E_1|,$$

коммутирующий со всеми слагаемыми в операторе (18). Перепишем (18) в виде

$$\tilde{H} = H^{Eff} + \frac{1}{2}(E_1' + E_2')I^{TL} + H^{Nonres}, \tag{19}$$

$$H^{Eff} = H^{TL} + H^F + H^{Int-Tr} + H^{Int-St},$$

$$H^{TL} = \hbar\omega_{21}' R_3, \quad \omega_{21}' = \frac{E_2' - E_1'}{\hbar},$$

$$H^{Int-Tr} = \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^\dagger d_{12} R_- + \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega d_{21} R_+,$$

$$H^{Int-St} = \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^\dagger \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega'} b_{\omega'} \times \times \left\{\frac{\Pi_1(\omega) + \Pi_1(\omega') + \Pi_2(\omega) + \Pi_2(\omega')}{4} I^{TL} + \right. \left. + \frac{\Pi_2(\omega) + \Pi_2(\omega') - \Pi_1(\omega) - \Pi_1(\omega')}{2} R_3\right\},$$

$$E_1' = E_1 + \sum_\omega \Gamma_\omega^2 \sum_j \frac{|d_{1j}|^2}{\hbar(\omega_{1j}-\omega)}|E_1\rangle\langle E_1|,$$

$$E_2' = E_2 + \sum_\omega \Gamma_\omega^2 \sum_j \frac{|d_{2j}|^2}{\hbar(\omega_{2j}-\omega)}|E_2\rangle\langle E_2|,$$

$$H^{Nonres} = \sum_{j\neq 1,2} E_j |E_j\rangle\langle E_j| + \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^\dagger \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega'} b_{\omega'} \times \times \sum_{k\neq 1,2} \frac{1}{2}\left(\Pi_k(\omega) + \Pi_k(\omega')\right)|E_k\rangle\langle E_k| + + \sum_\omega \Gamma_\omega^2 \sum_{k\neq 1,2,j} \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar(\omega_{kj}-\omega)}|E_k\rangle\langle E_k|.$$

Здесь штрихи у энергий резонансных уровней E_1' и E_2' указывают на включение в указанные величины энергий лэмбовского сдвига уровней.

Если теперь совершить еще одно унитарное преобразование

$$|\tilde{\tilde{\Psi}}\rangle = \exp\left(\frac{i}{2}\frac{(E_1' + E_2')I^{TL}}{\hbar}\right)|\tilde{\Psi}\rangle,$$

то преобразованный гамильтониан

$$\tilde{\tilde{H}} = \exp\left(\frac{i}{2}\,\frac{(E_1' + E_2')I^{TL}}{\hbar}\right)\tilde{H}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{i}{2}\,\frac{(E_1' + E_2')I^{TL}}{\hbar}\right) - \frac{1}{2}(E_1' + E_2')I^{TL} =$$
$$= H^{Eff} + H^{Nonres}.$$

Таким образом в задачах, в которых изначально заселены только уровни $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$ и нет полей, связывающих их с другими нерезонансными уровнями, преобразованный гамильтониан $\tilde{\tilde{H}}$ редуцируется до эффективного гамильтониана H^{Eff}, а уравнение Шредингера, замкнутое относительно резонансных уровней, выглядит как

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\tilde{\Psi}}\rangle = H^{Eff}|\tilde{\tilde{\Psi}}\rangle. \qquad (20)$$

На подпространстве квантовых состояний двухуровневого атома оператор I^{TL} является единичным. Таким образом, эффективный гамильтониан задачи H^{Eff} (19) определяется образующими $su(2)$-алгебры, далее штрих у частоты резонансного перехода ω_{21}', указывающий на включение в эту величину лэмбовского сдвига, будем опускать.

Сделаем следующие замечания.

1. Слагаемые в операторе взаимодействия атома с электромагнитным полем разделены по следующему принципу. Слагаемое H^{Int-Tr} описывает реальные переходы между квантовыми уровнями $\langle E_2|H^{Int-Tr}|E_1\rangle \neq 0$. Слагаемое H^{Int-St} отвечает лишь за сдвиги энергии уровней двухуровневого атома и не описывает реальных переходов, поскольку $\langle E_2|H^{Int-St}|E_1\rangle = 0$.

2. В обычном атоме слагаемые H^{Int-Tr} и H^{Int-St} имеют разный порядок по константе связи Г. Однако они могут оказаться одного порядка в силу аномальной малости величины дипольного момента d_{21} по какой-либо причине.

3. В некоторых двухквантовых и многоквантовых резонансных процессах взаимодействия атома с электромагнитными полями эффективный оператор взаимодействия с такими полями также может быть представлен в виде суммы $H^{Int-Tr} + H^{Int-St}$ [9, 23–25, 27] (рис. 2). При этом для двухквантовых резонансов характерные величины H^{Int-Tr} и H^{Int-St} будут одного порядка без дополнительных требований относительно величин дипольных моментов [9, 23–26]. В случае же трехквантовых (и выше) резонансных условий характерная величина штарковского сдвига уровней H^{Int-St}, как правило, существенно превосходит величину H^{Int-Tr}.

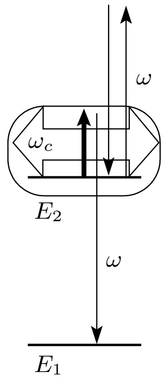

Рис. 2. Структура резонансных уровней атома в случае комбинационного резонанса с внешним широкополосным электромагнитным полем и микрорезонаторной фотонной модой частоты ω_c, $\omega - \omega_c \approx \approx (E_2 - E_1)/\hbar$. Здесь реальный двухквантовый переход с возбужденного уровня E_2 и излучением фотона ω конкурирует с виртуальными переходами с возвращением на возбужденный уровень E_2. Переход $E_2 \to E_1$ является оптически запрещенным. Такая ситуация имеет место в случае атомно-фотонного кластера [9]

3. ОПИСАНИЕ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЭФФЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Удобно (но не принципиально) проводить дальнейшие преобразования в представлении взаимодействия. Тогда вектор состояния атома и электромагнитного поля $|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle$ с заданным начальным состоянием $|\Psi_0\rangle$ эволюционирует согласно уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle = \left(H^{Int-Tr}(t) + H^{Int-St}(t)\right)|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle, \quad (21)$$

решение которого можно представить через оператор эволюции $U(t)$ (I — единичный оператор):

$$|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle = U(t)|\Psi_0\rangle, \quad U(0) = I.$$

Оператор $U(t)$ удовлетворяет следующему уравнению Шредингера:

$$i\hbar\frac{d}{dt}U(t) = \left(H^{Int-Tr}(t) + H^{Int-St}(t)\right)U(t). \qquad (22)$$

В представлении взаимодействия

$$|\tilde{\tilde{\Psi}}(t)\rangle = \exp\left(\frac{i(H^A + H^F)t}{\hbar}\right)|\tilde{\tilde{\Psi}}\rangle,$$

$$H^{Int-Tr}(t) = \exp\left(\frac{i(H^A + H^F)t}{\hbar}\right) \times \\ \times H^{Int-Tr} \exp\left(\frac{-i(H^A + H^F)t}{\hbar}\right),$$

$$H^{Int-St}(t) = \exp\left(\frac{i(H^A + H^F)t}{\hbar}\right) \times \\ \times H^{Int-St} \exp\left(\frac{-i(H^A + H^F)t}{\hbar}\right),$$

а решение уравнения (22) можно представить в виде ряда:

$$U(t) = I + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t \left(H^{Int-Tr}(t') + H^{Int-St}(t')\right) dt' + \\ + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_0^t\int_0^{t'} \left(H^{Int-Tr}(t') + H^{Int-St}(t')\right) \times \\ \times \left(H^{Int-Tr}(t'') + H^{Int-St}(t'')\right) dt'dt'' + \ldots = \\ = \overleftarrow{T} \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\int_0^t \left(H^{Int-Tr}(t') + \right.\right. \\ \left.\left. + H^{Int-St}(t')\right) dt'\right), \qquad (23)$$

где $\overleftarrow{T}$ — оператор упорядочения во времени.

Обсудим теперь требования к начальному состоянию системы. Будем предполагать, что первоначально состояния атома $|\Psi_0^A\rangle$ и поля $|\Psi_0^F\rangle$ никак не коррелированы друг с другом, т. е. начальное состояние системы факторизовано: $|\Psi_0\rangle = |\Psi_0^A\rangle \otimes |\Psi_0^F\rangle$. Состояния поля, отвечающие различным частотам, также не коррелированы и характеризуются отсутствием фотонов, т. е.

$$\langle\Psi_0^F|b_\omega^\dagger b_{\omega'}|\Psi_0^F\rangle = 0, \\ \langle\Psi_0^F|b_\omega b_{\omega'}^\dagger|\Psi_0^F\rangle = \delta(\omega - \omega'), \qquad (24)$$

$$\langle\Psi_0^F|b_\omega b_{\omega'}|\Psi_0^F\rangle = \langle\Psi_0^F|b_\omega^\dagger b_{\omega'}^\dagger|\Psi_0^F\rangle = 0. \qquad (25)$$

Кроме того,

$$\langle\Psi_0^F|b_\omega|\Psi_0^F\rangle = \langle\Psi_0^F|b_\omega^\dagger|\Psi_0^F\rangle = 0.$$

Это означает, что электромагнитное поле есть широкополосное электромагнитное поле и может рассматриваться как термостат с центральной частотой $\Omega_\Gamma = \omega_{21}$.

До сих пор были использованы обычные процедуры стандартной квантовой теории. Теперь введем новые величины и сделаем новые основные допущения. Определим операторы

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i(\omega-\omega_{21})t} b_\omega, \\ b^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i(\omega-\omega_{21})t} b_\omega^\dagger, \\ B(t) = \int_0^t dt' b(t'), \quad B^\dagger(t) = \int_0^t dt' b^\dagger(t'), \\ \Lambda(t) = \int_0^t dt' b^\dagger(t')b(t'), \qquad (26)$$

причем интегрирование по ω проводим от $-\infty$ до $+\infty$, а не от 0 до $+\infty$. Это важное предположение приводит к соотношениям

$$\left[b(t), b^\dagger(t')\right] = \delta(t - t'), \quad \left[B(t), B^\dagger(t')\right] = t, \\ \left[B(t_1), B^\dagger(t_2)\right] = \\ = \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' \delta(t' - t'') = \min(t_1, t_2). \qquad (27)$$

Далее предполагаем, что параметр связи Γ_ω и параметры штарковских сдвигов $\Pi_k(\omega)$ не зависят от частоты ω:

$$\Gamma_\omega = \text{const} = \Gamma_{\Omega_\Gamma}, \quad \Pi_1(\omega) = \text{const} = \Pi_1(\Omega_\Gamma), \\ \Pi_2(\omega) = \text{const} = \Pi_2(\Omega_\Gamma). \qquad (28)$$

Введенные величины и предположения (28) позволяют записать операторы взаимодействия в виде

$$H^{Int-Tr}(t)\,dt = \chi R_+ dB(t) + \chi R_- dB^\dagger(t), \qquad (29)$$

$$H^{Int-St}(t)\,dt = (\eta_1 I + \eta_3 R_3) d\Lambda(t) = \\ = (\xi_1|E_1\rangle\langle E_1| + \xi_2|E_2\rangle\langle E_2|)\; d\Lambda(t), \qquad (30)$$

$$dB(t) = B(t + dt) - B(t), \\ dB^\dagger(t) = B^\dagger(t + dt) - B^\dagger(t), \\ d\Lambda(t) = \Lambda(t + dt) - \Lambda(t). \qquad (31)$$

Для простоты матричный элемент d_{21} считался действительной величиной. Его фазу без труда можно восстановить из сравнения с формулой для H^{Int-Tr}. Введенные параметры η_1 и η_3 пропорциональны соответственно величинам $\Pi_2(\Omega_\Gamma) + \Pi_1(\Omega_\Gamma)$ и $\Pi_2(\Omega_\Gamma) - \Pi_1(\Omega_\Gamma)$, а ξ_1 и ξ_2 пропорциональны

$\Pi_1(\Omega_\Gamma)$ и $\Pi_2(\Omega_\Gamma)$. Не меняя обозначений, считаем здесь и далее все величины, включая время, безразмерными, опуская при этом постоянную Планка в уравнении для оператора эволюции. Размерности восстановим далее в разделе, посвященном невинеровскому спонтанному излучению одиночной квантовой частицы.

Сделанные приближения (28) и взятые пределы интегрирования в определении величин $b(t)$ и $b^\dagger(t)$ представляют собой условия марковости взаимодействия атома и электромагнитного поля — динамика широкополосного электромагнитного поля (24), (25) определяется состоянием поля в данный момент времени и не зависит от предыстории формирования этого состояния. Они использовались во всех предыдущих выводах кинетического уравнения для атома в резонансном поле без учета штарковского слагаемого в операторе взаимодействия [18, 19].

В условиях марковости уравнение (22) оказывается неопределенным. Это видно, если рассмотреть подробнее интегралы, встречающиеся в формуле (23). Например, в (23) содержатся интегралы вида

$$\int_0^t \varphi(t')\,dB^\dagger(t'),$$

где $\varphi(t')$ — некоторая операторозначная функция. Пусть, как обычно,

$$\int_0^t \varphi(t')\,dB^\dagger(t') = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N \varphi(t'_i)\left(B^\dagger(t_i)-B^\dagger(t_{i-1})\right). \quad (32)$$

Здесь точки t_i, такие что $0<t_1<t_2<\ldots<t_{N-1}<t$, делят интервал времени $(0,t)$ на N частей, причем $t_0=0$, $t_N=t$, и t'_i — некоторая точка из i-й части указанного деления: $t_{i-1}\le t'_1\le t_i$. При увеличении числа точек деления интервала $(0,t)$ при $N\to\infty$ считаем также, что максимальная величина интервалов (t_{i-1},t_i) уменьшается до нуля: $\max(t_i-t_{i-1})\to 0$. Будем считать, что в качестве предела рассматривается среднеквадратичный предел:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X, \quad \text{если} \quad \lim_{n\to\infty}\langle (X_n-X)^2\rangle = 0.$$

Нетрудно видеть, что интегралы типа (32) зависят от выбора точки t'_i. Рассмотрим для определенности выражение

$$\int_0^t B(t')\,dB^\dagger(t') = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N B(t'_i)\left(B^\dagger(t_i)-B^\dagger(t_{i-1})\right).$$

Тогда

$$\langle B(t_1)B^\dagger(t_2)\rangle = \langle [B(t_1),B^\dagger(t_2)] + B^\dagger(t_2)B(t_1)\rangle = \\ = \min(t_1,t_2) + \langle \Psi_0^F|B^\dagger(t_2)B(t_1)|\Psi_0^F\rangle = \min(t_1,t_2),$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^N B(t'_i)\left(B^\dagger(t_i)-B^\dagger(t_{i-1})\right)\right\rangle = \sum_{i=1}^N (t'_i - t_{i-1}).$$

Будем считать, что интегралы типа (32) берутся в смысле Ито:

$$\int_0^t \varphi(t')dB^\dagger(t') = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N \varphi(t_{i-1})\left(B^\dagger(t_i)-B^\dagger(t_{i-1})\right).$$

При этом величины $\varphi(t)$ считаются «неупреждающими», т. е. в статистическом смысле не зависящими от последующего поведения $B(t)$, $B^\dagger(t)$ для всех будущих значений t. Математически это выражается соотношениями

$$[\varphi(t),dB(t)] = \left[\varphi(t),dB^\dagger(t)\right] = [\varphi(t),d\Lambda(t)] = 0.$$

Будем понимать под стохастическим дифференциальным уравнением Ито соотношение вида

$$d\varphi(t) = \alpha\left(\varphi(t),t\right)\,dB(t) + \beta\left(\varphi(t),t\right)\,dB^\dagger(t) + \\ + \varepsilon\left(\varphi(t),t\right)\,d\Lambda(t) + \gamma\left(\varphi(t),t\right)\,dt,$$

для которого справедливо равенство

$$\varphi(t)-\varphi(t_0) = \int_{t_0}^t \alpha(\varphi(t),t)\,dB(t) + \\ + \int_{t_0}^t \beta(\varphi(t),t)\,dB^\dagger(t) + \\ + \int_{t_0}^t \varepsilon(\varphi(t),t)\,d\Lambda(t) + \int_{t_0}^t \gamma(\varphi(t),t)\,dt,$$

где стохастические интегралы понимаются в смысле Ито.

Хадсон и Партасарати [17] получили, что дифференциалы (или инкременты) Ито (31) в случае начального состояния электромагнитного поля (24) и (25) удовлетворяют алгебре

$$\begin{gathered} d\Lambda(t)\,d\Lambda(t) = d\Lambda(t), \quad d\Lambda(t)\,dB^\dagger(t) = dB^\dagger(t), \\ dB(t)\,d\Lambda(t) = dB(t), \quad dB(t)\,dB^\dagger(t) = dt, \\ d\Lambda(t)\,dB(t) = d\Lambda(t)\,dt = dB(t)\,dB(t) = \\ = dB^\dagger(t)\,d\Lambda(t) = dB^\dagger(t)\,dt = dB(t)\,dt = 0. \end{gathered} \quad (33)$$

При этом стохастические процессы $B(t)$, $B^\dagger(t)$ и $\Lambda(t)$ определяют квантовые винеровский $Q(t)$ и пуассоновский $N(t)$ процессы по формулам [29, 30]

$$Q(t) = B(t) + B^\dagger(t), \quad N(t) = \Lambda(t) + i\left(B^\dagger(t) - B(t)\right).$$

Операторы $dB(t)$, $dB^\dagger(t)$ и $d\Lambda(t)$ представляют собой инкременты уничтожающего, рождающего процессов и числа фотонов, через которые выражаются винеровский и пуассоновский процессы. В дальнейшем, однако, поскольку это не приводит к недоразумениям, будем называть квантовыми винеровскими процессами $B(t)$ и $B^\dagger(t)$ (а также $dB(t)$ и $dB^\dagger(t)$), а квантовым пуассоновским процессом $\Lambda(t)$ (и $d\Lambda(t)$). Процессы $Q(t)$ и $N(t)$ далее нигде не используются.

Соотношения (33) позволяют теперь корректно «доопределить» уравнения (22). Рассмотрим дифференциал Ито оператора $U(t)$ (22):

$$dU(t) \equiv U(t+dt) - U(t).$$

Если записать (23) в виде произведений:

$$U(t) = \lim_{N\to\infty} \exp\left(\frac{H^{Int}(t_{N-1})}{i}(t_N - t_{N-1})\right)\ldots \\ \ldots\exp\left(\frac{H^{Int}(t_{i-1})}{i}(t_i - t_{i-1})\right)\ldots \\ \ldots\exp\left(\frac{H^{Int}(t_0)}{i}(t_1 - t_0)\right),$$

$$H^{Int}(t) = H^{Int-Tr}(t) + H^{Int-St}(t),$$

то с учетом (30) и (31) имеем

$$dU(t) = \left\{\exp\left(-i\left(\chi R_+ dB(t) + \chi R_- dB^\dagger(t) + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. + (\eta_1 I + \eta_3 R_3)\, d\Lambda(t)\right)\right) - 1\right\} U(t).$$

Из этого выражения видна унитарность оператора эволюции и справедливость правила дифференцирования Ито:

$$d\left(U(t)U^\dagger(t)\right) = (dU(t))\, U^\dagger(t) + \\ + U(t)\, dU^\dagger(t) + dU(t)\, dU^\dagger(t).$$

Раскладывая далее экспоненту в ряд и используя алгебру Хадсона–Партасарати (33), получаем следующие уравнения Ито для оператора эволюции:

$$dU(t) = A_0 dt\, U(t) + A_+ dB(t) U(t) + \\ + A_- dB^\dagger(t) U(t) + A_\Lambda d\Lambda(t) U(t), \\ dU^\dagger(t) = U^\dagger(t) A_0^\dagger dt + U^\dagger(t)\, dB^\dagger(t) A_+^\dagger + \\ + U^\dagger(t)\, dB(t) A_-^\dagger + U^\dagger(t)\, d\Lambda(t) A_\Lambda^\dagger, \\ A_0 = \chi^2 R_+ \times \\ \times \frac{\exp\left(-i(\eta_1 I + \eta_3 R_3)\right) - 1 + i(\eta_1 I + \eta_3 R_3)}{(\eta_1 I + \eta_3 R_3)^2} R_-, \\ A_- = \frac{\exp\left(-i(\eta_1 I + \eta_3 R_3)\right) - 1}{\eta_1 I + \eta_3 R_3}\, \eta R_-, \\ A_+ = \chi R_+ \frac{\exp\left(-i(\eta_1 I + \eta_3 R_3)\right) - 1}{\eta_1 I + \eta_3 R_3}, \\ A_\Lambda = \exp\left(-i(\eta_1 I + \eta_3 R_3)\right) - 1. \tag{34}$$

Здесь под операторами

$$\frac{\exp\left(-i(\eta_1 I + \eta_3 R_3)\right) - 1 + i(\eta_1 I + \eta_3 R_3)}{(\eta_1 I + \eta_3 R_3)^2},$$

$$\frac{\exp\left(-i(\eta_1 I + \eta_3 R_3)\right) - 1}{\eta_1 I + \eta_3 R_3}$$

понимаются ряды Тейлора соответствующих функций от x: $\eta_1 I + \eta_3 R_3 \to x$ с последующей обратной заменой $x \to \eta_1 I + \eta_3 R_3$.

В отсутствие штарковского взаимодействия $\eta_1 = \eta_3 = 0$ уравнение (34) описывает уже исследованный случай, отвечающий винеровской релаксации атома. Она определяется наличием только слагаемых, пропорциональных dt и инкрементам квантового винеровского процесса $dB(t)$ и $dB^\dagger(t)$, а также отсутствием слагаемых, пропорциональных инкременту квантового пуассоновского процесса $d\Lambda(t)$. Винеровские уравнения, как и в классическом случае, определяются только винеровскими процессами [19]. Зависимость оператора эволюции от $d\Lambda(t)$ является признаком невинеровского процесса (синонимы: неброуновский процесс, обобщенный ланжевеновский процесс) [30]. В работе [30] исследована общая математическая структура таких уравнений.

Уравнение (34) для оператора эволюции порождает стохастическое уравнение для волновой функции системы

$$d|\Psi(t)\rangle = -i\chi^2 R_+ \left(i\frac{\cos(\eta_1 I + \eta_3 R_3) - 1}{(\eta_1 I + \eta_3 R_3)^2} - \right. \\ \left. - \frac{\eta_1 I + \eta_3 R_3 - \sin(\eta_1 I + \eta_3 R_3)}{(\eta_1 I + \eta_3 R_3)^2}\right) R_- dt |\Psi(t)\rangle + \\ + \chi\left\{\frac{\cos(\eta_1 I + \eta_3 R_3) - 1}{\eta_1 I + \eta_3 R_3} - i\frac{\sin(\eta_1 I + \eta_3 R_3)}{\eta_1 I + \eta_3 R_3}\right\} \times \\ \times R_- dB^\dagger(t) |\Psi(t)\rangle \tag{35}$$

с эффективным неэрмитовым гамильтонианом взаимодействия

$$- \chi^2 R_+ \frac{\eta_1 I + \eta_3 R_3 - \sin(\eta_1 I + \eta_3 R_3)}{(\eta_1 I + \eta_3 R_3)^2} R_- - \\ - i\chi^2 R_+ \frac{1 - \cos(\eta_1 I + \eta_3 R_3)}{(\eta_1 I + \eta_3 R_3)^2} R_-.$$

При $\eta_1 = \eta_3 = 0$ эти выражения переходят в известные [16].

СДУ Шредингера удобно для численного моделирования «траектории» квантовой системы, однако дальнейший анализ невинеровского спонтанного излучения будем строить на основе уравнения для матрицы плотности системы, которое получим и будем решать в следующих разделах статьи.

В заключение раздела подчеркнем роль представления эффективного гамильтониана в технике квантовых СДУ. При переходе к представлению эффективного гамильтониана меняется также и вектор, описывающий начальное состояние системы. Поэтому условия (24) и (25) накладываются именно на преобразованные векторы состояний. Иначе, как и в работе [22], следует тривиальный результат, что в таком поле квантовая система не эволюционирует, что не соответствует действительности и не является следствием пренебрежения пуассоновским процессом. Кроме того, с помощью полученных уравнений мы не можем, как обычно, анализировать ситуации, в которых происходит новое выделение быстрой и медленной подсистем по какому-нибудь параметру. Например, не следует изучать, как меняются уравнения при росте отстройки центральной частоты Ω_Γ спектра электромагнитного поля от частоты ω_{21} резонансного перехода, т. е. зависимость от параметра $\Delta = \Omega_\Gamma - \omega_{21}$. Этот параметр отсутствует в приведенных выше уравнениях, в которых было положено $\omega_{21} \approx \Omega_\Gamma$, но его нетрудно восстановить, что приведет к замене операторов $R_\pm$ в уравнениях (34) и (35): $R_\pm \to R_\pm e^{\mp i\Delta t}$. В дальнейшем будет получено уравнение для матрицы плотности квантовой частицы, которое уже не будет зависеть от параметра Δ. Это однако не означает, что уравнения будут справедливы для произвольных значений параметра Δ. При больших величинах параметра Δ, например, по сравнению со спектральной шириной линии резонансного перехода, полученной при $\Delta = 0$, приведенные выше уравнения становятся некорректными и необходимо в этом случае получить новый эффективный гамильтониан по методу, изложенному в предыдущем разделе, затем перейти к марковскому приближению и вывести новые СДУ. Эти уравнения будут уже отличаться от результата, полученного из приведенных выше уравнений (34) и (35) прежде всего другими значениями входящих параметров. Кроме того, СДУ будет определяться новым шумовым источником, отвечающим другой части спектра широкополосного электромагнитного поля. Заметим, что описанную предельную ситуацию можно реализовать в средах типа фотонного кристалла с особенностями в спектре электромагнитных волн.

Аналогично и в других примерах открытых квантовых систем — СДУ и определяемые ими уравнения для матрицы плотности открытой системы с быстрой и медленной подсистемами будут различными в зависимости от способа их получения. Необходимо сначала выделить в открытой системе быструю и медленную подсистемы и получить для них эффективный гамильтониан, СДУ и уравнения для матрицы плотности. Если же сначала не выделять в открытой системе быструю и медленную подсистемы, а получать эффективный гамильтониан задачи, СДУ и уравнения для матрицы плотности, как если бы такого разделения провести было нельзя, то в дальнейшем на основе полученных кинетических уравнений уже не следует пытаться исследовать предельный случай, в котором выделяется быстрая и медленная подсистемы, не учтенные при выводе эффективного гамильтониана. Полученные уравнения будут отличаться от уравнений, полученных на основе эффективного гамильтониана с учетом выделения в открытой системе быстрой и медленной подсистем. Важно подчеркнуть, что уравнения, полученные указанными выше различными способами, будут различаться либо принципиально, либо значением входящих в них коэффициентов. Но такие отличия будут всегда. В контексте оптических задач впервые на это обращено внимание в работе [24] в случае дисперсионного предела для атомов в микрорезонаторе с потерями на зеркалах. А поскольку, в связи с общим результатом Линдблада [28] относительно «линдбладовского» вида кинетических уравнений (см. также ниже уравнение (38)), исследование различных задач зачастую начинается с формулировки кинетических уравнений в форме Линдблада и дальнейшего их анализа, включающего иногда и предельные случаи выделения быстрой и медленной подсистем, такие исследования следует признать не вполне корректными. Некоторые примеры таких исследований упомянуты автором в работе [27].

4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АТОМНОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ И ОПЕРАТОР РЕЛАКСАЦИИ

Уравнение для матрицы плотности системы

$$\rho(t) = U(t)|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|U^\dagger(t)$$

также порождается уравнением (34) для оператора эволюции и выводится, как обычно, в технике стохастических уравнений вычислением инкремента:

$$d\rho(t) = \rho(t+dt) - \rho(t) = dU(t)|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|U^\dagger(t) + \\ + U(t)|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|dU^\dagger(t) + dU(t)|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|dU^\dagger(t).$$

Получающееся при помощи уравнения (34) и алгебры Хадсона–Партасарати уравнение для матрицы плотности $\rho(t)$ всей системы весьма громоздко:

$$\begin{aligned} d\rho(t) = {} & A_0 dt\, \rho(t) + A_+ dB(t)\rho(t) + \\ & + A_- dB^\dagger(t)\rho(t) + A_\Lambda d\Lambda(t)\rho(t) + \\ & + \rho(t)A_0^\dagger dt + \rho(t)\, dB^\dagger(t)A_+^\dagger + \rho(t)\, dB(t)A_-^\dagger + \\ & + \rho(t)\, d\Lambda(t)A_\Lambda^\dagger + A_+ dB(t)\rho(t)\, dB^\dagger(t)A_+^\dagger + \\ & + A_+ dB(t)\rho(t)\, dB(t)A_-^\dagger + A_+ dB(t)\rho(t)\, d\Lambda(t)A_\Lambda^\dagger + \\ & + A_- dB^\dagger(t)\rho(t)\, dB^\dagger(t)A_+^\dagger + A_- dB^\dagger(t)\rho(t)\, dB(t)A_-^\dagger + \\ & + A_- dB^\dagger(t)\rho(t)\, d\Lambda(t)A_\Lambda^\dagger + A_\Lambda d\Lambda(t)\rho(t)\, dB^\dagger(t)A_+^\dagger + \\ & + A_\Lambda d\Lambda(t)\rho(t)\, dB(t)A_-^\dagger + A_\Lambda d\Lambda(t)\rho(t)\, d\Lambda(t)A_\Lambda^\dagger. \end{aligned}$$

Кинетическое уравнение для матрицы плотности $\rho^{TL}(t) = \mathrm{Tr}_F\, \rho(t)$ двухуровневой подсистемы, следующее из уравнения для $\rho(t)$ после его усреднения по состояниям электромагнитного поля с учетом (33) и соотношений

$$\mathrm{Tr}_F\,(\rho(t)\, dB(t)) = \mathrm{Tr}_F\,\left(\rho(t)\, dB^\dagger(t)\right) = \\ = \mathrm{Tr}_F\,(\rho(t)\, d\Lambda(t)) = 0$$

имеет уже достаточно простой вид:

$$d\rho^{TL}(t) = A_0 dt\, \rho^{TL}(t) + \rho^{TL}(t)A_0^\dagger dt + A_-\rho^{TL}(t)A_-^\dagger\, dt$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^{TL}}{dt} = {} & \chi^2 R_+ \left(\frac{\cos(\eta_1 I + \eta_3 R_3) - 1}{(\eta_1 I + \eta_3 R_3)^2} + \right. \\ & \left. + i\frac{\eta_1 I + \eta_3 R_3 - \sin(\eta_1 I + \eta_3 R_3)}{(\eta_1 I + \eta_3 R_3)^2} \right) R_-\rho^{TL} + \\ & + \chi^2 \rho^{TL} R_+ \left(\frac{\cos(\eta_1 I + \eta_3 R_3) - 1}{(\eta_1 I + \eta_3 R_3)^2} - \right. \\ & \left. - i\frac{\eta_1 I + \eta_3 R_3 - \sin(\eta_1 I + \eta_3 R_3)}{(\eta_1 I + \eta_3 R_3)^2} \right) R_- + \\ & + \chi^2 \left\{ \frac{\cos(\eta_1 I + \eta_3 R_3) - 1}{\eta_1 I + \eta_3 R_3} - \right. \\ & \left. - i\frac{\sin(\eta_1 I + \eta_3 R_3)}{\eta_1 I + \eta_3 R_3} \right\} R_-\rho^{TL} R_+ \times \\ & \times \left\{ \frac{\cos(\eta_1 I + \eta_3 R_3) - 1}{\eta_1 I + \eta_3 R_3} + i\frac{\sin(\eta_1 I + \eta_3 R_3)}{\eta_1 I + \eta_3 R_3} \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Представленная форма (36) уравнения для матрицы плотности одиночного излучателя удобна для последующего обобщения на случай излучения ансамбля одинаковых излучателей. Для анализа влияния нерезонансных уровней уравнение (36) можно также записать в виде, следующем из второй формы записи оператора штарковского взаимодействия (3):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^{TL}}{dt} = {} & \chi^2 R_+ \sum_{k=1,2} \left(\frac{\cos\xi_k - 1}{\xi_k^2} + i\frac{\xi_k - \sin\xi_k}{\xi_k^2} \right) \times \\ & \times |E_k\rangle\langle E_k| R_-\rho^{TL} + \\ & + \chi^2 \rho^{TL} R_+ \sum_{k=1,2} \left(\frac{\cos\xi_k - 1}{\xi_k^2} - i\frac{\xi_k - \sin\xi_k}{\xi_k^2} \right) \times \\ & \times |E_k\rangle\langle E_k| R_- + \\ & + \chi^2 \sum_{k=1,2} \left(\frac{\cos\xi_k - 1}{\xi_k} - i\frac{\sin\xi_k}{\xi_k} \right) |E_k\rangle\langle E_k| R_-\rho^{TL} R_+ \times \\ & \times \sum_{k'=1,2} \left(\frac{\cos\xi_{k'} - 1}{\xi_{k'}} + i\frac{\sin\xi_{k'}}{\xi_{k'}} \right) |E_{k'}\rangle\langle E_{k'}|. \end{aligned} \quad (37)$$

Теперь можно учесть в уравнении (37) наличие в (17) нерезонансных состояний $|E_k\rangle$, $k \neq 1,2$. При этом по-прежнему считаем, что имеется только одно квантованное поле, резонансное переходу $|E_2\rangle \to \to |E_1\rangle$. Согласно формуле (17) и представленной выше процедуре вывода кинетических уравнений, в (37) следует суммирования по k и k' распространить на все уровни, а также матрицу плотности двухуровневой системы ρ^{TL} заменить на матрицу плотности квантовой частицы ρ^A. Из-за наличия в (37) операторов $R_\pm$ получим, что нерезонансные состояния никак не влияют на динамику резонансных уровней, иначе как через параметры ξ_1 и ξ_2, и

$$\langle E_k|\frac{d\rho^A}{dt}|E_k\rangle = 0 \quad \text{для} \quad k \neq 1,2.$$

Этот результат важен в следующем аспекте. В случае классических полей [26] штарковский сдвиг каждого уровня складывается из штарковских сдвигов всех задействованных в задаче полей. В квантовом случае с нулевой плотностью фотонов штарковский сдвиг уровней вообще равен нулю в силу соотношений (24), (25), откуда

$$\langle\Psi_0^F|\sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega^\dagger \sum_{\omega'}\Gamma_{\omega'} b_{\omega'} \times \\ \times \sum_k \frac{1}{2}\left(\Pi_k(\omega)+\Pi_k(\omega')\right)|E_k\rangle\langle E_k|\Psi_0^F\rangle = 0.$$

Однако, как будет видно из следующего раздела, оператор штарковского взаимодействия вызывает новый, дополнительный сдвиг энергии распадающегося уровня. И этого дополнительного сдвига нет у нерезонансных уровней. Разбиение широкополосного квантованного электромагнитного поля в случае нулевой плотности фотонов на независимые источники, следующее из представления эффективного гамильтониана, справедливо как для винеровского случая [28], так и для рассматриваемого невинеровского случая. По другому это можно сформулировать так — нерезонансные уровни квантовой частицы не чувствительны к штарковскому взаимодействию резонансных уровней с широкополосным квантованным полем с нулевой плотностью фотонов.

5. ПОДАВЛЕНИЕ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СДВИГ РАСПАДАЮЩЕГОСЯ УРОВНЯ ПРИ НЕВИНЕРОВСКОЙ ДИНАМИКЕ ОДИНОЧНОЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

Прежде чем записать уравнение (37) для резонансных матричных элементов матрицы плотности одиночной квантовой частицы, еще раз преобразуем (37), чтобы увидеть явно его линдбладовский [31] вид:

$$\frac{d\rho^{TL}}{dt} = \chi^2\left(\frac{\cos\xi_1-1}{\xi_1^2}+i\frac{\xi_1-\sin\xi_1}{\xi_1^2}\right)\times \\ \times|E_2\rangle\langle E_2|\rho^{TL} + \\ + \chi^2\rho^{TL}\left(\frac{\cos\xi_1-1}{\xi_1^2}-i\frac{\xi_1-\sin\xi_1}{\xi_1^2}\right)|E_2\rangle\langle E_2| - \\ - 2\chi^2\frac{\cos\xi_1-1}{\xi_1^2}|E_1\rangle\langle E_2|\rho^{TL}|E_2\rangle\langle E_1| = \\ = i[\rho^{TL},H^{St-Tr}] - L^\dagger L\rho^{TL} - \rho^{TL}L^\dagger L + \\ + 2L\rho^{TL}L^\dagger, \quad (38)$$

в полном соответствии с общей теорией квантовых СДУ [30]. Здесь оператор

$$H^{St-Tr} = -\chi^2\frac{\xi_1-\sin\xi_1}{\xi_1^2}|E_2\rangle\langle E_2|$$

описывает дополнительный сдвиг распадающегося уровня, обязанный невинеровскому распаду верхнего уровня квантовой частицы, а

$$L = \chi\frac{\sqrt{1-\cos\xi_1}}{\xi_1}\,|E_1\rangle\langle E_2|$$

— генератор Линдблада.

Дополнительный сдвиг

$$-\chi^2\frac{\xi_1-\sin\xi_1}{\xi_1^2}$$

распадающегося уровня $|E_2\rangle$ отличается от лэмбовского сдвига и обусловлен именно процессом его распада. Он также отличается от стандартно понимаемого штарковского сдвига, представленного в эффективном гамильтониане слагаемым $\tilde{H}^{(2)}$ и равного нулю в случае нулевой плотности фотонов. Будем называть сдвиг распадающегося уровня распадным штарковским сдвигом. Полную картину невинеровской динамики двухуровневой частицы дают уравнения для матричных элементов:

$$\frac{d\rho_{22}^{TL}}{dt} = -2\chi^2\frac{1-\cos\xi_1}{\xi_1^2}\,\rho_{22}^{TL}, \\ \frac{d\rho_{11}^{TL}}{dt} = 2\chi^2\frac{1-\cos\xi_1}{\xi_1^2}\,\rho_{22}^{TL}, \qquad (39) \\ \frac{d\rho_{21}^{TL}}{dt} = -\chi^2\left(\frac{1-\cos\xi_1}{\xi_1^2}-i\frac{\xi_1-\sin\xi_1}{\xi_1^2}\right)\rho_{21}^{TL}.$$

Таким образом, штарковское слагаемое $H^{Int-St}(t)$ в операторе взаимодействия приводит к перенормировке констант обычного радиационного распада и к дополнительному сдвигу частоты резонансного атомного перехода.

При любых величинах параметра штарковского взаимодействия основного уровня ξ_1 штарковское взаимодействие с вакуумным электромагнитным полем подавляет радиационные переходы в одиночном излучателе, уменьшая константу радиационного распада. При этом пуассоновский процесс как бы стабилизирует возбужденный атом. Это отчетливо видно из упрощенного уравнения для случая малых значений параметра ξ_1:

$$\frac{d\rho_{22}^{TL}}{dt} = -\chi^2\left(1-\frac{\xi_1^2}{12}\right)\rho_{22}^{TL},$$

$$\frac{d\rho_{11}^{TL}}{dt} = \chi^2 \left(1 - \frac{\xi_1^2}{12}\right) \rho_{22}^{TL},$$
$$\frac{d\rho_{21}^{TL}}{dt} = -\frac{1}{2}\chi^2 \left(1 - \frac{\xi_1^2}{12} + i\frac{\xi_1}{3}\right) \rho_{21}^{TL}.$$

Заметим, что штарковский сдвиг уровня можно рассматривать как результат виртуальных переходов с поглощением и излучением виртуального кванта, приводящих к возвращению обратно на этот же уровень. В квантовом случае эти переходы интерферируют с реальным переходом с возбужденного состояния на нижний уровень. В результате суммарная скорость перехода на нижний уровень уменьшается. В гипотетической ситуации, при достаточной величине штарковского сдвига $\xi_1 \to 2\pi$ частица участвует только в виртуальных переходах и перехода на основное состояние не происходит, т. е. штарковское взаимодействие замораживает частицу на возбужденном уровне. Напомним, что все сказанное относится к случаю нулевой плотности фотонов вакуумного электромагнитного поля.

В отсутствие прямых квантовых переходов между энергетическими уровнями ($\chi = 0$) пуассоновский процесс в электромагнитном поле без фотонов никак не сказывается на состоянии атома.

Теперь опишем уравнение (36) для размерных величин. Если в качестве характерной частоты выбрать частоту ω_{21} резонансного перехода, а в качестве характерного времени ω_{21}^{-1}, то

$$\chi = \Gamma_{\Omega_\Gamma} \hbar^{-1} d_{12}, \quad \eta_1 = \chi^2 \frac{\Pi_2(\omega_{21}) + \Pi_1(\omega_{21})}{2(d_{12})^2/\hbar\omega_{21}},$$
$$\eta_3 = \chi^2 \frac{\Pi_2(\omega_{21}) - \Pi_1(\omega_{21})}{(d_{12})^2/\hbar\omega_{21}}, \tag{40}$$
$$\xi_1 = \chi^2 \frac{\Pi_1(\omega_{21})}{(d_{12})^2/\hbar\omega_{21}}, \quad \xi_2 = \chi^2 \frac{\Pi_2(\omega_{21})}{(d_{12})^2/\hbar\omega_{21}}.$$

Здесь d_{12} — действительная величина, а в уравнениях (36)–(38) для получения размерного уравнения необходимо провести замену $t \to \omega_{21} t$. Напомним, что в силу рассматриваемого резонанса $\Omega_\Gamma = \omega_{21}$, а при выбранном способе приведения к безразмерному виду должно также выполняться неравенство

$$\chi^2 \ll 1,$$

чтобы разложения (8) имели смысл.

В случае атомно-фотонного кластера процесс непосредственного однофотонного перехода между резонансными уровнями описывается слагаемым того же порядка, что и штарковское взаимодействие. Вместо

$$H^{Int-Tr} = \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega d_{21} R_+ + \text{H.c.}$$

имеем оператор [9]

$$H^{Int-Tr} = -gR_+ c^\dagger \sum_\omega \Gamma_\omega b_\omega \Pi_{21}(\Omega_\Gamma) + \text{H.c.},$$

который определяется характерным параметром оператора двухквантового перехода

$$\Pi_{21}(\Omega_\Gamma) = \sum_j \frac{d_{2j} d_{j1}}{\hbar} \left(\frac{1}{\omega_{j2} + \Omega_\Gamma} + \frac{1}{\omega_{j1} - \Omega_\Gamma}\right).$$

Этот параметр, вообще говоря, того же порядка, что и величины $\Pi_1(\Omega_\Gamma)$ и $\Pi_2(\Omega_\Gamma)$. Здесь g — константа связи атома с фотонами микрорезонаторной моды, описываемой операторами рождения $c^\dagger$ и уничтожения c, а также частотой ω_c. Вместе с центральной частотой широкополосного квантованного электромагнитного поля фотоны микрорезонатора находятся в комбинационном резонансе $\Omega_\Gamma - \omega_c = \omega_{21}$ с оптически запрещенным атомным переходом $|E_2\rangle \to |E_1\rangle$ [9]. Величина g, вообще говоря, имеет тот же порядок, что и величина $\Gamma_{\Omega_\Gamma}\Delta\omega_c$, где $\Delta\omega_c$ — спектральная ширина микрорезонаторной моды, так что

$$\chi = g\Gamma_{\Omega_\Gamma}\Pi_{21}(\Omega_\Gamma)\hbar^{-1} \sim \Gamma_{\Omega_\Gamma}^2 \Pi_{21}(\Omega_\Gamma)\hbar^{-1}\Delta\omega_c,$$
$$\xi_k = \chi^2 \hbar \frac{\Pi_k(\Omega_\Gamma)\hbar\Omega_\Gamma}{g^2 \left(\Pi_{21}(\Omega_\Gamma)\right)^2} \sim \chi \frac{\Pi_k(\Omega_\Gamma)\Omega_\Gamma}{\Pi_{21}(\Omega_\Gamma)\Delta\omega_c}. \tag{41}$$

Поскольку $\Delta\omega_c \ll \Omega_\Gamma$, при $\chi^2 \ll 1$ параметры ξ_k (и η_k) могут быть порядка единицы, а за счет числа атомов, составляющих атомно-фотонный кластер, штарковское взаимодействие усиливается. Случай малости параметров ξ_k рассмотрен в работе [9].

Таким образом, в случае одноквантового резонанса одиночной частицы нужны специальные условия, чтобы параметры ξ_k были порядка единицы и эффекты подавления релаксации и дополнительного сдвига энергии возбужденного уровня были заметны. Между тем, для коллективного спонтанного излучения в условиях как одноквантового, так и двухквантового резонанса параметры ξ_k могут быть порядка единицы вследствие дополнительной пропорциональности числу частиц и описанные эффекты существенны, а спонтанное излучение имеет невинеровский тип.

Заметим, что в модельной ситуации, когда $\eta_1 = 0$, гамильтониан задачи выражается только через генераторы $su(2)$-алгебры, что можно представить в виде модельного гамильтониана

$$H = \hbar\omega_{21}R_3 + \int \hbar\omega b_\omega^\dagger b_\omega d\omega + \int \Gamma_\omega b_\omega^\dagger D_{12}(\omega) R_- d\omega + \\ + \int \Gamma_\omega b_\omega D_{21}(\omega) R_+ d\omega + \\ + \int \Gamma_\omega \Gamma_{\omega'} b_\omega^\dagger b_{\omega'} \Pi(\omega,\omega') R_3 d\omega\, d\omega'$$

с некоторыми параметрами $D_{12}(\omega)$ и $\Pi(\omega,\omega')$. Использование такого модельного гамильтониана удобно в различных исследованиях. При этом безразмерные уравнения для матричных элементов матрицы плотности, полученные в марковском приближении, совпадают с уравнениями (39), в которых величина ξ_1 заменена на некоторый безразмерный параметр η, определяемый величиной $\Pi(\omega,\omega')$ [32]. Однако в подходе с использованием указанного модельного гамильтониана нельзя определить, сдвиги какого из уровней вызываются штарковским взаимодействием. Нельзя также судить о роли нерезонансных уровней и их поведении при невинеровском распаде возбужденного уровня.

Далее продолжаем использовать безразмерные величины и уравнения.

6. НЕВИНЕРОВСКОЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ АНСАМБЛЯ ОДИНАКОВЫХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

Уравнение (36) легко обобщается на случай взаимодействия с широкополосным квантованным электромагнитным полем с нулевой плотностью фотонов ансамбля одинаковых частиц, сосредоточенных в объеме с характерным размером, меньшим длины резонансной волны. О спонтанном излучении ансамбля возбужденных атомов принято говорить как о сверхизлучении [10]. Если, как обычно в теории сверхизлучения, пренебречь диполь-дипольным взаимодействием одинаковых частиц и сходными по структуре малыми слагаемыми, появляющимися вследствие унитарного преобразования в эффективном гамильтониане, то нетрудно получить следующее кинетическое уравнение для матрицы плотности ρ^N ансамбля из $N = 2r$ одинаковых частиц в поле (24), (25):

$$\frac{d\rho^N}{dt} = \chi^2 R_+ \left(\frac{\cos(\eta_1 NI + \eta_3 R_3) - 1}{(\eta_1 NI + \eta_3 R_3)^2} + \right. \\ \left. + i\frac{\eta_1 NI + \eta_3 R_3 - \sin(\eta_1 NI + \eta_3 R_3)}{(\eta_1 NI + \eta_3 R_3)^2} \right) R_- \rho^N + \\ + \chi^2 \rho^N R_+ \left(\frac{\cos(\eta_1 NI + \eta_3 R_3) - 1}{(\eta_1 NI + \eta_3 R_3)^2} - \right. \\ \left. - i\frac{\eta_1 NI + \eta_3 R_3 - \sin(\eta_1 NI + \eta_3 R_3)}{(\eta_1 NI + \eta_3 R_3)^2} \right) R_- + \\ + \chi^2 \frac{\cos(\eta_1 NI + \eta_3 R_3) - 1 - i\sin(\eta_1 NI + \eta_3 R_3)}{\eta_1 NI + \eta_3 R_3} \times \\ \times R_- \rho^N R_+ \times \\ \times \frac{\cos(\eta_1 NI + \eta_3 R_3) - 1 + i\sin(\eta_1 NI + \eta_3 R_3)}{\eta_1 NI + \eta_3 R_3}. \quad (42)$$

Здесь предположено, что начальное состояние частиц является симметричным по отношению к их перестановкам, а операторы $R_\pm$ и R_3 реализуют $(N+1)$-мерное представление $su(2)$-алгебры.

Состояния излучателей представляются собственными векторами $|m\rangle$ оператора R_3: $R_3|m\rangle = m|m\rangle$, $-r \le m \le r$. Состояние ансамбля из полностью возбужденных квантовых частиц дается вектором $|r\rangle$, а состояние ансамбля, все частицы которого находятся в основном состоянии, — вектором $|-r\rangle$. При исследовании сверхизлучения считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ все квантовые частицы ансамбля возбуждены, так что $|\Psi_0^A\rangle = |r\rangle$.

В уравнение (42) входят величины $\eta_1 NI$ и $\eta_3 R_3$, что обусловливает важное следствие коллективного распада — в ансамбле одинаковых атомов штарковское взаимодействие усиливается.

В модельном случае, когда параметры штарковских сдвигов уровней равны, $\Pi_2(\omega_{21}) = \Pi_1(\omega_{21})$, т. е., когда $\eta_3 = 0$, невинеровское сверхизлучение описывается теми же формулами, что и обычное (винеровское) сверхизлучение, но с перенормированной константой χ, что видно из уравнений для диагональных матричных элементов:

$$\frac{d\rho^N_{mm}}{dt} = -2\chi^2 g_{m\,m-1} \frac{1-\cos(\eta_1 N)}{(\eta_1 N)^2}\, \rho^N_{mm} + \\ + 2\chi^2 g_{m+1\,m} \frac{1-\cos(\eta_1 N)}{(\eta_1 N)^2}\, \rho^N_{m+1\,m+1},$$

$$g_{m\,m-1} = \langle m|R_+|m-1\rangle\langle m-1|R_-|m\rangle = (r+m)(r-m+1).$$

Поэтому в приближении большого числа возбуждений $N \gg 1$ [10] имеем

$$\overline{I}(t) \approx \overline{\gamma} \cdot \frac{1}{4} N^2 \operatorname{sh}^2 \left[\overline{\gamma} \cdot \frac{1}{2} N (t - t_D) \right],$$
$$\overline{\gamma} = 2\chi^2 \alpha \hbar \omega_{21} \frac{1 - \cos(\eta_1 N)}{(\eta_1 N)^2}, \qquad (43)$$
$$t_D = (\overline{\gamma} N)^{-1} \ln(\overline{\gamma} N).$$

В отличие от случая обычного сверхизлучения, время задержки и длительность импульса невинеровского сверхизлучения немонотонно зависят от числа частиц. Если в обычном сверхизлучении с ростом числа частиц время задержки и длительность импульса уменьшаются, то в невинеровском сверхизлучении может наблюдаться их рост из-за зависимости $\overline{\gamma}$ в формуле (43) от невинеровского фактора $(1-\cos(\eta_1 N))/(\eta_1 N)^2$. При этом существует «критическое число» N_{cr} возбужденных квантовых частиц $\eta_1 N_{cr} = 2\pi$, из ансамбля которых (сверх)излучение подавляется. Этот эффект является следствием эффекта подавления релаксации штарковским взаимодействием. При этом, поскольку величина штарковского сдвига энергетических уровней ансамбля одинаковых частиц пропорциональна числу частиц в ансамбле, рост числа атомов приводит к эффективному росту штарковского взаимодействия. В конечном счете все это связано с увеличением эффективного дипольного момента симметризованного ансамбля одинаковых квантовых частиц.

В общем случае имеем

$$\frac{d\rho_{mm}^N}{dt} = -2\chi^2 g_{m\,m-1} \frac{1 - \cos\left(\eta_1 N + \eta_3 (m-1)\right)}{\left(\eta_1 N + \eta_3 (m-1)\right)^2} \rho_{mm}^N + 2\chi^2 g_{m+1\,m} \frac{1 - \cos(\eta_1 N + \eta_3 m)}{(\eta_1 N + \eta_3 m)^2} \rho_{m+1\,m+1}^N.$$

Средняя интенсивность $\overline{I}(t)$ сверхизлучения пропорциональна убыли энергии ансамбля:

$$\overline{I}(t) = -\alpha \frac{d}{dt} \operatorname{Tr}(H^N \rho^N),$$

где $H^N = \hbar\omega_{21} R_3$ и введен геометрический коэффициент α. Тогда

$$\overline{I}(t) = \alpha \sum_{m=-N/2}^{N/2} \hbar\omega_{21} 2\chi^2 G_{m\,m-1} \rho_{mm}^N \equiv \alpha' \sum_{m=-N/1}^{N/2} G_{m\,m-1} \rho_{mm}^N,$$

$$G_{m\,m-1} = g_{m\,m-1} \frac{1 - \cos\left(\eta_1 N + \eta_3 (m-1)\right)}{\left(\eta_1 N + \eta_3 (m-1)\right)^2}.$$

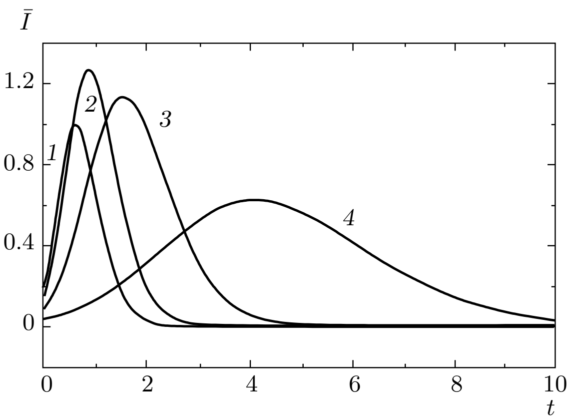

Рис. 3. Нормированный профиль интенсивности сверхизлучения как функция безразмерного времени для различного числа квантовых частиц: 13 (*1*), 17 (*2*), 21 (*3*), 25 (*4*). $\eta_1 = 0.2$, $\eta_3 = 0$. Единице интенсивности сверхизлучения отвечает максимальная интенсивность для случая 13 частиц

При излучении возбужденный ансамбль квантовых частиц последовательно переходит из полностью инвертированного состояния $|r\rangle$ в состояние $|m\rangle$, $m = r-1, r-2, \ldots$ Если $\eta_1 \geq 0$, $\eta_3 > 0$ и число частиц в ансамбле такое, что существует число m_{cr}, $-r < m_{cr} < r$, при котором $\eta_1 N + \eta_3 (m_{cr} - 1) \approx 2\pi$, то возможен эффект «остановки» процесса излучения и стабилизации возбужденного ансамбля по отношению к коллективному распаду, поскольку скорость перехода $G_{m_{cr}\,m_{cr}-1}$ из состояния $|m_{cr}\rangle$ на более низкий энергетический уровень $|m_{cr}-1\rangle$ становится равной нулю.

На рис. 3 представлены временные профили интенсивности коллективного спонтанного излучения возбужденного ансамбля одинаковых квантовых частиц для различного числа частиц в ансамбле. Видно, что при выбранных значениях параметров с ростом числа частиц время задержки и ширина импульса излучения растут в противоположность случаю обычного сверхизлучения.

На рис. 4 представлены временные профили интенсивности коллективного спонтанного излучения возбужденного ансамбля одинаковых квантовых частиц для различных величин параметра η_3 в области, далекой от режима подавления спонтанного распада. С увеличением штарковского взаимодействия, описываемого параметром η_3, время задержки и ширина импульса сверхизлучения растут, причем наблюдается и незначительный рост интенсивности.

Представленные новые закономерности коллек-

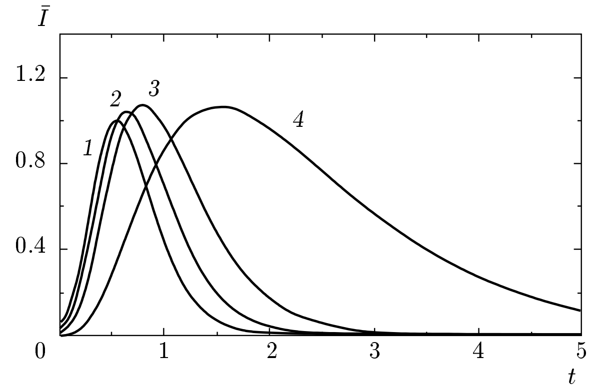

Рис. 4. Нормированный профиль интенсивности сверхизлучения ансамбля из 13 частиц как функция безразмерного времени для различной величины штарковского взаимодействия: $\eta_3 = 0.5$ (*1*), 0.6 (*2*), 0.7 (*3*), 0.9 (*4*). $\eta_1 = 0.05$. Единице интенсивности сверхизлучения отвечает максимальная интенсивность в случае $\eta_3 = 0.5$

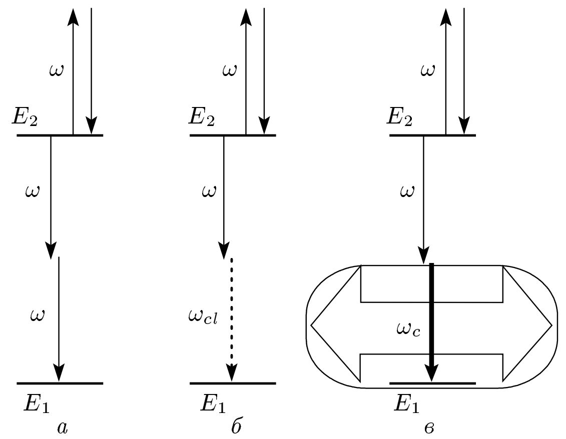

Рис. 5. Схематическое изображение реальных переходов на основной уровень E_1 с излучением кванта частоты ω и виртуальных переходов без излучения кванта с возвращением на возбужденный уровень E_2 в случае двухфотонных резонансов. Жирные сплошная и пунктирная стрелки отмечают кванты микрорезонаторной моды частоты ω_c и классического электромагнитного поля частоты ω_{cl}. Переход $E_2 \to E_1$ является оптически запрещенным

тивного спонтанного излучения ансамбля одинаковых квантовых частиц могут служить отправной точкой для дальнейшего более детального исследования, в котором следует учесть диполь-дипольное взаимодействие одинаковых квантовых частиц, их различное взаимное положение и др.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отличительной физической чертой невинеровской релаксации является конкуренция и суперпозиция реальных переходов с излучением кванта и виртуальных переходов вследствие штарковского взаимодействия без излучения кванта с возвращением на возбужденный уровень. Вследствие этого штарковское взаимодействие стабилизирует возбужденную квантовую частицу, подавляя спонтанное излучение в одиночной квантовой частице, а в ансамбле одинаковых частиц слабое штарковское взаимодействие усиливается коллективным процессом взаимодействия атомов с вакуумным полем и подавляет коллективное спонтанное излучение, в том числе и сверхизлучение. Наиболее подходящими задачами для экспериментального исследования невинеровского спонтанного излучения, несомненно, являются коллективное (одноквантовое, двухквантовое) спонтанное излучение и процессы релаксации в искусственных излучателях, например, типа атомно-фотонного кластера [9]. В случае одиночного атомно-фотонного кластера необходимая интенсивность штарковского взаимодействия обеспечивается достаточным числом атомов в кластере. По сравнению с исследованным в статье случаем одноквантового распада двухквантовые процессы релаксации сложны для исследования, например, двухфотонный распад возбужденного состояния, в котором атом излучает два фотона (см. рис. 5*а*). Строгий теоретический анализ таких процессов в рамках одного только предположения о марковости процессов взаимодействия атомов с широкополосным электромагнитным полем автору на сегодняшний день неизвестен. Отчасти причина этого кроется в отсутствии подходящего математического описания двухквантового распада с излучением двух фотонов при помощи квантовых СДУ. Анализ же двухфотонного распада при значительном штарковском взаимодействии (рис. 1) в рамках методов [14–16], альтернативных методу квантовых СДУ, сталкивается со значительными вычислительными трудностями. Дело в том, что в методах [14–16] для получения кинетического уравнения двухфотонно излучающей квантовой частицы необходимо просуммировать весь бесконечный ряд, обязанный в конечном итоге сути штарковского взаимодействия как пуассоновского процесса. На это указывает, в частности, наличие в кинетических уравнениях, полученных в данной статье, например в уравнении (38), невинеровского фактора $(1 - \cos\xi_1)/\xi_1^2$. До сих пор все

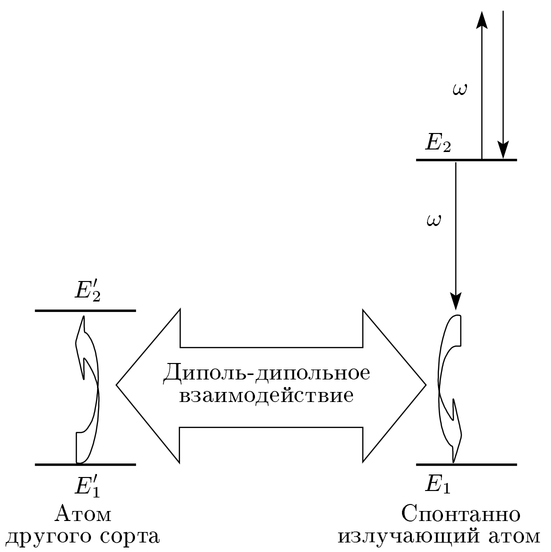

Рис. 6. Двухквантовые процессы при спонтанном излучении кванта ω с переходом с возбужденного уровня на основной $E_2 \to E_1$ в одной частице при ее взаимодействии с атомом окружения и его возбуждении на уровень E_2'. Переход $E_2 \to E_1$ оптически запрещенный, $E_2' \to E_1'$ — оптически разрешенный

кинетические уравнения, выведенные альтернативными методами [14–16], использовали лишь первое неисчезающее слагаемое упомянутого бесконечного ряда. Поэтому известные работы по коллективному спонтанному двухфотонному распаду в широкополосном вакууме имеют ограниченную область применимости, в которой штарковским взаимодействием можно пренебречь. В технике квантовых СДУ аналогичное суммирование, как продемонстрировано в данной работе, происходит автоматически благодаря алгебре Хадсона – Партасарати. В результате, для строгого анализа невинеровского спонтанного излучения в данной статье рассмотрены лишь ситуации, к которым применим подход квантовых СДУ с алгеброй Хадсона – Партасарати, а именно, излучательные переходы с высвечиванием только одного фотона.

К спонтанному излучению с высвечиванием одного фотона при необходимости учета сильного штарковского взаимодействия в ансамбле одинаковых частиц можно отнести следующие случаи. 1) Случай оптически разрешенного перехода (рис. 1). 2) Двухквантовые процессы релаксации, в которых также излучается только один квант. При этом другой квант, участвующий в двухквантовом резонансном переходе, берется либо из внешнего дополнительного когерентного поля (частоты ω_{cl}, рис. 5*б*), либо из микрорезонаторной фотонной или фононной моды (частоты ω_c и малой спектральной ширины, рис. 2, 5*в*), либо за счет взаимодействия с окружающими атомами среды (рис. 6). Заметим, что в настоящее время схемы, аналогичные схемам, представленным на рис. 2, 5*в*, серьезно обсуждаются в качестве практических схем атомно-фотонных интерфейсов устройств квантовых вычислений [33].

Двухквантовые процессы с излучением одного кванта и участием фотонов микрорезонаторной моды (рис. 2, 5*в*) описываются на основе представления об атомно-фотонном кластере [9, 34]. В работе [9] автор был вынужден ограничиться узкой областью параметров, в которой штарковским взаимодействием с широкополосным квантованным полем можно было пренебречь (чтобы избежать рассмотрения невинеровских процессов), и был рассмотрен только винеровский распад атомно-фотонного кластера. Результаты данной статьи непосредственно применимы и для описания невинеровского распада однократно возбужденного атомно-фотонного кластера. Случай невинеровского распада многократно возбужденного атомно-фотонного кластера также может быть рассмотрен в рамках развитого в данной статье подхода, однако здесь также будут проявляться особенности атомно-фотонного кластера, связанные с его описанием полиномиальной алгеброй третьего порядка.

Случай, представленный на рис. 5*в*, рассмотрен автором в работе [23]. В работе [23] штарковское взаимодействие сводится к «сильному» винеровскому процессу, пропорциональному амплитуде когерентного поля, и слабому пуассоновскому процессу, которым пренебрегалось. Однако и в таких условиях пуассоновский процесс будет заметен в случае коллективного взаимодействия с вакуумным полем атомного ансамбля.

Для анализа случая использования широкополосного электромагнитного поля с ненулевой плотностью фотонов отсутствует аппарат квантовых СДУ — необходимо получить обобщение алгебры Хадсона – Партасарати на случай ненулевой плотности фотонов. Однако на пути обобщения алгебры Хадсона – Партасарати лежат пока не преодоленные математические трудности.

Случай спонтанного излучения атома в среде с особенностями в фотонном спектре за счет дополнительного взаимодействия с атомами среды (рис. 6) был рассмотрен автором в работе [25]. Однако там задача также была решена в узкой области параметров, в которой штарковским взаимодействием пренебрегалось ввиду неумения на тот момент строго его учесть. Тем не менее и в задачах, подобных [25], штарковское взаимодействие также может быть весьма существенно для ансамбля примесных атомов.

В заключение подчеркнем, что штарковское взаимодействие является в некотором смысле универсальным, поскольку представляет эффект второго порядка по полю независимо от условий резонанса, и усиливается в ансамбле из определенного числа одинаковых частиц. Имеется достаточно различных физических условий спонтанного излучения квантовой частицы и ансамбля одинаковых частиц, в которых именно невинеровский тип спонтанного излучения должен быть определяющим, и подход, изложенный в данной статье, может быть применим для их описания в случае нулевой плотности фотонов электромагнитного вакуума.

Автор выражает благодарность В. П. Белавкину за замечание по содержанию работы [30] и используемой терминологии и А. М. Чеботареву за обсуждения математических вопросов, связанных с пуассоновским процессом и процессами Леви. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00503а).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A **114**, 710 (1927).
2. V. Weisskopf and E. Wigner, Z. Phys. **63**, 54 (1930); **65**, 18 (1931).
3. E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Acad. Press, London (1976).
4. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-level Atoms*, Willey, New York (1975).
5. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, Москва (1977).
6. F. Bloch, Phys. Rev. **70**, 460 (1946).
7. Y. Yamamoto and A. Imamoglu, *Mesoscopic Quantum Optics*, Wiley, New York (1999).
8. D. Loss and D. P. DiVincenzo, Phys. Rev. A **57**, 120 (1998).
9. А. М. Башаров, ЖЭТФ **137**, 1090 (2010).
10. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Super-Radiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP, Bristol and Philadelphia (1996).
11. H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
12. A. Barchielli, Phys. Rev. A **34**, 1642 (1986).
13. A. Barchielli and V. P. Belavkin, J. Phys. A **24**, 1495 (1991).
14. К. Блум, *Теория матрицы плотности и ее приложения*, Мир, Москва (1983).
15. H.-P. Breuer and F. Petruccione, *Theory of Open Quantum Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford (2002).
16. V. E. Tarasov, *Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems*, Elsevier, Amsterdam, Boston, London, New York (2008).
17. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Comm. Math. Phys. **93**, 301 (1984).
18. C. W. Gardiner and M. J. Collet, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985).
19. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (2000).
20. A. M. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*, Sociedad Mathematica Mexicana, Mexico (2000).
21. А. С. Холево, *Квантовая вероятность и квантовая статистика*, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, Москва (1991), т. 83, с. 31.
22. W. J. Munro and C. W. Gardiner, Phys. Rev. A **53**, 2633 (1996).
23. А. М. Башаров, ЖЭТФ **102**, 1126 (1992).
24. A. M. Basharov, V. N. Gorbachev, and A. A. Rodichkina, Phys. Rev. A **74**, 042313 (2006).
25. А. М. Башаров, ЖЭТФ **116**, 469 (1999).
26. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).
27. А. М. Башаров, Теор. физика (Самара) **9**, 7 (2008).
28. M. Lax, Phys. Rev. **145**, 110 (1966).
29. В. П. Белавкин, УМН **47**, 47 (1992).
30. В. П. Белавкин, ТМФ **110**, 46 (1997).
31. G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
32. A. M. Basharov, Phys. Lett. A **375**, 784 (2011); http://arxiv.org/abs/1101.3288.
33. K. Hammerer, A. S. Sørensen, and E. S. Polzik, Rev. Mod. Phys. **82**, 1041 (2010).
34. А. М. Башаров, Изв. РАН, сер. физ. **75**, 179 (2011).