

ВЕРОЯТНОСТЬ И ФОРМА ЛИНИИ СПЕКТРА ОДНОКРАТНОЙ ОБЪЕМНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ БЫСТРОГО ЭЛЕКТРОНА В СРЕДЕ С ЭЛЕКТРОННЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ И СИЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

*Б. Н. Либенсон**

*Санкт-Петербургский технический университет
195251, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 29 ноября 2010 г.

Рассчитана вероятность однократной характеристической потери энергии быстрым электроном в эксперименте «на отражение». В отличие от многочисленных публикаций на эту тему в настоящей работе учитывается эффект тормозного испускания объемных плазмонов в «нечеренковском» диапазоне частот и волновых векторов плазмона. Определены вклады в вероятность однократной потери и форму линии спектра от квантовой поправки, обусловленной интерференцией упругого и неупругого актов электронного рассеяния. Расчет вероятности выполнен в кинетическом приближении для диэлектрической проницаемости, в котором корректным образом учитывается коротковолновый участок диапазона плазмонного спектра. В связи с этими факторами уточнено выражение для длины пробега электрона по отношению к испусканию объемного плазмона, полученное Пайнсом [12] около 50 лет назад. Выполнена оценка длины когерентности быстрого электрона в рассматриваемом диапазоне средних энергий. Определена форма линии спектра потерь энергии в нечеренковском диапазоне частот. Показано, что однократная вероятность испускания объемного плазмона не вполне соответствует статистике Пуассона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существующие представления о процессе однократных характеристических потерь энергии налетающих электронов средних энергий¹⁾ с их последующим отражением от мишени основываются на таком теоретическом описании процесса испускания электроном плазмона в акте неупругого столкновения с электронами среды и столкновения с некогерентно и упруго рассеивающими центрами, в котором законы сохранения энергии и импульса выполняются в каждом акте рассеяния. Такие представления справедливы только тогда, когда можно пренебречь всеми диссипативными процессами, сопровождающими электронный транспорт. Однако в реальности имеет место электронное поглощение, которое

связано с процессами диссипации энергии и импульса быстрого электрона в процессе его движения в среде. Для описания таких диссипативных процессов удобно ввести в рассмотрение мнимый потенциал электронного волнового поля быстрого электрона [1, стр. 627–630]. Этот мнимый потенциал для электронов средних энергий определяется в основном тремя процессами диссипации энергии и импульса: выходом электрона из когерентного состояния за счет испускания плазмонов, за счет потери энергии при возбуждении электронно-дырочных пар, за счет малоуглового некогерентного упругого рассеяния на атомах. В соответствии с «оптической» теоремой [1] величина мнимого потенциала $\Gamma \propto n \operatorname{Im} f(0)$ пропорциональна концентрации атомов n и мнимой части амплитуды электронного рассеяния на нулевой угол. Для средних энергий электронов $E \approx 100\text{--}300$ эВ отношение $\Gamma/\hbar\omega_p \approx 0.7\text{--}1.0$. Следовательно, в каждом акте неупругого рассеяния электрона имеет место отклонение от усло-

*E-mail: libenson-b@yandex.ru, b.n.libenson@gmail.com

¹⁾ Это такие энергии, при которых борновское приближение для упругого электрон-атомного рассеяния еще не применимо, а s -рассеяние уже не является преобладающим.

вий выполнения законов сохранения на величину Γ , сравнимую с плазменной энергией $\hbar\omega_p$.

Вследствие сказанного выше даже процесс однократного испускания объемного плазмона в безграничной поглощающей среде требует серьезного уточнения, поскольку в такой среде имеет место тормозное излучение объемных плазмонов с большими длинами волн λ , которые лежат выше «черенковского» предела $\lambda\omega > v$, где v — скорость быстрой заряженной частицы. В настоящей работе дана оценка вклада тормозного механизма испускания объемного плазмона в полную однократную вероятность испускания. Кроме того, меняется вероятность испускания плазмона и в черенковском диапазоне частот и волновых векторов: она уменьшается благодаря влиянию мнимого потенциала. Однако, несмотря на рост сечения возбуждения плазмона при уменьшении переданного плазмону импульса, суммарный вклад влияния мнимого потенциала в полное сечение генерации плазмона остается положительным при небольших величинах мнимого потенциала и становится отрицательным по мере увеличения мнимого потенциала. Поэтому длина пробега быстрого электрона до акта возбуждения плазмона в значительной мере зависит от величины мнимого потенциала среды. Это обстоятельство является предметом настоящего исследования.

В большинстве ранее опубликованных работ (за исключением [2–7]) не принимался во внимание квантовый характер интерференционных явлений наложения процессов с разными сценариями столкновений. В простейшем сценарии двух актов рассеяния быстрого электрона, соответствующих упругому и неупругому столкновениям, возможны два варианта процесса, различающиеся порядком следования столкновений. Вероятность такого процесса пропорциональна квадрату модуля суммы амплитуд двух вариантов последовательности столкновений. Помимо суммы двух квадратов модулей амплитуд таких последовательностей столкновений имеет место интерференция амплитуд этих двух актов рассеяния, различающихся порядком их следования. Даже для однократных характеристических потерь энергии такого рода квантовая поправка к величине вероятности может составлять десяток процентов по сравнению с известной черенковской величиной такой вероятности.

Для алюминия и некоторых других металлов пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости ϵ является основой уширения спектра объемной плазменной потери энергии. Такая ситуация имеет место, когда $E_F/E > v/\omega_p$, где E_F —

энергия Ферми, а v — частота столкновений электронов среды. В этом случае расчет вероятности однократной потери энергии в сильной степени зависит от используемой аппроксимации диэлектрической проницаемости среды. Точность расчета зависит от того, насколько корректно определен вклад коротковолновой структуры функции $\epsilon(\mathbf{Q}, \omega)$, соответствующей спектру возбуждений плазмона с волновым вектором \mathbf{Q} . Использование простейших моделей (например, гидродинамическое приближение [8, 9]), корректно учитывающих лишь длинноволновые свойства диэлектрической проницаемости, может привести к погрешностям в оценке вероятности испускания плазмона, а следовательно, и длины пробега быстрого электрона до акта плазменной потери. Для надежной оценки вероятности необходимо использовать как минимум кинетическое описание функции $\epsilon(\mathbf{Q}, \omega)$, справедливое во всем диапазоне волновых векторов плазмонного спектра $Qv_F < \omega_p$, при условии $\hbar\omega_p < 4E_F$ [10, стр. 250–253].

Не будем усложнять картину исследуемых процессов существованием границы среды, а будем рассматривать процессы рассеяния и отражения так, как если бы они проходили в безграничном объеме среды. Кроме того, следует отметить, что в целом для всего процесса рассеяния быстрого электрона в среде, состоящего из двух актов рассеяния, которые описываются двумя сценариями, законы сохранения, естественно, выполняются. Отклонения от условий выполнения законов сохранения имеют место только для каждого отдельного акта рассеяния. Не усложняя общую картину, мы будем интересоваться только актом электрон-плазмонного рассеяния и связанными с ним вероятностями такого неупругого столкновения, поскольку вероятность однократного упругого некогерентного рассеяния на большой угол входит мультипликативно в полную вероятность всего процесса и не представляет для нас интереса.

2. АМПЛИТУДА И ВЕРОЯТНОСТЬ РАССЕЙАНИЯ БЫСТРОГО ЭЛЕКТРОНА С ВОЗБУЖДЕНИЕМ ОБЪЕМНОГО ПЛАЗМОНА В СРЕДЕ С ЭЛЕКТРОННЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

Выражение для вероятности испускания плазмона в безграничной среде имеет вид

$$P = \frac{1}{V} \sum_f \int |\Psi(\mathbf{r}, f)|^2 d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где $\Psi(\mathbf{r}, f)$ — волновая функция быстрого электрона, а V — объем среды. Амплитуда $T_1(\mathbf{r}_1, i \rightarrow f)$ перехода имеет вид

$$T_1(\mathbf{r}_1, i \rightarrow f) = \int d\mathbf{R}_1 \Phi_f^*(\mathbf{R}_1) U_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_1) \Phi_i(\mathbf{R}_1), \quad (2)$$

где \mathbf{R}_1 — набор координат электронов среды, участвующих в плазменном колебании, $\Phi_i(\mathbf{R})$ и $\Phi_f(\mathbf{R})$ — волновые функции начального и конечного состояний электронов среды,

$$U_e(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{R}} \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}$$

— энергия взаимодействия быстрого электрона с электронами среды (плазмоном). Волновая функция первого приближения имеет вид

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_1 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Psi_0(\mathbf{r}_1) T_1(\mathbf{r}_1, i \rightarrow f). \quad (3)$$

Здесь $\Psi_0(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ — волновая функция быстрого электрона в начальном состоянии, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ — двухчастичная функция Грина, \mathbf{k} — волновой вектор быстрого электрона в начальном состоянии. Следовательно,

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{k}_1 \times \frac{\exp[i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1]}{E - E_{\mathbf{k}_1} - \epsilon_{if} + i\Gamma} T_1(\mathbf{r}_1, i \rightarrow f). \quad (4)$$

Здесь E — энергия быстрого электрона в начальном состоянии, ϵ_{if} — энергия, переданная электронам среды, $\Gamma = \hbar v / 2L$, $L = l_c$, l_c — длина когерентности в среде с поглощением или $L = V^{1/3}$ — размер среды в среде без поглощения. (Двойка в знаменателе выражения для Γ стоит в связи с тем, что пространственный спад волновой функции в два раза слабее спада интенсивности.)

Воспользуемся тем фактом, что амплитуда вероятности излучения объемного плазмона может быть выражена посредством фурье-преобразования,

$$T_1(\mathbf{r}, i \rightarrow f) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{Q} A_{if}(\mathbf{Q}) \exp(-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}). \quad (5)$$

Тогда для волновой функции (4) получим

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{Q} \frac{A_{if}(\mathbf{Q}) \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{r}]}{E - E_{\mathbf{k} - \mathbf{Q}} - \epsilon_{if} + i\Gamma}. \quad (6)$$

В то же время из лемановских разложений известно [11], что имеет место следующее выражение

для произведения амплитуд вероятности испускания объемного плазмона:

$$\sum_f T_1(\mathbf{r}, i \rightarrow f) T_1^*(\mathbf{r}', i \rightarrow f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \operatorname{Im}[D_R(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - D_A(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')], \quad (7)$$

где D_R и D_A — соответственно запаздывающая и опережающая функции Грина электрического поля возбуждения электронов среды (плазмон). Учитывая, что для объемного плазмона $D(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = D(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$, находим соотношение для суммы по всем конечным состояниям произведения:

$$\sum_f A_{if}(\mathbf{Q}) A_{if}^*(\mathbf{Q}') = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}') \times \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \operatorname{Im} D(\mathbf{Q}, \omega). \quad (8)$$

Отсюда сразу получим, что вероятность однократной потери энергии электроном на возбуждение объемного плазмона имеет вид ($\hbar\gamma = \Gamma$)

$$P_1 = \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty d\omega \int d\mathbf{Q} \operatorname{Im} D(\mathbf{Q}, \omega) \times \frac{1}{(E - E_{\mathbf{k} - \mathbf{Q}} - \hbar\omega)^2 + \Gamma^2} = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar v \gamma} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \times \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{Q}, \omega)} \left(\arctg \frac{Qv - \omega}{\gamma} + \arctg \frac{Qv + \omega}{\gamma} \right). \quad (9)$$

3. ЧЕРЕНКОВСКОЕ И ТОРМОЗНОЕ ИСПУСКАНИЕ ОБЪЕМНОГО ПЛАЗМОНА ЭЛЕКТРОНОМ

Сумму двух арктангенсов в формуле (9) можно представить в виде

$$\arctg \frac{Qv - \omega}{\gamma} + \arctg \frac{Qv + \omega}{\gamma} = \pi\theta(Qv - \omega) + \arctg \frac{\gamma}{\omega - Qv} - \arctg \frac{\gamma}{\omega + Qv}. \quad (10)$$

Слагаемое в правой части, содержащее θ -функцию, соответствует выделению вклада черенковского механизма испускания объемного плазмона, так как содержит условие выполнения законов сохранения непосредственно в акте электрон-плазмонного рассеяния. Сумма оставшихся двух слагаемых справа

содержит всю информацию об отклонении от законов сохранения в акте электрон-плазмонного рассеяния. Средний член суммы, содержащий арктангенс, в области $\omega > Qv > 0$ определяет тормозное испускание объемного плазмона, а оба арктангенса в области $Qv > \omega$ определяют вклад мнимого потенциала в уменьшение вероятности испускания плазмона в черенковском диапазоне волновых векторов.

Следовательно, тормозному испусканию объемного плазмона в среде с электронным поглощением соответствует вероятность

$$P_{bs} = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar v \gamma} \int_0^\infty d\omega \int_0^{\omega/v} \frac{dQ}{Q} \times \text{Im} \frac{1}{\varepsilon(Q, \omega)} \left(\text{arctg} \frac{\gamma}{\omega - Qv} - \text{arctg} \frac{\gamma}{\omega + Qv} \right), \quad (11)$$

а испусканию объемного плазмона в черенковском диапазоне волновых векторов —

$$P_{Ch} = P_0 - \Delta P_\gamma, \quad (12)$$

где

$$P_0 = \frac{e^2}{\pi \hbar v \gamma} \int_0^\infty d\omega \int_{\omega/v}^\infty \frac{dQ}{Q} \text{Im} \frac{1}{\varepsilon(Q, \omega)}, \quad (13)$$

$$\Delta P_\gamma = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar v \gamma} \int_0^\infty d\omega \int_{\omega/v}^\infty \frac{dQ}{Q} \times \text{Im} \frac{1}{\varepsilon(Q, \omega)} \left(\text{arctg} \frac{\gamma}{Qv - \omega} + \text{arctg} \frac{\gamma}{\omega + Qv} \right). \quad (14)$$

Разность $P_{bs} - \Delta P_\gamma$ может быть как положительной при малых $b = \gamma/\omega_p \ll 1$, так и отрицательной при $b \leq 1$.

Если использовать простейшее представление мнимой части обратной диэлектрической проницаемости среды в длинноволновом пределе с «коротковолновой отсечкой» $Q < Q_c$ (назовем такое представление длинноволновой аппроксимацией диэлектрической проницаемости),

$$\text{Im} \frac{1}{\varepsilon(Q, \omega)} = \frac{\pi \omega_p}{2} \delta(\omega - \omega_p) \theta(Q_c - Q), \quad (15)$$

то

$$\text{Im} D(Q, \omega) = \frac{2\pi^2 e^2 \hbar \omega_p}{Q^2} \delta(\omega - \omega_p) \theta(Q_c - Q).$$

Тогда из (9) следует, что

$$P_{tw} = \frac{e^2 \omega_p}{2v \pi \hbar \gamma} \int_0^{Q_c} \frac{dQ}{Q} \times \left(\text{arctg} \frac{Qv - \omega_p}{\gamma} + \text{arctg} \frac{Qv + \omega_p}{\gamma} \right). \quad (16)$$

Если в скобках в этой формуле пренебречь мнимым потенциалом, т.е. устремить $\gamma/\omega_p \rightarrow 0$, то в переложении на длину пробега получим известную формулу Пайнса [12, стр. 252; 13]

$$\lambda_{pl} = \frac{2a_B E}{\hbar \omega_p \ln(vQ_c/\omega_p)},$$

которая до сих пор используется во многих приложениях (a_B — боровский радиус).

4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ НЕУПРУГОГО И УПРУГОГО СТОЛКНОВЕНИЙ БЫСТРОГО ЭЛЕКТРОНА

Применительно к экспериментам «на отражение» формула (9) показывает лишь часть вероятности, описывающую сумму квадратов модулей процессов, которые соответствуют двум сценариям столкновений быстрого электрона. Эти сценарии отличаются друг от друга последовательностью столкновений упругого и неупругого типов. Кроме того, имеет место интерференция амплитуд этих двух процессов, носящая квантовую природу. С учетом такой интерференции формула (9) видоизменяется:

$$P_\chi = \frac{1}{16\pi^4} \int_0^\infty d\omega \int d\mathbf{Q} \text{Im} D(\mathbf{Q}, \omega) \times \left| \frac{1}{E - E_{\mathbf{k}-\mathbf{Q}} - \hbar\omega + i\Gamma} + \frac{1}{E - E_{\mathbf{k}'+\mathbf{Q}} + \hbar\omega + i\Gamma} \right|^2. \quad (17)$$

Учет интерференции амплитуд приводит к существованию зависимости вероятности от угла рассеяния χ между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Эта зависимость определяет явление слабой локализации вблизи $\chi = 180^\circ$ [3–7]. Взяв угол рассеяния $\chi = \pi$ (т.е. исключив из рассмотрения угловую картину эффекта слабой локализации), получим

$$P_{\chi=\pi} = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar v \gamma} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon(Q, \omega)} \times$$

$$\times \left[\left(\operatorname{arctg} \frac{Qv - \omega}{\gamma} + \operatorname{arctg} \frac{Qv + \omega}{\gamma} \right) + \right.$$

$$\left. + \gamma \operatorname{Re} \frac{\ln \left[\frac{Qv + \omega - i\gamma}{-Qv + \omega - i\gamma} \right]}{\omega - i\gamma} \right]. \quad (18)$$

Это выражение во многом отличается от простейшего выражения для вероятности $P_{10} = l_c / \lambda_{pl}$. Третье слагаемое в квадратных скобках описывает интерференцию упругого и неупругого процессов рассеяния электрона. Уже только это говорит о неполной корректности пуассоновской статистики для однократной потери энергии. Конечно, можно обойти это противоречие, переопределив длину пробега λ_p (заметим, что $\lambda_p \neq \lambda_{pl}$), однако тогда статистика Пуассона с переопределенной длиной λ_p не будет справедлива для кратных потерь энергии.

Формулы (17), (18) в первую очередь пригодны для объяснения экспериментов «на отражение» электронов средних энергий.

5. ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ НА ВЕРОЯТНОСТЬ И ФОРМУ ЛИНИИ СПЕКТРА ПОТЕРИ

Как уже было сказано, вероятность однократной потери на излучение объемного плазмона зависит от представления диэлектрической проницаемости среды. Рассмотрим более точное, чем в (15), представление функции $\varepsilon(\mathbf{Q}, \omega)$. В общем виде диэлектрическая проницаемость выражается через поляризационный оператор среды:

$$\varepsilon(Q, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{Q^2} \Pi(Q, \omega). \quad (19)$$

В простейшем виде поляризационный оператор представляет собой петлю из двух «тонких» электронных функций Грина G_0 [10, стр. 239]:

$$\Pi_0(q_0) = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \times$$

$$\times \int dk G_0 \left(k - \frac{q_0}{2} \right) G_0 \left(k + \frac{q_0}{2} \right), \quad (20)$$

где $q_0 = (\mathbf{Q}, \omega)$, $k = (\mathbf{k}, \omega')$. Подставив этот поляризационный оператор в выражение для диэлектрической проницаемости, получим линдхардовское

приближение [12, стр. 191] для $\varepsilon(\mathbf{Q}, \omega)$. В кинетической аппроксимации, когда $Q \ll k_F$, диэлектрическая проницаемость среды (19) имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{Q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{mv_F Q^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} \delta(v - v_F)}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} + i\delta \operatorname{sign} \omega}.$$

Эту формулу можно записать в более простом виде, а именно

$$\varepsilon(\mathbf{Q}, \omega) = 1 - 3\omega_p^2 \int_1^\infty \frac{d\gamma}{\gamma^2 [(\omega + i\nu)^2 \gamma^2 - Q^2 v_F^2]}. \quad (21)$$

Эта формула была получена в работе [14] другим путем. Самосогласованное решение кинетического уравнения для неравновесной функции распределения электронов среды и уравнения Пуассона для потенциала электрического поля возмущения электронов среды определяет диэлектрическую проницаемость среды (21), откуда и появилась указанная выше терминология «кинетическое приближение». Сильная пространственная дисперсия, упомянутая в заголовке, подразумевает выполнение условия $Qv_F \gg \nu$, где частота столкновений электронов среды $\nu \ll \omega_p$.

Выражение для мнимой части обратной диэлектрической проницаемости среды имеет вид (здесь мы исходим из условия сильной пространственной дисперсии, когда $\nu \rightarrow 0$)

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon(Q, \omega)} = \pi \theta(\omega - Qv_F) \delta[\varepsilon(Q, \omega)] +$$

$$+ \theta(Qv_F - \omega) \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(Q, \omega)}{|\varepsilon(Q, \omega)|^2}. \quad (22)$$

Первое слагаемое в этой формуле определяет возбуждение плазмона, а второе — возбуждение электронно-дырочных пар.

Спектр плазмона ограничен диапазоном волновых векторов $Qv_F < \omega_p$, а обращение в нуль диэлектрической проницаемости происходит при

$$Q^2 = \frac{\beta(\omega)^2 \omega^2 \varepsilon(\omega)}{v_F^2}, \quad (23)$$

где $\beta(\omega)$ определяется из решения трансцендентного уравнения

$$\beta^2 = \left\{ 3[1 - \varepsilon(\omega)] \int_0^1 ds \frac{s^4}{1 - \beta^2 s^2 \varepsilon(\omega)} \right\}^{-1}. \quad (24)$$

Введем в рассмотрение параметр $q(\omega) = \beta^2(\omega) \varepsilon(\omega)$. Дальнейшее решение будем искать в

параметрической форме. Действительно, из (24) несложно получить, что

$$\varepsilon(q) = 1 - \frac{q}{3} \left[\frac{1}{2\sqrt{q}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{q}}{1 - \sqrt{q}} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (25)$$

и

$$\omega(q) = \omega_p Z(q), \quad Z(q) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon(q)}}.$$

Так что

$$\left. \frac{\partial \varepsilon(Q, \omega)}{\partial Q^2} \right|_{\varepsilon(Q, \omega)=0} = \frac{v_F^2}{3\omega_p^2} \left[1 + \frac{1}{2(1-q)} - \frac{3}{4\sqrt{q}} \ln \frac{1 + \sqrt{q}}{1 - \sqrt{q}} \right] \left[\frac{1}{2\sqrt{q}} \ln \frac{1 + \sqrt{q}}{1 - \sqrt{q}} - 1 \right]^{-2}. \quad (26)$$

Максимальное значение параметра $q = q_c = Q_c v_F / \omega_p = 0.601$ (это значение соответствует включению конечного затухания диэлектрической проницаемости при $Q = \omega_p / v_F$, определяемого спектром парных возбуждений $q_c Z^2(q_c) = 1$).

Мнимая часть функции Грина объемного плазмона в среде без границ имеет вид

$$\text{Im } D(\mathbf{Q}, \omega) = \frac{8\pi^2 e^2 \hbar Z^2(q)(1-q)}{3[1 - (1-q)Z^2(q)]} \times \delta \left(Q^2 - \frac{q\omega_p^2}{v_F^2} Z^2(q) \right) \theta(q_c - q). \quad (27)$$

Спектральное распределение вероятности однократной потери на возбуждение объемного плазмона в кинетическом приближении имеет вид

$$\frac{dP_1(q)}{d\omega(q)} = \frac{e^2 Z^2(q) F(q) (1-q)}{3\pi \hbar v b [1 - (1-q)Z^2(q)]} \theta(q_c - q), \quad (28)$$

где функция $F(q)$ имеет следующее представление:

$$F(q) = \text{arctg} \frac{Z(q)(\sqrt{q}p - 1)}{b} + \text{arctg} \frac{Z(q)(\sqrt{q}p + 1)}{b}. \quad (29)$$

Здесь введены следующие обозначения: $p = v/v_F$, $b = \gamma/\omega_p$. Вероятность однократной потери энергии на испускание объемного плазмона можно теперь легко рассчитать:

$$P_1 = \frac{e^2}{4\pi \hbar v b} \int_0^{q_c} dq \frac{Z(q) F(q)}{q}. \quad (30)$$

Исходя из того, что $P_1 = l_c/\lambda_p$, мы можем определить длину пробега электрона до акта испускания

объемного плазмона в среде с электронным поглощением (интерференционный член, зависящий от выбора угла рассеяния $\chi = \pi$, т. е. для разнонаправленного электронного транспорта, не должен учитываться при определении длины пробега в одном направлении). Таким образом

$$\lambda_p = 4a_B \pi \left[\sqrt{3} \hbar \omega_p \int_0^{q_c} \frac{dq}{q^{3/2}} \times \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{q}} \ln \frac{1 + \sqrt{q}}{1 - \sqrt{q}} - 1} F(q) \right]^{-1}. \quad (31)$$

Использование этой длины пробега для расчета интенсивности кратных потерь по статистике Пуассона некорректно, поскольку сама пуассоновская статистика для кратных потерь в среде с электронным поглощением нуждается в пересмотре.

6. ОЦЕНКА ДЛИНЫ КОГЕРЕНТНОСТИ ВЫСТРОГО ЭЛЕКТРОНА

Чтобы рассчитать вероятность испускания плазмона, надо знать длину, на которой быстрый электрон выходит из когерентного состояния в результате диссипативных процессов неупругого рассеяния и сбоя фазы при упругом некогерентном рассеянии. Как было сказано во Введении, длина когерентности l_c в основном определяется двумя неупругими процессами рассеяния (возбуждением плазмонов и электронно-дырочных пар), а также упругим малугловым некогерентным рассеянием:

$$\frac{1}{l_c} \approx \frac{1}{\lambda_{pl}} + \frac{1}{\lambda_{eh}} + \frac{1}{\lambda_{elas}}. \quad (32)$$

Для оценки вклада плазмонов достаточно взять пайнсовскую длину пробега [12]. Для оценки вклада парных возбуждений воспользуемся вторым слагаемым формулы (22). Оно имеет вид

$$\text{Im} \left. \frac{1}{\varepsilon(Q, \omega)} \right|_{eh} = \frac{3\pi\omega_p^2\omega}{2Q^3 v_F^3} \theta(Qv_F - \omega) \times \left\{ \left[1 + \frac{3\omega_p^2}{Q^2 v_F^2} \left(1 - \frac{\omega}{2Qv_F} \ln \left| \frac{\omega + Qv_F}{\omega - Qv_F} \right| \right) \right]^2 + \frac{9\pi^2\omega_p^4\omega^2}{4Q^6 v_F^6} \right\}^{-1}. \quad (33)$$

Подставив эту функцию в формулу (9) и приняв во внимание, что $\omega v/\gamma v_F \gg 1$, для вероятности возбуждения электронно-дырочных пар получим

$$P_{eh} = 0.784 \frac{e^2 \omega_p}{\hbar v \gamma}, \quad (34)$$

откуда

$$\lambda_{eh} = \frac{a_B E}{0.784 \hbar \omega_p} \quad (35)$$

и вклад парных возбуждений в длину когерентности сопоставим со вкладом плазмонов.

Для оценки вклада малоуглового некогерентного рассеяния в длину когерентности воспользуемся потенциалом Менсинг $V(r)$ с радиусом обрезания $r_0 = 2.2 a_B / Z^{1/3}$, равным радиусу атома по Томасу-Ферми (радиусу, при котором функция $\chi(x = 2.5) = 0.2$ [1, стр. 291], т. е. где функция, определяющая экранирующую часть потенциала Томаса-Ферми, в пять раз меньше максимального значения при $\chi(x = 0) = 1$):

$$V(r) = -Z e^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \theta(r_0 - r). \quad (36)$$

Тогда

$$\lambda_{elas} = k^2 \left[4\pi n \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \right]^{-1}, \quad (37)$$

где в соответствии с [15]

$$\begin{aligned} \sin^2 \delta_l &= \\ &= \left\{ 1 + \left[\frac{y_l(kr_0) s_0 M(l) - y_{l+1}(kr_0)}{j_l(kr_0) s_0 M(l) - j_{l+1}(kr_0)} \right]^2 \right\}^{-1}, \\ M(l) &= 1 - \left[1 - \frac{m Z e^2}{\hbar^2 k_0 (l+1)} \right] \times \\ &\times \frac{F\left(l+2 - \frac{m Z e^2}{\hbar^2 k_0}, 2l+3, 2k_0 r_0\right)}{F\left(l+1 - \frac{m Z e^2}{\hbar^2 k_0}, 2l+2, 2k_0 r_0\right)}, \end{aligned} \quad (38)$$

$j_l(x)$, $y_l(x)$ — сферические функции Бесселя l -го порядка, $F(a, c, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция,

$$s_0 = \sqrt{\frac{2m Z e^2}{\hbar^2 r_0 k^2} - 1} = \frac{k_0}{k}.$$

Суммируя все вклады в длину когерентности, получим

$$l_c = \frac{a_B E}{\hbar \omega_p} \left[0.784 + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{E}{E_F} \right) + \frac{\hbar \omega_p}{2 E_B} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \right]^{-1}, \quad (39)$$

где $E_B = e^2 / a_B$.

Теперь можно вычислить величину параметра b :

$$b = \sqrt{\frac{E_B}{2E}} \left[0.784 + \frac{1}{4} \ln \frac{E}{E_F} + \frac{\hbar \omega_p}{2 E_B} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \right].$$

Например, для алюминия с

$$Z = 13, \quad r_s = 2.07, \quad \hbar \omega_p = \frac{\sqrt{3} E_B}{r_s^{3/2}} = 16.4 \text{ эВ},$$

$$E_F = \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{E_B}{2 r_s^2} = 11.7 \text{ эВ}$$

и для электрона с энергией $E = 200$ эВ находим значения

$$b = 0.856, \quad l_c = 2.08 \text{ \AA}, \quad \lambda_p = 12.2 \text{ \AA}.$$

По формуле Пайнса при тех же параметрах аналогичная длина пробега будет равна $\lambda_{pl} = 9.6 \text{ \AA}$, что на 21 % меньше.

7. ФОРМА ЛИНИЙ СПЕКТРОВ ЧЕРЕНКОВСКОГО И ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

С использованием формул (28), (29) не представляет труда получить спектр черенковской генерации объемного плазмона в кинетическом приближении:

$$\frac{dP_{Ch}(q)}{d\omega(q)} = \frac{e^2 Z^2(q)(1-q)}{3\hbar v b [1 - (1-q)Z^2(q)]} \times \theta(\sqrt{q}p - 1) \theta(Q_c - q). \quad (40)$$

Форма спектра черенковского испускания объемного плазмона приведена на рис. 1 (штриховая кривая). Спектр начинается скачком на частоте

$$\omega_p \frac{v\sqrt{3}}{v_F} \sqrt{\frac{v}{2v_F} \ln \left(\frac{v+v_F}{v-v_F} \right) - 1},$$

имеет на этой частоте максимальное значение, а затем плавно убывает и заканчивается на частоте

$$\omega_{max} = \omega_p Z(Q_c) = 1.289 \omega_p,$$

которая является предельной частотой плазмонного спектра.

Тормозное излучение плазмонов есть следствие влияния процессов диссипации энергии и импульса электрона на процесс излучения объемного плазмона. «Третьим телом», в поле которого испускается объемный плазмон, является мнимый потенциал

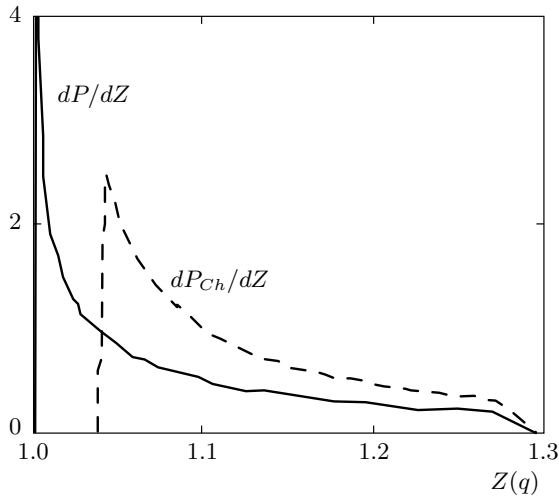


Рис. 1. Спектры однократной характеристической потери электрона с энергией 100 эВ в алюминии. По оси абсцисс отложена безразмерная частота $Z(q) = \omega/\omega_p$. Сплошной кривой соответствует полный спектр потери энергии, а штриховой — спектр черенковского и испускания объемного плазмона. Исходные параметры: $E_F = 11.7$ эВ, $\hbar\omega_p = 16.4$ эВ, $\hbar\nu = 1$ эВ, $Z = 13$, $r_s = 2.07$, $r_0 = 2.2a_B/Z^{1/3}$

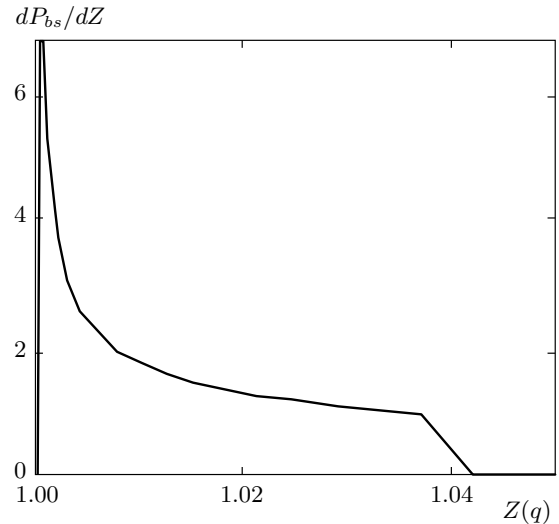


Рис. 2. Спектр тормозного испускания объемного плазмона. В пределе $\omega \rightarrow \omega_p$ этот спектр расходится как $(\omega - \omega_p)^{-1/2}$ без учета окрестности $\omega - \omega_p \sim \nu$, где спектр обрывается до нуля. Этот спектр также обрывается до нуля у границы черенковской генерации плазмона

электронного волнового поля. Объемные плазмоны начинают испускаться с волновыми векторами в диапазоне $0 < Q < \omega/v$. Для кинетического описания диэлектрической проницаемости (21) такой частотный диапазон имеет вид

$$\omega_p < \omega < \omega_p \frac{v\sqrt{3}}{v_F} \sqrt{\frac{v}{2v_F} \ln\left(\frac{v+v_F}{v-v_F}\right) - 1}.$$

Спектр тормозного излучения плазмона рассчитывается по формуле

$$\frac{dP_{bs}(q)}{d\omega(q)} = \frac{e^2 Z^2(q) G(q) (1-q)}{3\pi \hbar v b [1 - (1-q) Z^2(q)]} \theta(1 - p\sqrt{q}), \quad (41)$$

где

$$G(q) = \arctg \frac{b}{Z(q)(1-p\sqrt{q})} - \arctg \frac{b}{Z(q)(1+p\sqrt{q})}.$$

Спектр примыкает к плазменной частоте, при приближении к которой со стороны больших частот, он расходится как $1/\sqrt{\omega - \omega_p}$, но остается интегрируемым (на самом деле, вблизи плазменной частоты теряется справедливость условия сильной дисперсии $Qv_F \gg \nu$ и истинный спектр в окрестности ν убывает до нуля). С увеличением частоты и при приближении к частоте начала черенковского диапазона спад формы линии тормозного излучения за-

медляется, а затем спектр скачком обрывается на частоте

$$\omega_p \frac{v\sqrt{3}}{v_F} \sqrt{\frac{v}{2v_F} \ln\left(\frac{v+v_F}{v-v_F}\right) - 1}.$$

Этот спектр представлен на рис. 2.

8. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ УПРУГОГО И НЕУПРУГОГО СТОЛКНОВЕНИЙ ЭЛЕКТРОНА

Искомой вероятности соответствует третье слагаемое формулы (18). Величина этой вероятности имеет конечное значение при стремлении мнимого потенциала к нулю. В среде с электронным поглощением такая вероятность почти не меняется (слабо убывает) с ростом длины когерентности, в то время как вероятность каждого из сценариев процесса электронного рассеяния растет пропорционально увеличению длины когерентности. Вероятность интерференции столкновений при угле рассеяния 180° практически одинакова для любой аппроксимации диэлектрической проницаемости и имеет отрицательное значение, что означает суммарный когерентный эффект гашения при сложении амплитуд двух сценариев. В «нечеренковском» диапазоне эта вероятность положительна и имеет максимум, а в черен-

ковском диапазоне интерференционная вероятность отрицательна и мала, но в сумме по всем диапазонам частот преобладает эффект уменьшения вероятности испускания плазмонов при $\chi = \pi$.

9. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. В среде с электронным поглощением в диапазоне энергий электронов 100–300 эВ величина мнимого потенциала среды сопоставима с энергией плазмона. Это служит причиной существенного отклонения от условий выполнения законов сохранения в акте возбуждения объемного плазмона электроном. В таких условиях существенное значение имеет тормозное излучение плазмона в «нечеренковском» диапазоне частот и волновых векторов, а также уменьшение вероятности испускания плазмона в черенковском диапазоне частот. Интерференционная вероятность может иметь разный знак и, как правило, носит характер когерентного сложения амплитуд двух процессов, различающихся последовательностью упругого и неупругого актов рассеяния, в длинноволновом «нечеренковском» диапазоне, тогда как в черенковском диапазоне интерференция амплитуд приводит к эффекту гашения вероятности.

2. В таблице представлены данные расчета основных величин, характеризующих процесс испускания

плазмона электроном применительно к эксперименту «на отражение». В качестве среды взят алюминий как типичный металл с известными характеристиками электронной плотности, в котором эффекты пространственной дисперсии являются определяющими в формировании энергетического спектра плазменной потери в указанном выше диапазоне энергий быстрых электронов. Важное значение в определении многих составляющих полной вероятности играет расчет длины выхода быстрого электрона из когерентного состояния. Прделанная оценка показывает значительно большую роль вклада упругих малоугловых некогерентных столкновений электрона, чем неупругих процессов диссипации, в определение длины когерентности. Такой вывод не нов, он известен по ряду работ, например, [16]. Поэтому при энергиях быстрых электронов 100–300 эВ параметр $b = \gamma/\hbar\omega_p$ близок к единице (см. первую строку таблицы). Соответствующая этому параметру длина когерентности содержится во второй строке таблицы. Эта длина располагается в пределах от 1.5 до 3 Å. В следующей строке таблицы приведены значения длин пробега λ_{pl} до акта испускания плазмона, рассчитанные по формуле Пайнса. Ниже приведены длины пробега λ_p , рассчитанные по формуле (31), в которой учтены как эффекты, связанные с наличием электронного поглощения, так и более корректный, чем в [12], учет пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости. В строке для P_0 представлены значения вероятности черенковской генерации объемного плазмона в соответствии с формулами (13) и (21), а в строке для P_{bs} — значения вероятности тормозного испускания объемного плазмона в соответствии с формулами (11) и (21). Вероятность тормозного испускания составляет примерно 30 % от вероятности черенковской генерации при $E = 100$ эВ и примерно 20 % при $E = 300$ эВ. Такие большие величины вероятности тормозного излучения плазмона компенсируются значительным уменьшением вероятности в черенковском диапазоне частот. Этот факт хорошо виден на рис. 1, где представлены полный спектр однократной потери энергии²⁾ и спектр черенковской генерации. Уменьшение вероятности в черенковском диапазоне частот связано с влиянием электронного поглощения на спектр генерации плазмона. В строке, где стоит величина ΔP_γ , как раз и представлены отрицательные величины уменьшения вероят-

Таблица. Результаты расчетов различных параметров применительно к алюминию

	$E, \text{эВ}$		
	100	200	300
b	0.855	0.856	0.793
$l_c, \text{Å}$	1.47	2.08	2.74
$\lambda_{pl}, \text{Å}$	6.35	9.59	12.50
$\lambda_p, \text{Å}$	8.00	12.16	15.63
P_0	0.197	0.193	0.198
P_{bs}	0.067	0.045	0.039
ΔP_γ	-0.081	-0.068	-0.061
P_{int}	-0.007	-0.017	-0.017
P_Σ	0.176	0.153	0.158
$\frac{P_\Sigma - P_0}{P_0}$	-0.102	-0.207	-0.197

²⁾ Следует заметить, что формулой (28) и этим рисунком мы исправляем ошибки, вкравшиеся в нашу статью [2], опубликованную в 1978 г.

ности черенковской генерации. В строке для P_{int} представлены значения вероятности интерференции упругого и неупругого столкновений быстрого электрона. Эти значения отрицательны, поскольку в интерференции превалирует «эффект плотности» над интерференционным тормозным излучением. Значения P_{Σ} соответствуют полной вероятности однократной потери на испускание объемного плазмона. В последней строке таблицы представлены значения относительной доли поправок, связанных с наличием электронного поглощения в среде, к величине черенковской вероятности. Отрицательный знак поправок говорит о том, что полная вероятность меньше черенковской. По абсолютной величине эти поправки колеблются от 10 % при $E = 100$ эВ до 20 % при $E = 300$ эВ.

3. Тормозное испускание объемных плазмонов и интерференция амплитуд двух сценариев процесса электронного рассеяния при отражении электронов приводят к тому, что вероятность однократной потери энергии не соответствует статистике Пуассона с пайнсовской длиной пробега электрона до акта возбуждения плазмона. Интенсивность однократной потери энергии может быть рассчитана по формуле $P_1 = l_c/\lambda_p$, которая только по форме соответствует статистике Пуассона, но длина пробега до акта испускания плазмона здесь вычисляется по формуле (31). Использование формулы (31) для расчета интенсивности двукратной характеристической потери энергии некорректно по крайней мере по двум причинам: в случае испускания двух плазмонов при последовательных актах возможна их интерференция (интерференция малоугловых неупругих столкновений), а также возможно испускание двух плазмонов в одном акте рассеяния быстрого электрона [17, 18]. Следовательно, статистика Пуассона в своей традиционной форме непригодна для описания интенсивности характеристических потерь энергии на испускание плазмонов для электронов в рассматриваемом диапазоне энергий. Поэтому теоретические выкладки, содержащиеся в работе [19], нельзя признать удовлетворительными.

4. Представлены спектры полной однократной потери энергии на возбуждение объемного плазмона, $dP/dZ(q)$ и черенковского испускания объемного плазмона, $dP_{Ch}/dZ(q)$, как функции $Z(q)$ в алюминии при энергии электрона 100 эВ в среде с $l_c = 1.5 \text{ \AA}$ (рис. 1). Также приведен спектр тормозного излучения объемного плазмона электроном с энергией 100 эВ (рис. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматлит, Москва (1963).
2. V. V. Romyantsev and B. N. Libenson, *Ann. Phys.* **111**, 152 (1978).
3. Б. Н. Либенсон, К. Ю. Платонов, В. В. Румянцев, *ЖЭТФ* **101**, 614 (1992).
4. V. V. Romyantsev, E. V. Orlenko, and B. N. Libenson, *Z. Phys. B* **103**, 53 (1997).
5. Б. Н. Либенсон, В. В. Румянцев, *ФТТ* **40**, 1413 (1998).
6. Б. Н. Либенсон, *ФТТ* **45**, 22 (2003).
7. Б. Н. Либенсон, *ФТТ* **49**, 52 (2007).
8. B. N. Libenson and V. V. Romyantsev, *Phys. Stat. Sol. (b)* **65**, 281 (1974).
9. В. В. Румянцев, Б. Н. Либенсон, *ЖЭТФ* **83**, 250 (1982).
10. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматлит, Москва (1962).
11. В. В. Румянцев, Б. Н. Либенсон, *ЖЭТФ* **87**, 1818 (1984).
12. Д. Пайнс, *Элементарные возбуждения в твердых телах*, Мир, Москва (1965).
13. Ф. Платцман, П. Вольф, *Волны и взаимодействия в плазме твердого тела*, Мир, Москва (1975), с. 100.
14. Б. Н. Либенсон, *ФТТ* **18**, 1607 (1976).
15. В. В. Румянцев, Ю. А. Морозов, Б. Н. Либенсон, *ЖЭТФ* **63**, 1221 (1972).
16. J. P. Ganachaud and M. Cailler, *Surf. Sci.* **83**, 498 (1979).
17. J. M. Pitarke and I. Campillo, *Scanning Microscopy* **12**, 193 (1998).
18. C. Sternemann, S. Huotari, G. Vanko et al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 157401 (2005).
19. В. В. Макаров, В. П. Артемьев, С. И. Игонин и др., в сб. *Проблемы физической электроники*, Ленинград (1986), с. 74.